Časově proměnné pole

Formulace elektrodynamiky.

Plné Maxwellovy rovnice. Potenciály, rovnice pro potenciály, kalibrační volnost, kalibrační podmínky.

Elektrodynamika se zdroji.

Vlnová rovnice pro potenciály v Lorenzově kalibraci. Prostoročasová formulace. Retardované a advancovaná podmínky, retardovaná a advancovaná Greenova funkce. Symetrická a kauzální Greenova funkce. Potenciál zadaných zdrojů, příchozí, odchozí a radiační pole. Retardované šíření a kauzalita. Jefimenkovy vztahy pro elektrickou intenzitu a magnetickou indukci.

Pole pohybujícího se náboje.

Pole pohybujícího se bodového náboje, Liénardovy-Wiechertovy potenciály.

Vlnové řešení.

Volné Maxwellovy rovnice, vlnové rovnice pro elektrickou intenzitu a magnetickou indukci. Vlna šířící se jedním směrem, profilová funkce a fáze, rychlost šíření. Transverzalita vlny, nulovost invariantů. Hustota energie a toku energie vlny. Monochromatická vlna, komplexní reprezentace. Lineární, kruhová a eliptické polarizace vlny.

Elektrodynamika bez zdrojů.

Sférické vlny, operátor momentu, ansatz pro vektorový potenciál v Coulombově kalibraci, Debyeův potenciál, TE a TM pole. Řešení skalární vlnové rovnice, separace proměnných, sférické Besselovy funkce.

Formulace elektrodynamiky

Plné Maxwellovy rovnice

$$\vec\nabla\cdot\vec E = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho \qquad \vec\nabla\cdot\vec B = 0$$

$$\vec\nabla\times\vec E + \frac{\partial\vec B}{\partial t} = 0 \qquad \vec\nabla\times\vec B - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec E}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec j$$

potenciály

$$\vec E = -\vec\nabla\phi - \frac{\partial\vec A}{\partial t} \qquad \vec B = \vec\nabla\times\vec A$$

automaticky řeší nezdrojové rovnice

rovnice pro potenciály

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho = \vec\nabla\cdot\vec E = -\vec\nabla\cdot\vec\nabla\phi - \vec\nabla\cdot\frac{\partial\vec A}{\partial t} = -\left[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right]\phi - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec\nabla\cdot\vec A\right)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec j = \vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec A) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec A}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec\nabla\phi = -\left[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right]\vec A + \vec\nabla\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec\nabla\cdot\vec A\right)$$

$\Downarrow$

$$\Box\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec\nabla\cdot\vec A\right)$$

$$\Box\vec A = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec j + \vec\nabla\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec\nabla\cdot\vec A\right) \qquad \Box = \left[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right]$$

Prostoročasová formulace

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j^\mu \qquad \nabla_{[\alpha}F_{\beta\gamma]} = 0$$

potenciály

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$$

automaticky řeší bezzdrojovou Maxwellovu rovnici

rovnice pro 4-potenciál

$$\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j^\mu = \nabla_\nu\nabla^\mu A^\nu - \nabla_\nu\nabla^\nu A^\mu = -\Box A^\mu + \nabla^\mu(\nabla_\nu A^\nu)$$

$\Downarrow$

$$\Box A^\mu = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j^\mu + \nabla^\mu(\nabla_\nu A^\nu) \qquad \Box = \nabla_\nu\nabla^\nu$$

Kalibrační volnost

měřitelné jsou veličiny $\vec{E}$ a $\vec{B}$

neurčují potenciály jednoznačně

změna

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi \qquad \phi \to \phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t}\psi$$

nezmění $\vec{E}$ a $\vec{B}$

$$\vec{B}' = \vec{\nabla}\times\vec{A}' = \vec{\nabla}\times\vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi}_{0} = \vec{B}$$

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}\phi' - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}' = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\psi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\psi}_{0} = \vec{E}$$

kalibrační transformace

charakterizovaná libovolnou prostoročasovou funkcí ψ

$$\psi(t, \vec{r}) \equiv \psi(x^\mu)$$

dána

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi \qquad \phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t}\psi$$

resp.

$$A'_\mu = A_\mu + \nabla_\mu \psi \qquad \left[-\frac{1}{c}\phi', \vec{A}'\right] = \left[-\frac{1}{c}\phi, \vec{A}\right] + \left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\psi, \vec{\nabla}\psi\right]$$

volnost lze využít k naložení dodatečných podmínek na potenciály, které mohou zjednodušit některé rovnice

- tzv. kalibrační podmínky

Lorenzova kalibrace

lze požadovat

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \qquad \text{resp.} \qquad \nabla_\nu A^\nu = 0$$

vskutku, pokud $\phi', \vec{A}'$ nesplňují tuto podmínku, tj

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi'}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = \alpha \neq 0$$

pak hledáme ψ takové, aby

$$\phi = \phi' + \frac{\partial \psi}{\partial t} \qquad \vec{A} = \vec{A}' - \vec{\nabla}\psi$$

splňovaly Lorenzovu podmínku

$$0 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi'}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \nabla^2\psi = \alpha - \Box\psi$$

takové ψ lze najít - viz řešení vlnové rovnice

rovnice pro potenciál v Lorenzově kalibraci

$$\Box\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\Box\vec{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j} \qquad \text{resp.} \qquad \Box A^\mu = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j^\mu$$

zbývající kalibrační volnost

stále máme volnost změnit $\phi, \vec{A}$ pomocí ψ splňující

$$\Box\psi = 0$$

Coulombova kalibrace

kalibrační podmínka

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$$

lze vždy splnit (obdobný argument jako pro Lorenzovou pdm.)
při specifikaci asymptotického chování jsou potenciály určeny jednoznačně

rovnice pro potenciály

$$\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$$

$$\Box\vec{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\phi$$

skalární potenciál dán řešením Poissonovy úlohy

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\varrho(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dV'$$

potenciál je dán okamžitým rozložením náboje v čase t
nekauzální vztah!
potenciál není přímo měřitelný, pouze skrze $\vec{E}$
ϕ ale vstupuje do rovnice pro $\vec{A}$ a ovlivní ho
v kombinaci $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ se nekauzalita vyruší

zdrojový člen pro vekt. potenciál

$$-\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\phi$$

je bezdivergentní

$$-\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j} - \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\phi\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\varrho}{\partial t}\right) = 0$$

lze tak chápat jako bezdivergentní část $\vec{j}_{DF}$ toku $\vec{j}$
rovnice pro $\vec{A}$ má charakter

$$\Box\vec{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j}_{DF}$$

pozor! $\vec{j}_{DF}$ závisí nelokálně na $\vec{j}$
(i pro lokalizované $\vec{j}$ je bezdivergentní část $\vec{j}_{DF}$ nenulová v celém prost.)

případ bez nábojů

$$\varrho = 0 \quad\Rightarrow\quad \phi = 0 \quad\Rightarrow\quad \Box\vec{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j}$$

veškerá informace ve vekt. potenciálu $\vec{A}$

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

Weylova kalibrace

Weylova kalibrační podmínka

$$\phi = 0$$

zobecněná Weylova kalibrační podmínka

$$\phi = \bar{\phi} \quad \equiv \quad \text{libovolná zvolená funkce } \bar{\phi}(\vec{x},t)$$

lze vždy splnit

$$\phi = \phi' - \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

volbou

$$\psi = \int (\phi' - \bar{\phi})\, dt \qquad tj \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \phi' - \bar{\phi}$$

dosáhneme

$$\phi = \bar{\phi}$$

veškerá netriviální informace zakódovaná v $\vec{A}$

$\phi = \bar{\phi}$ určuje pouze výběr z kalibračně ekvivalentních potenciálů

zbývající kalibrační volnost

$$\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\tilde{\psi} \qquad \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = 0 \qquad tj \quad \tilde{\psi}(\vec{x})$$

časová derivace $\tilde{\psi}$ je fixovaná kalibrační podmínkou

zbývající volnost umožňuje splnit v jednom čase t_0

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\Big|_{t=t_0} = 0$$

viz diskuze Coulombovy kalibrace

časová změna $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\left[-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi\right] + \Delta\phi = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} + \Delta\bar{\phi} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho + \Delta\bar{\phi}$$

to je obecně nenulové a tak $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \neq 0$ v časech $t \neq t_0$

pokud zvolím $\bar{\phi}$ tak aby $\Delta\bar{\phi} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$, pak

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$$

tj. dostáváme Coulombovu kalibraci

Elektrodynamika se zdroji

Vlnová rovnice pro 4-potenciál

Lorenzova kalibrační podmínka

$$\nabla_\mu A^\mu = 0$$

rovnice pro 4-potenciál

$$-\Box A^\mu = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j^\mu \qquad \Box = g^{\mu\nu}\nabla_\mu \nabla_\nu$$

řešení metodou Greenovy funkce

$$(-\Box G)(X|X') = \delta(X|X')$$ X, X' události (body) v prostoročase

⇓

$$A^\mu(X) = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\int G(X|X')\, j^\mu(X')\, d^4\Omega'$$

vskutku:

$$-\Box A^\mu(X) = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\int (-\Box G)(X|X')\, j^\mu(X')\, d^4\Omega' = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\int \delta(X|X')\, j^\mu(X')\, d^4\Omega' = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j^\mu(X)$$

nejednoznačnost Greenovy funkce

existují řešení homogenní vlnové rovnice

$$\Box A_H^\mu = 0$$

která jsou fyzikální a nechceme je vyloučit - vlny EM pole

přičtení takového řešení k řešení nehomogenní rovnice dává opět řešení nehomogenní rovnice

⇓ Greenova funkce nemůže být jednoznačná

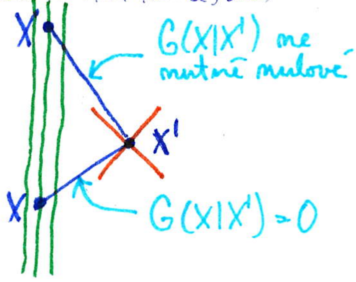
je nutno specifikovat počáteční/koncové podmínky k určení Greenovy fce

počáteční/koncové podmínky (okrajové podmínky v časovém směru)

• retardované

$$A^\mu_{ret}\Big|_{\substack{\text{daleká minulost} \\ = \text{"před zdroji"}}} = 0$$

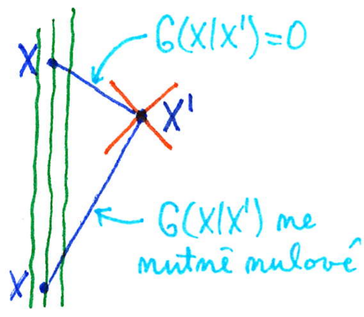
$G_{ret}(X|X') = 0$ pro X neovlivnitelné z X'



• advancované

$$A_{adv}\Big|_{\substack{\text{daleká budoucnost} \\ \text{"po zdrojích"}}} = 0$$

$G_{adv}(X|X') = 0$ pro X' neovlivnitelné z X



Greenova funkce

Poincarého symetrie (translační symetrie) $\Rightarrow$

$$G(X|X') = G(\Delta x) \qquad \Delta x = X - X'$$

Lorentzovské symetrie (isotropie a boosty) $\Rightarrow$

$$G(\Delta x) = G(\Delta x^2) \qquad \Delta x^2 = \eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu$$

tenzorový charakter Greenovy funkce

pro 4-potenciál by Greenova funkce měla mít tenzorový charakter $G^{\mu\nu'}(X|X')$ kde indexy převádí 4-vektor toku na 4-potenciál

$$A^\mu(x) = \int G^\mu{}_\nu(X|X') \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j^\nu(X')\, d^4\Sigma'$$

v Minkowského prostoročase se však vektorový charakter zdroje přenáší pomocí globální rovnoběžnosti

$$G^\mu{}_\nu(X|X') = G(X|X')\,\delta^\mu_\nu$$

Klasické Greenovy funkce

ukážeme, že platí

$$G_{ret}(X|X') = \frac{1}{2\pi}\Theta(\Delta t)\,\delta(\Delta x^2)$$

$$G_{adv}(X|X') = \frac{1}{2\pi}\Theta(-\Delta t)\,\delta(\Delta x^2)$$

můžeme též definovat

$$G_{sym}(X|X') = \frac{1}{2}\left(G_{ret}(X|X') + G_{adv}(X|X')\right) = \frac{1}{4\pi}\delta(\Delta x^2)$$

$$G_c(X|X') = G_{ret}(X|X') - G_{adv}(X|X')$$

tzv. kauzální nebo též Pauliho-Jordanova Greenova fce

Greenovy fce G_{ret}, G_{adv}, G_{sym} splňují

$$-\Box G = \delta$$

kauzální Greenova funkce splňuje

$$\Box G_c = 0$$

platí

$$G_{ret}(X|X') = G_{adv}(X'|X) \qquad G_{sym}(X|X') = G_{sym}(X'|X) \qquad G_c(X|X') = -G_c(X'|X)$$

Odvození Greenovy funkce Brat a Bado

Fourierova transformace

$$-\Box G = \delta \qquad / \frac{1}{(2\pi)^2}\int \dots \exp(-ik_\mu \Delta x^\mu)\, d^4\Delta x \qquad k^\mu = \begin{bmatrix} \omega/c \\ \vec{k} \end{bmatrix} \quad \Delta x^\mu = \begin{bmatrix} c\Delta t \\ \vec{R} \end{bmatrix}$$

levá strana =

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2}\int \Box G(\Delta x^\alpha) \exp(-ik_\mu \Delta x^\mu)\, d^4\Delta x =$$

"per-partes" pro $\Box = \nabla_\nu \nabla^\nu$ zanedbání "povrchových" členů

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2}\int G(\Delta x^\alpha)\, \Box \exp(-ik_\mu \Delta x^\mu)\, d^4\Delta x$$

$\Box$ derivuje v proměnné x^μ v Δx^μ

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} k^2 \int G(\Delta x^\alpha) \exp(-ik_\mu \Delta x^\mu)\, d^4\Delta x$$

kde $k^2 = g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu$

$$= k^2\, \tilde{G}(k_\alpha)$$

$\tilde{G}(k_\alpha)$ je Fourier $G(\Delta x^\mu)$

pravá strana =

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int \delta(\Delta x^\alpha) \exp(-ik_\mu \Delta x^\mu)\, d^4\Delta x$$

integrál δ-funkce

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}$$

$\Downarrow$

vlnové rovnice ve Fourierově obrazu

$$k^2\, \tilde{G}(k_\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^2}$$

$\Downarrow$

$$\tilde{G}(k_\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{k^2}$$

$\leftarrow$ problematické operace! $1/k^2$ není distribučně dobře definované

zpětná Fourierova transformace

$$G(\Delta x^\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \tilde{G}(k_\alpha) \exp(ik_\mu \Delta x^\mu)\, d^4k$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{1}{k^2} \exp(ik_\mu \Delta x^\mu)\, d^4k$$

$\uparrow$ není regulární $\Rightarrow$ problém s integrací

nejednoznačnost Greenovy funkce

rovnici $k^2 G(k_\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^2}$ splňuje více funkcí $G(k_\alpha)$

např. můžeme přičíst $c\,\delta(k^2)$ protože $k^2\delta(k^2) = 0$

nejednoznačnost odpovídá tomu, že jsme zatím nefixovali počáteční/konečné podmínky

lze provést vhodnou regularizaci posledního integrálu integrace přes frekvence

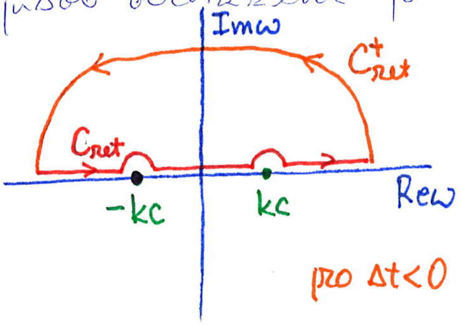
integrál $\int \dots d^4k$ rozdělíme na integrace $\iint \dots \frac{1}{c} d\omega\, d^3\vec{k}$

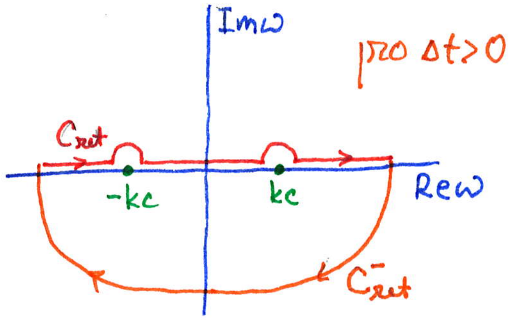
kde vlnový 4-vektor je $k_\mu = \left[-\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right]$ a $\Delta x^\mu = \begin{bmatrix} c\Delta t \\ \vec{r} \end{bmatrix}$ $\quad k^2 = \vec{k}\cdot\vec{k}$

$$G(\Delta x^\alpha) = \frac{c}{(2\pi)^4} \iint \frac{1}{-\omega^2 + k^2c^2} \exp(-i\omega\Delta t)\, d\omega \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})\, d^3\vec{k}$$

jako funkce od ω má dva póly v $\omega = \pm kc$

způsob obcházení pólů:





uvažujme integraci podél C_{ret} – cesta "nad póly"

- pro $\Delta t < 0$ dostaneme

  $\mathrm{Re}(-i\omega\Delta t) < 0$ pokud $\mathrm{Im}\,\omega > 0$

  pokud uzavřeme C_{ret} v horní polorovině $\mathrm{Im}\,\omega > 0$ tak exponenciála $\exp(-i\omega\Delta t)$ bude pro $|\omega| \to \infty$ zanedbatelná

  ⇓

$$G(\Delta x^\alpha) = \frac{c}{(2\pi)^4} \int \underbrace{\int_{C^+_{ret}} \frac{1}{-\omega^2 + k^2c^2} \exp(-i\omega\tau)\, d\omega}\, \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})\, d^3\vec{k}$$

  ⇓ residuová věta ⇒ residua uvnitř C^+_{ret} – žádné póly!

  $G(\Delta x^\alpha) = 0$ pro $\Delta t < 0$

  to je přesně retardovaná počáteční podmínka

  ⇓ cesta C_{ret} definuje retardovanou Greenovu fci G_{ret}

- pro $\Delta t > 0$ dostáváme

  $\mathrm{Re}(-i\omega\Delta t) < 0$ pokud $\mathrm{Im}\,\omega < 0$

  cestu C_{ret} můžeme uzavřít do C^-_{ret} protože exponenciála $\exp(-i\omega\Delta t)$ zde bude pro $|\omega| \to \infty$ zanedbatelná

$$G_{ret}(\Delta x^\alpha) = \frac{c}{(2\pi)^4} \int \underbrace{\int_{C^-_{ret}} \underbrace{\frac{1}{-\omega^2 + k^2c^2}}_{\frac{1}{2kc}\left(-\frac{1}{\omega - kc} + \frac{1}{\omega + kc}\right)} \exp(-i\omega\tau)\, d\omega}\, \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})\, d^3\vec{k}$$

$$-2\pi i\, \mathrm{Res}\, \frac{1}{2kc}\left(-\frac{\exp(-i\omega\tau)}{\omega - kc} + \frac{\exp(-i\omega\tau)}{\omega + kc}\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{kc} \frac{1}{2i}\left(-\exp(-ikc\Delta t) + \exp(ikc\Delta t)\right) = \frac{2\pi}{kc} \sin(kc\Delta t)$$

$$\Downarrow$$

$$G_{ret}(\Delta x^\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{k}\sin(kc\Delta t)\exp(i\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{r}}_{kr\cos\vartheta})\,\underbrace{d^3\vec{k}}_{k^2 dk \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}$$

$\xi = -\cos\vartheta$

$d\xi = \sin\vartheta\, d\vartheta$

ϑ je úhel mezi $\vec{k}$ a $\vec{r}$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk \int_{-1}^{1} d\xi \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi}_{2\pi}\; k\sin(kc\Delta t)\exp(-ikr\xi)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk\; k\sin(kc\Delta t)\,\frac{1}{ikr}\Big[-\exp(-ikr\xi)\Big]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^\infty dk\, \sin(kc\Delta t)\sin(kr)$$

$$= \frac{1}{4\pi r}\,\delta(c\Delta t - r)$$

zde jsme využili relaci úplnosti na polopřímce

$$\delta(r_1 - r_2) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin(kr_1)\sin(kr_2)\,dk$$

retardovaná Greenova funkce

$$G_{ret}(\Delta x^\alpha) = \frac{1}{4\pi r}\,\delta(c\Delta t - r) \qquad \begin{cases} = 0 \text{ pro } \Delta t < 0 \\ \text{nenulové pro } \Delta t > 0 \end{cases}$$

advancovaná Greenova funkce

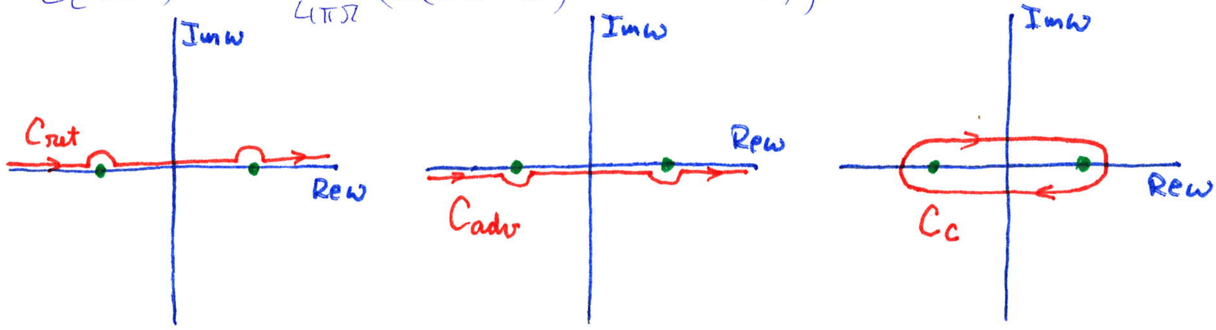
$$G_{adv}(\Delta x^\alpha) = \frac{1}{4\pi r}\,\delta(c\Delta t + r) \qquad \begin{cases} \text{nenulové pro } \Delta t < 0 \\ = 0 \text{ pro } \Delta t > 0 \end{cases}$$

obdobný výpočet ale s použitím integrační cesty "pod póly"

symetrická a kauzální Greenova funkce

$$G_{sym}(\Delta x^\alpha) = \frac{1}{8\pi r}\big(\delta(c\Delta t - r) + \delta(c\Delta t + r)\big)$$

$$G_c(\Delta x^\alpha) = \frac{1}{4\pi r}\big(\delta(c\Delta t - r) - \delta(c\Delta t + r)\big)$$



kovariantní forma Greenovy funkce

$$\delta(\Delta x^2) = \delta(\underbrace{c^2\Delta t^2 - R^2})$$

kořeny $c\Delta t = \pm R$

$$= \frac{1}{2R}\delta(c\Delta t - R) + \frac{1}{2R}\delta(c\Delta t + R)$$

identita:

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_0: f(x_0)=0} \frac{1}{|f'(x_0)|}\delta(x - x_0)$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{2\pi}\delta(\Delta x^2) = G_{ret}(\Delta x^\alpha) + G_{adv}(\Delta x^\alpha)$$

$\Downarrow$

$$G_{ret}(\Delta x^\alpha) = \frac{1}{2\pi}\Theta(\Delta t)\,\delta(\Delta x^2)$$

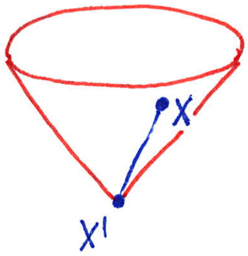
$$G_{adv}(\Delta x^\alpha) = \frac{1}{2\pi}\Theta(-\Delta t)\,\delta(\Delta x^2)$$

$$G_{sym}(\Delta x^\alpha) = \frac{1}{4\pi}\delta(\Delta x^2)$$

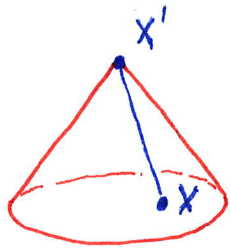
$$G_c(\Delta x^\alpha) = \operatorname{sign}\Delta t\;\delta(\Delta x^2)$$

tyto výrazy jsou Lorentzovsky invariantní (kovariantní)
- závisí pouze na Δx^2
- závislost $\Theta(\Delta t)$, $\Theta(-\Delta t)$, $\operatorname{sign}(\Delta t)$ nenarušuje kovarianci protože pouze vybírá (nebo mění znaménko) budoucí či minulý světelný kužel z nosiče $\delta(\Delta x^2)$

nosič Greenovy funkce = kde je Greenova funkce nenulová
$\delta(\Delta x^2)$ zajišťuje, že Greenova funkce je nenulová pouze pro $\Delta x^2 = 0$, tj. když $\Delta x^\alpha = (X - X')^\alpha$ je nulový 4-vektor
$\Rightarrow$ X a X' musí být spojeny maximálním signálem
$\Rightarrow$ EM pole se šíří maximální rychlostí = rychlostí světla



$\leftarrow$ při fixovaném X' X musí ležet na budoucím světelném kuželu X'



při fixovaném X' X musí ležet na minulém světelném kuželu X' $\leftarrow$

nosič $G_{ret}(X|X')$

nosič $G_{adv}(X|X')$

Retardovaný potenciál

$$A^\mu_{ret}(X) = \int G_{ret}(X|X')\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j^\mu(X')\, d^4\Omega'$$

$X \to \begin{bmatrix} ct \\ \vec{x} \end{bmatrix}$ $X' \to \begin{bmatrix} ct' \\ \vec{x}' \end{bmatrix}$

$\Delta X \to \begin{bmatrix} c\Delta t \\ \vec{r} \end{bmatrix}$ $\Delta t = t - t'$, $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}'$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int \frac{1}{r}\,\delta(\underbrace{c\Delta t}_{t-t'} - r)\, j^\mu(t', \vec{x}')\, c\,dt'\,dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int \frac{j^\mu(t - \frac{r}{c}, \vec{x}')}{r}\, dV'$$

$A^\mu = \begin{bmatrix} \frac{1}{c}\phi \\ \vec{A} \end{bmatrix}$ $j^\mu = \begin{bmatrix} \varrho c \\ \vec{j} \end{bmatrix}$

$\Downarrow$

$$\phi_{ret}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\varrho(t - \frac{r}{c}, \vec{x}')}{r}\, dV'$$

$$\vec{A}_{ret}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int \frac{\vec{j}(t - \frac{r}{c}, \vec{x}')}{r}\, dV'$$

potenciály pro zadané rozložení náboje a proudu
zdroje se vyčíslují v retardovaném čase

$t_{ret} = t - \frac{r}{c}$ $\leftarrow$ funkce $t, \vec{x}, \vec{x}'$

tj. v čase kdy musí být vyslán signál, aby rychlostí c proletěl vzdálenost r přesně do času t

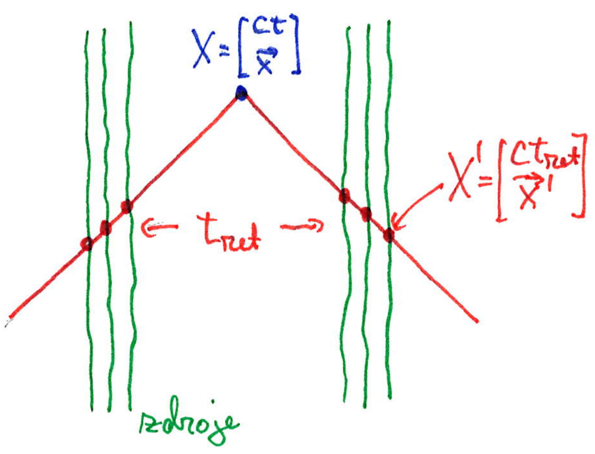
Advancované řešení

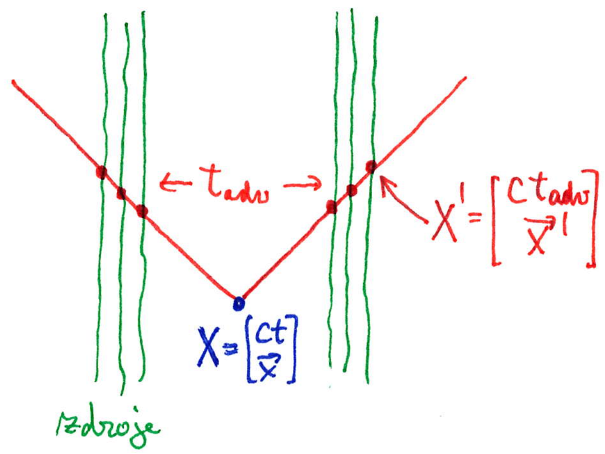
obdobně

$$\phi_{adv}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\varrho(t + \frac{r}{c}, \vec{x}')}{r}\, dV'$$

$$\vec{A}_{adv}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int \frac{\vec{j}(t + \frac{r}{c}, \vec{x}')}{r}\, dV'$$

zdroje se vyčíslují v advancovaném čase $t_{adv} = t + \frac{r}{c}$





Retardované či advancované řešení

mějme obecné pole splňující vlnovou rovnici pro zadané rozložení nábojů a proudů

$$-\Box A^\mu = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j^\mu$$

toto pole lze vždy napsat ve tvaru

$$A^\mu = A^\mu_{ret} + A^\mu_{in} \qquad\qquad \Box A^\mu_{in} = 0$$

kde

$$ = A^\mu_{adv} + A^\mu_{out} \qquad\qquad \Box A^\mu_{out} = 0$$

pokud se zdroji asociujeme retardované pole A^μ_{ret}

A^μ_{in} má interpretaci "volné pole, které bylo již před zdroji"
tj. pole které vstupuje do prostoročasu v dávné minulosti
a je nezávislé na zdrojích

pokud se zdroji asociujeme advancované pole A^μ_{adv}

A^μ_{out} má interpretaci "volné pole, které zůstane po zdrojích"
tj. pole které odchází z prostoročasu v daleké budoucnosti
a je nezávislé na zdrojích

nezávislost na zdrojích nelze splnit zároveň pro A^μ_{in} i pro A^μ_{out} – vzhledem tzv. radiační pole

$$A^\mu_{rad} \equiv A^\mu_{out} - A^\mu_{in} = A^\mu_{ret} - A^\mu_{adv}$$

které udává rozdíl mezi A^μ_{out} a A^μ_{in} závisí na zdrojích

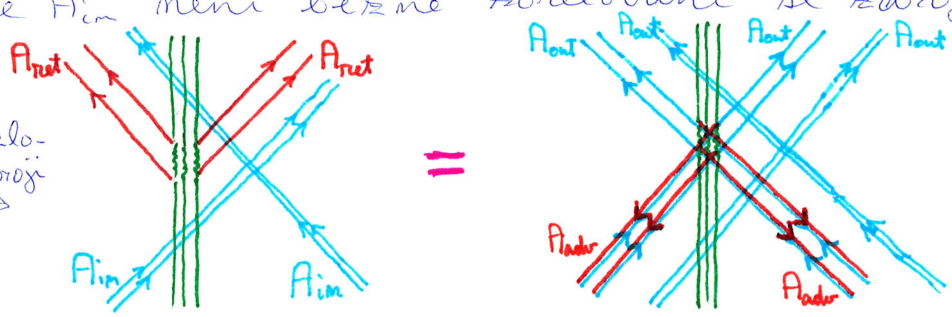
$$A^\mu_{rad}(x) = \int G_c(x|x')\, \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\, j^\mu(x')\, d^4\Omega \qquad \Leftarrow G_c = G_{ret} - G_{adv}$$

tj. pokud A_{in} není korelované se zdroji, A_{out} musí být

experimentální zkušenost

naše zkušenost, že příčina předchází následek, ukazuje, že se zdroji máme asociovat A_{ret} a že A^{μ}_{in} není běžně korelované se zdroji

A_{in} nekorelované se zdroji



A_{out} korelované se zdroji

Jefimenkovy vztahy pro $\vec{E}$ a $\vec{B}$

elektrická intenzita a magnetická indukce pro zadané rozložení nábojů

potenciály

$$\phi(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\varrho(t-\frac{R}{c},\vec{x}')}{R}\,dV' \qquad R = |\vec{x}-\vec{x}'| \qquad \vec{R} = \vec{x}-\vec{x}'$$

$$\vec{A}(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int \frac{\vec{j}(t-\frac{R}{c},\vec{x}')}{R}\,dV' \qquad \vec{e} = \frac{\vec{R}}{R}$$

pole

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV'\left[\vec{\nabla}\frac{\varrho(t-\frac{R}{c},\vec{x}')}{R} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec{j}(t-\frac{R}{c},\vec{x}')}{R}\right]$$

derivace podle $\vec{x}$

$$\vec{\nabla}R = \frac{\vec{R}}{R} = \vec{e} \qquad \vec{\nabla}(t-\frac{R}{c}) = -\frac{1}{c}\vec{e}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV'\left[-\frac{1}{c}\frac{\partial\varrho}{\partial t}(t-\frac{R}{c},\vec{x}')\frac{\vec{e}}{R} - \varrho(t-\frac{R}{c},\vec{x}')\frac{\vec{e}}{R^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}(t-\frac{R}{c},\vec{x}')\frac{1}{R}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV'\left[\varrho(t-\frac{R}{c},\vec{x}')\frac{\vec{e}}{R^2} + \frac{\partial\varrho}{\partial t}(t-\frac{R}{c},\vec{x}')\frac{\vec{e}}{cR} - \frac{\partial\vec{j}}{\partial t}(t-\frac{R}{c},\vec{x}')\frac{1}{c^2R}\right]$$

coulombický člen — zářivé členy závislé na proměnných zdrojích

$$\vec{B}(t,\vec{x}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int dV'\,\vec{\nabla}\times\frac{\vec{j}(t-\frac{R}{c},\vec{x}')}{R} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int dV'\left[\left(\vec{\nabla}\frac{1}{R}\right)\times\vec{j}(t-\frac{R}{c},\vec{x}') - \frac{1}{R}\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}(t-\frac{R}{c},\vec{x}')\times\vec{\nabla}(t-\frac{R}{c})\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int dV'\left[\vec{j}(t-\frac{R}{c},\vec{x}')\times\frac{\vec{e}}{R^2} + \frac{\partial\vec{j}}{\partial t}(t-\frac{R}{c},\vec{x}')\times\frac{\vec{e}}{cR}\right]$$

Biot-Savart — zářivý člen

Liénardovy-Wiechertovy potenciály

potenciál bodového náboje o světočáře $X_{\tilde{c}}(\tau)$

hustota proudu

$$j^\mu(X) = \int q\, u^\mu(\tau)\, \delta(X|X_{\tilde{c}}(\tau))\, c\, d\tau$$

$x^\mu_{\tilde{c}}(\tau)$ souřadnice světočáry $X_{\tilde{c}}(\tau)$

$u^\mu(\tau) = \frac{dx^\mu_{\tilde{c}}}{d\tau}(\tau)$ 4-rychlost náboje

$\delta(X|X')$ normované na 4-objem $d^4\Omega = c\,dt\,dV$

retardované řešení

$$A^\mu(X) = \int G_{ret}(X|X')\, \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\, j^\mu(X')\, d^4\Omega' =$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \iint \Theta(\Delta t)\, \delta\big((X-X')^2\big)\, c\, q\, u^\mu(\tau)\, \delta(X|X_{\tilde{c}}(\tau))\, d\tau\, d^4\Omega'$$

$$= \frac{qc}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \int \Theta(\Delta t)\, \delta\Big(\underbrace{(X-X_{\tilde{c}}(\tau))^2}\Big)\, u^\mu(\tau)\, d\tau$$

$$\delta(f(\tau)) = \sum_{\tau_0} \frac{1}{|f'(\tau_0)|}\, \delta(\tau-\tau_0)$$

$$f(\tau) = (x^\alpha - x^\alpha_{\tilde{c}}(\tau))\, \eta_{\alpha\beta}\, (x^\beta - x^\beta_{\tilde{c}}(\tau))$$

$$\frac{df}{d\tau}(\tau) = -2\, (x^\alpha - x^\alpha_{\tilde{c}}(\tau))\, \eta_{\alpha\beta}\, u^\beta(\tau) = 2c\, r_0$$

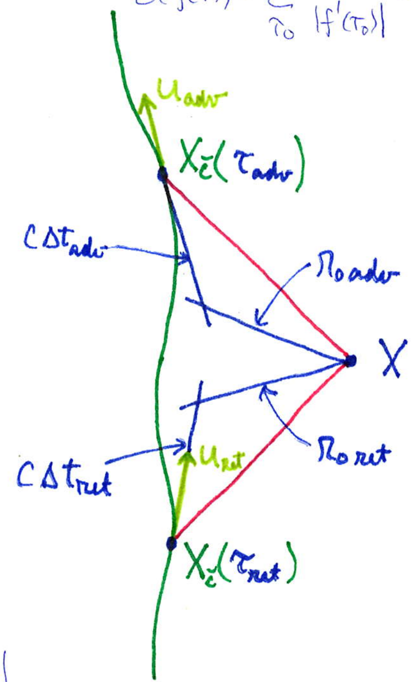
řešení $(X-X_{\tilde{c}}(\tau))^2 = 0$ pro $\tau = \tau_{ret}$ a τ_{adv}

$\Theta(\Delta t)$ připustí pouze $\tau = \tau_{ret}$

označíme $r_0(\tau) = -\frac{1}{c}\,(x^\alpha - x^\alpha_{\tilde{c}}(\tau))\, u_\alpha(\tau)$

$$= \frac{qc}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \int \Theta(\Delta t)\, \frac{1}{\left|\frac{df}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_{ret}}}\, \delta(\tau-\tau_{ret})\, u^\mu(\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\, \frac{u^\mu}{r_0}\bigg|_{\tau_{ret}}$$



platí

$$r_0 = -\frac{1}{c} u_\alpha (x^\alpha - x^\alpha_{\tilde{c}}(\tau_{ret})) = -\left[-\gamma, \gamma\frac{\vec{v}}{c}\right] \cdot \begin{bmatrix} \Delta t\, c \\ \vec{r} \end{bmatrix}\Bigg|_{\tau_{ret}} = \gamma\, r \left(1 - \frac{\vec{e}\cdot\vec{v}}{c}\right)\bigg|_{\tau_{ret}}$$

protože díky $(X - X_{\tilde{c}}(\tau_{ret}))^2 = 0$ máme

$$c\,\Delta t\big|_{\tau_{ret}} = r\big|_{\tau_{ret}}$$

rozštěpení na skalární a vektorový potenciál

$$\phi(t,\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, \frac{1}{r\left(1-\frac{\vec{e}\cdot\vec{v}}{c}\right)}\bigg|_{\tau_{ret}}$$

$$\vec{A}(t,\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\, \frac{\vec{v}}{r\left(1-\frac{\vec{e}\cdot\vec{v}}{c}\right)}\bigg|_{\tau_{ret}}$$

Pole bodového náboje

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

potíž s derivací výrazů vyčíslených v retardovaném čase

budeme rozumět, že poloha, rychlost, ... jsou parametrizované souřadnicovým časem ve zvolené soust.

retardovaný čas je dán podmínkou

$$(X - X_{č}(t_{ret}))^2 = 0 \qquad t_{ret} < t$$

$$\Updownarrow \quad c(t - t_{ret}) = |\vec{x} - \vec{x}_{č}(t_{ret})| = R_{ret}$$

t_{ret} chápeme jako funkci $t_{ret}(t, \vec{x})$

derivací definiční rovnice dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow \quad 1 - \frac{\partial t_{ret}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{1}{R_{ret}}\vec{R}_{ret}\cdot\underbrace{\frac{d\vec{x}_{č}}{dt}(t_{ret})}_{\vec{v}_{ret}}\frac{\partial t_{ret}}{\partial t} \qquad \text{kde } \vec{R}(t) = \vec{x} - \vec{x}_{č}(t), \quad \vec{e}(t) = \frac{\vec{R}(t)}{R(t)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial t_{ret}}{\partial t} = \left(1 - \frac{\vec{e}_{ret}\cdot\vec{v}_{ret}}{c}\right)^{-1}$$

$$\vec{\nabla} \Rightarrow \quad -\vec{\nabla}(ct_{ret}) = \frac{1}{R_{ret}}\left(\vec{\nabla}(\vec{x} - \vec{x}_{č}(t_{ret}))\right)\cdot\vec{R}_{ret} = \frac{1}{R_{ret}}\left(\vec{R}_{ret} - \vec{R}_{ret}\cdot\frac{d\vec{x}_{č}}{dt}(t_{ret})\,\vec{\nabla}t_{ret}\right)$$

$$= \vec{e}_{ret} - \frac{\vec{e}_{ret}\cdot\vec{v}_{ret}}{c}\vec{\nabla}(ct_{ret})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}(ct_{ret}) = -\frac{\vec{e}_{ret}}{1 - \frac{\vec{e}_{ret}\cdot\vec{v}_{ret}}{c}}$$

s použitím těchto vztahů netriviální výpočet vede k

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{e}_{ret}\cdot\vec{v}_{ret}}{c}\right)^3}\left[\frac{\vec{e}_{ret} - \frac{\vec{v}_{ret}}{c}}{\gamma_{ret}^2 R_{ret}^2} + \frac{\vec{e}_{ret}\times\left(\left(\vec{e}_{ret} - \frac{\vec{v}_{ret}}{c}\right)\times\vec{a}_{ret}\right)}{c^2 R_{ret}}\right]$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{e}_{ret}\times\vec{E}$$

kde $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ je 3-zrychlení a $\gamma_{ret}^{-2} = \left(1 - \frac{v_{ret}^2}{c^2}\right)$

vztah pro $\vec{E}$ je ekvivalentní Feynmanovu vzorci

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\underbrace{\frac{\vec{e}_{ret}}{R_{ret}^2}}_{\text{coulombický člen v retardovaném čase}} + \underbrace{\frac{R_{ret}}{c}\frac{d}{dt}\frac{\vec{e}_{ret}}{R_{ret}^2}}_{\text{„oprava" coulombického členu na rovnoměrný pohyb náboje}} + \underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\vec{e}_{ret}}_{\text{zářivý člen}}\right]$$

dokázat ekvivalenci Feynmanova vzorce je obtížné!

$t_{ret}(t,\vec{x})$ $\qquad ct - ct_r = r_r \qquad \vec{r}_r = \vec{x} - \vec{x}_e(t_r)$

$$\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}} \qquad \vec{\nabla} c t_r = -\frac{\vec{e}_r}{1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}} \qquad \vec{\nabla} r_r = \frac{\vec{e}_r}{1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}} \qquad \frac{\partial r_r}{\partial t} = -\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}}$$

$$\vec{\nabla}\vec{r}_r = \vec{\nabla}(\vec{x}-\vec{x}_e(t_r)) = \overleftrightarrow{I} - (\vec{\nabla}ct_r)\frac{\vec{v}_r}{c} = \overleftrightarrow{I} + \frac{\vec{e}_r}{1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}}\frac{\vec{v}_r}{c}$$

$$\vec{\nabla}\vec{v}_r = (\vec{\nabla}t_r)\vec{a}_r = -\frac{1}{c}\frac{\vec{e}_r\vec{a}_r}{1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}}$$

$$\frac{1}{c}\vec{\nabla}(\vec{r}_r\cdot\vec{v}_r) = (\vec{\nabla}\vec{r}_r)\cdot\frac{\vec{v}_r}{c} + \frac{1}{c}(\vec{\nabla}\vec{v}_r)\cdot\vec{r}_r =$$

$$= \left(\frac{\vec{v}_r}{c} + \frac{v_r^2}{c^2}\frac{\vec{e}_r}{1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}} - \frac{r_r}{c^2}\frac{\vec{e}_r\,\vec{a}_r\cdot\vec{e}_r}{1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}}\right) =$$

$$\vec{\nabla}\left(r_r - \frac{\vec{r}_r\cdot\vec{v}_r}{c}\right) = \frac{1}{1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}}\left[\vec{e}_r\left(1-\frac{v_r^2}{c^2}\right) - \left(1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}\right)\frac{\vec{v}_r}{c} + \frac{r_r}{c^2}\vec{a}_r\cdot\vec{e}_r\,\vec{e}_r\right]$$

$$\frac{\partial\vec{r}_r}{\partial t} = -\vec{v}_r\frac{\partial t_r}{\partial t} = -\frac{\vec{v}_r}{1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}}$$

$$\frac{\partial\vec{v}_r}{\partial t} = \vec{a}_r\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{\vec{a}_r}{1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec{r}_r\cdot\vec{v}_r}{c} = \frac{\partial\vec{r}_r}{\partial t}\cdot\frac{\vec{v}_r}{c} + \frac{\partial\vec{v}_r}{\partial t}\cdot\frac{\vec{r}_r}{c} =$$

$$= -\frac{v_r^2}{c^2}\frac{c}{1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}} + \frac{r_r}{c}\frac{\vec{a}_r\cdot\vec{e}_r}{1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(r_r - \frac{\vec{r}_r\cdot\vec{v}_r}{c}\right) = -\frac{\vec{v}_r\cdot\vec{e}_r}{1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}} + \frac{v_r^2}{c^2}\frac{c}{1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}} - \frac{r_r}{c}\frac{\vec{a}_r\cdot\vec{e}_r}{1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}}$$

$$= \frac{c}{1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}}\left[-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c} + \frac{v_r^2}{c^2} - \frac{r_r}{c^2}\vec{a}_r\cdot\vec{e}_r\right]$$

$$\vec{\nabla} r_r = \vec{\nabla}(ct - ct_r) = -\vec{\nabla}ct_r = \frac{\vec{e}_r}{1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}r_r = \frac{\partial}{\partial t}(ct - ct_r) = c - c\frac{\partial t_r}{\partial t} = c\left(1-\frac{1}{1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}}\right) = -\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$$

$$\frac{4\pi\varepsilon_0}{q}\vec{E} = -\vec{\nabla}\frac{1}{r_r - \frac{\vec{r}_r\cdot\vec{v}_r}{c}} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec{v}_r/c}{r_r - \frac{\vec{r}_r\cdot\vec{v}_r}{c}} =$$

$$= \frac{1}{r_r^2}\frac{1}{\left(1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}\right)^2}\vec{\nabla}\left(r_r - \frac{\vec{r}_r\cdot\vec{v}_r}{c}\right) + \frac{1}{r_r^2}\frac{1}{\left(1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}\right)^2}\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(r_r - \frac{\vec{r}_r\cdot\vec{v}_r}{c}\right)\right)\frac{\vec{v}_r}{c} - \frac{1}{r_r}\frac{1}{\left(1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}\right)}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec{v}_r}{c}$$

$$= \frac{1}{r_r^2}\frac{1}{\left(1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}\right)^3}\Bigg[\vec{e}_r\left(1-\frac{v_r^2}{c^2}\right) - \left(1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}\right)\frac{\vec{v}_r}{c} + \frac{r_r}{c^2}\vec{a}_r\cdot\vec{e}_r\,\vec{e}_r - \frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}\frac{\vec{v}_r}{c} + \frac{v_r^2}{c^2}\frac{\vec{v}_r}{c}$$
$$- \frac{r_r}{c^2}\vec{a}_r\cdot\vec{e}_r\frac{\vec{v}_r}{c} - \frac{r_r}{c^2}\left(1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}\right)\vec{a}_r\Bigg]$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}\right)^3}\Bigg[\frac{1}{r_r^2}\left(\vec{e}_r - \frac{\vec{v}_r}{c}\right)\left(1-\frac{v_r^2}{c^2}\right)$$
$$+ \frac{1}{c^2}\frac{1}{r_r}\left(\left(\vec{e}_r - \frac{\vec{v}_r}{c}\right)\vec{e}_r\cdot\vec{a}_r - \vec{a}_r\,\vec{e}_r\cdot\left(\vec{e}_r - \frac{\vec{v}_r}{c}\right)\right)\Bigg]$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{\vec{e}_r\cdot\vec{v}_r}{c}\right)^3}\Bigg[\frac{1}{r_r^2\gamma_r^2}\left(\vec{e}_r - \frac{\vec{v}_r}{c}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{1}{r_r}\vec{e}_r\times\left(\left(\vec{e}_r - \frac{\vec{v}_r}{c}\right)\times\vec{a}_r\right)\Bigg]$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\frac{4\pi\varepsilon_0}{q}\,\vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{\nabla} \times \frac{\vec{v}_r}{r_r - \frac{\vec{r}_r \cdot \vec{v}_r}{c}} =$$

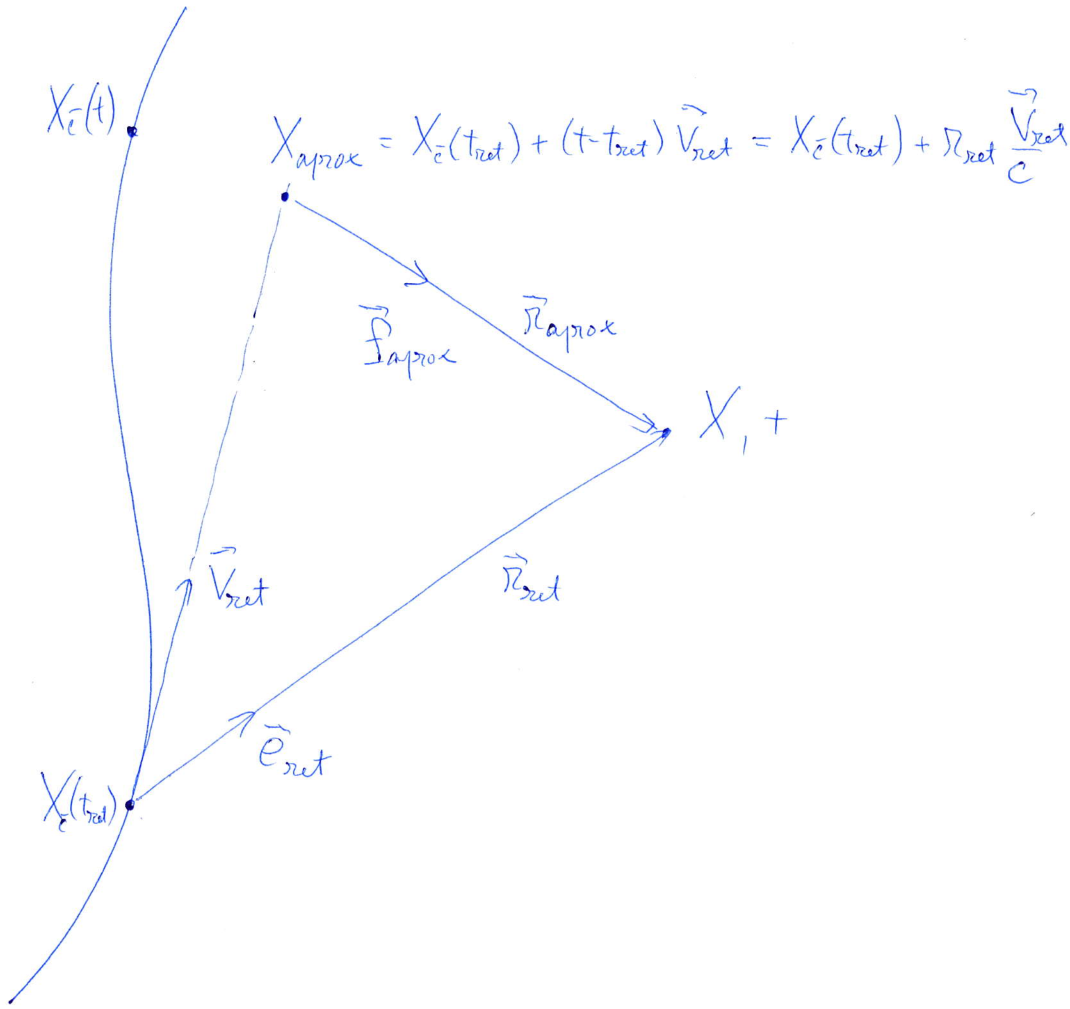
$$= \frac{1}{c}\left(\vec{\nabla}\frac{1}{r_r - \frac{\vec{r}_r \cdot \vec{v}_r}{c}}\right) \times \frac{\vec{v}_r}{c} + \frac{1}{c}\,\frac{1}{r_r - \frac{\vec{r}_r \cdot \vec{v}_r}{c}}\,\vec{\nabla} \times \frac{\vec{v}_r}{c} =$$

$$= -\frac{1}{c\,r_r^2\left(1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{v}_r}{c}\right)^2}\left(\vec{\nabla}\left(r_r - \frac{\vec{r}_r \cdot \vec{v}_r}{c}\right)\right) \times \frac{\vec{v}_r}{c} - \frac{1}{c\,r_r\left(1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{v}_r}{c}\right)^2}\,\frac{1}{c^2}\,\vec{e}_r \times \vec{a}_r$$

$$= -\frac{1}{c\,r_r^2\left(1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{v}_r}{c}\right)^3}\left[\left(1 - \frac{v_r^2}{c^2}\right)\vec{e}_r \times \frac{\vec{v}_r}{c} + \frac{r_r}{c^2}\,\vec{a}_r \cdot \vec{e}_r\;\vec{e}_r \times \frac{\vec{v}_r}{c} + \frac{r_r}{c^2}\left(1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{v}_r}{c}\right)\vec{e}_r \times \vec{a}_r\right]$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{v}_r}{c}\right)^3}\,\frac{1}{c}\,\vec{e}_r \times \left[\frac{1}{r_r^2}\left(\underset{\substack{\uparrow \\ \vec{e}_r}}{} - \frac{\vec{v}_r}{c}\right)\left(1 - \frac{v_r^2}{c^2}\right) + \frac{1}{c^2}\,\frac{1}{r_r}\left(\left(\underset{\substack{\uparrow \\ \vec{e}_r}}{} - \frac{\vec{v}_r}{c}\right)\vec{e}_r \cdot \vec{a}_r - \vec{a}_r\,\vec{e}_r \cdot \left(\vec{e}_r - \frac{\vec{v}_r}{c}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{c}\,\vec{e}_r \times \frac{4\pi\varepsilon_0}{q}\vec{E}$$



$$X_{aprox} = X_i(t_{ret}) + (t - t_{ret})\vec{v}_{ret} = X_i(t_{ret}) + r_{ret}\frac{\vec{v}_{ret}}{c}$$

$$\vec{r}_{aprox} = X - X_{aprox} = \vec{r}_{ret} - r_{ret}\frac{\vec{v}_{ret}}{c}$$

$$\vec{f}_{aprox} = \frac{\vec{r}_{aprox}}{r_{ret}} = \vec{e}_{ret} - \frac{\vec{v}_{ret}}{c}$$

Elektrodynamika bez zdrojů

Maxwellovy rovnice bez zdrojů

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ $\qquad$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}$

$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$ $\qquad$ $\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0$

lineární (princip superpozice)

symetrie (dualita) $\quad \vec{E}\to c\vec{B} \quad c\vec{B}\to -\vec{E}$

vlnové rovnice

$$0 = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \underbrace{-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \Delta\vec{E}}_{\Box\vec{E}} - \vec{\nabla}\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}_{0} = \Box\vec{E}$$

$\Downarrow$

$\Box\vec{E} = 0$

$$0 = \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} + \vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} + c^2\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \underbrace{\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} - c^2\Delta\vec{B}}_{-\Box\vec{B}} + c^2\vec{\nabla}\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}}_{0} = -c^2\Box\vec{B}$$

$\Downarrow$

$\Box\vec{B} = 0$

vlnové rovnice pro $\vec{E}$ a $\vec{B}$ jsou důsledkem Maxwellových rov.
ale ne dostatečnou podmínkou pro jejich splnění
nutno dosadit řešení vlnových rovnic zpět do Maxwellových rov.

vlnový operátor (d'Alembertův operátor)

$$\Box \equiv \left[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right] = \eta^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$$

v Minkowského prostoročase lze řešit pro každou inerciální složku (čas + kartézskou) zvlášť

Transverzální vlny šířící se jedním směrem

zkoumejme šíření pouze v jednom směru (globálně konstantním)

$\vec{e}_{\parallel} = \text{konst}$ směr šíření

souřadnice v tomto směru

$$r_{\parallel} = \vec{e}_{\parallel} \cdot \vec{r}$$

uvažujme závislost $\vec{E}$ a $\vec{B}$ pouze na kombinaci $\varphi = k r_{\parallel} - \omega t$

$$\vec{E} = \vec{E}(t, r_{\parallel}) = \vec{E}(k r_{\parallel} - \omega t)$$

jako důsledek máme

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \vec{k}\,\vec{E}' \qquad \frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = -\omega \vec{E}'$$

kde $\vec{E}'$ je derivace $\vec{E}(\varphi)$ podle jediného argumentu $\vec{E}' = \frac{d\vec{E}}{d\varphi}(\varphi)$

vlnová rovnice

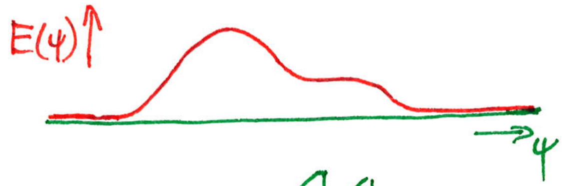
$$\Box \vec{E} = \left[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right]\vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}'' + k^2 \vec{E}'' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\omega^2}{c^2} = k^2 \qquad \text{tj.} \quad \omega = ck$$

(volíme stejné znaménko ω a k
opačné znaménko lze získat změnou
orientace $\vec{e}_{\parallel} \to -\vec{e}_{\parallel}$)

profilová funkce

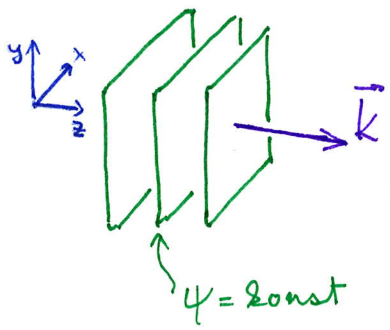
$\vec{E}(\dots)$



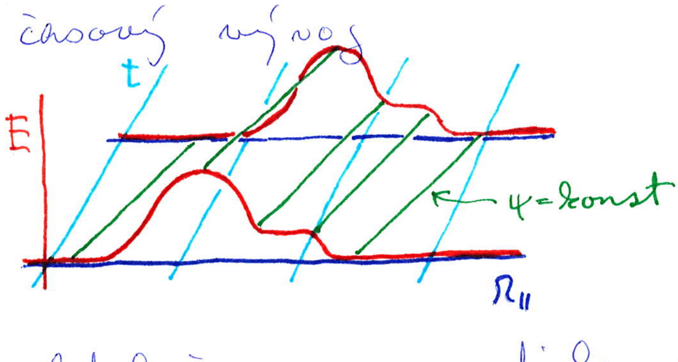
fáze

$$\varphi = k r_{\parallel} - \omega t = \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t \qquad \vec{k} = k\vec{e}_{\parallel}$$

plochy konst. φ = roviny kolmé na $\vec{e}_{\parallel}$



časový vývoj



obdobně pro magnetickou indukci

$$\vec{B} = \vec{B}(k r_{\parallel} - \omega t) = \vec{B}(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

dosazení zpět do Maxwellových rovnic

$$\vec\nabla\cdot\vec E = 0 \Rightarrow \vec k\cdot\vec E' = 0 \Rightarrow \vec k\cdot\vec E = 0$$

ignorujeme-li triviální konstantní pole

$$\vec\nabla\cdot\vec B = 0 \Rightarrow \vec k\cdot\vec B' = 0 \Rightarrow \vec k\cdot\vec B = 0$$

pole je transverzální - kolmé na směr šíření

$$\vec E, \vec B \perp \vec k$$

druhý pár Maxwellových rovnic

$$\vec\nabla\times\vec E + \frac{\partial\vec B}{\partial t} = 0 \Rightarrow c\vec k\times\vec E' - \omega c\vec B' = 0 \Rightarrow c\vec B = \vec e_{\parallel}\times\vec E$$

$$\vec\nabla\times\vec B - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec E}{\partial t} = 0 \Rightarrow c\vec k\times c\vec B' + \omega\vec E' = 0 \Rightarrow \vec E = -\vec e_{\parallel}\times c\vec B$$

pole má nulové invarianty

$$\vec E\cdot c\vec B = 0 \Rightarrow \tilde{\mathcal{L}} = 0$$

$$E = cB \Rightarrow \mathcal{L} = 0$$

transverzalita souvisí s jednodimenzionálním charakterem šíření - vlna není lokalizovaná ve směrech kolmých na šíření

pro obecnou lokalizovanou vlnu nebude jednoznačný směr šíření a charakter vlny nebude čistě transverzální

hustota energie a tok energie

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}B^2 = \varepsilon_0 E^2$$

stejné příspěvky

$$\vec S = \varepsilon_0 c^2\,\vec E\times\vec B = \varepsilon_0 c\,\vec E\times(\vec e_{\parallel}\times\vec E) = \varepsilon_0 E^2 c\vec e_{\parallel} = u\,c\vec e_{\parallel}$$

odpovídá šíření energie ve směru $\vec e_{\parallel}$ rychlostí c

Monochromatické rovinné vlna

rozklad profilové funkce do Fourierovských módů
tj. volba systému funkcí

$$\vec{E}(\varphi) = \quad \vec{E}_0 \cos\varphi \;,\; \vec{E}_0 \sin\varphi$$

lze sjednotit užitím komplexní báze
skutečné pole je pak dáno reálnou částí komplexního řešení
fungují bez problémů pro operace lineární v poli
speciální péči potřebují veličiny jako energie, invarianty...
komplexní báze - "harmonické" závislost na fázi

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\,\vec{\mathcal{E}} \qquad\qquad \vec{B} = \mathrm{Re}\,\vec{\mathcal{B}}$$

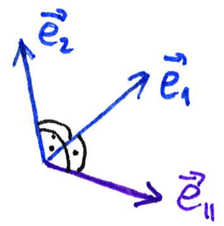
$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t) \qquad \vec{\mathcal{B}} = \vec{\mathcal{B}}_0 \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t)$$

$\vec{\mathcal{E}}_0, \vec{\mathcal{B}}_0$ jsou komplexní konstanty splňující

$$\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{E}}_0 = \vec{k}\cdot c\vec{\mathcal{B}}_0 = 0$$

$$c\vec{\mathcal{B}}_0 = \vec{e}_u \times \vec{\mathcal{E}}_0 \qquad \vec{\mathcal{E}}_0 = -\vec{e}_u \times c\vec{\mathcal{B}}_0$$

polarizace



zvolme dva konstantní směry $\vec e_1, \vec e_2$ kolmé na $\vec e_\parallel$ tak, že $\vec e_\parallel, \vec e_1, \vec e_2$ tvoří positivně orientovanou ortonormální bázi

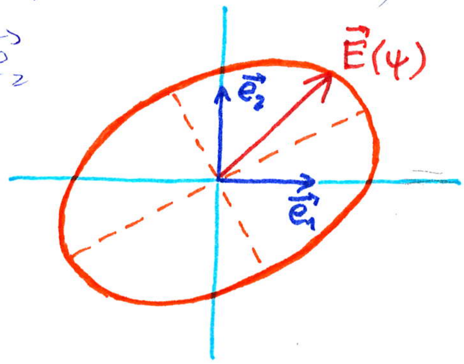
konstantu $\vec{\mathcal{E}}_0$ lze rozložit do komplexních komponent

$$\vec{\mathcal{E}}_0 = E_1 \exp(i\delta_1)\, \vec e_1 + E_2 \exp(i\delta_2)\, \vec e_2 \qquad E_1, E_2, \delta_1, \delta_2 \text{ reálné}$$

pro reálné pole dostáváme

$$\vec E = \mathrm{Re}\left(E_1 \exp(i\vec k\cdot\vec x - i\omega t + i\delta_1)\, \vec e_1 + E_2 \exp(i\vec k\cdot\vec x - i\omega t + i\delta_2)\, \vec e_2 \right)$$

$$= E_1 \cos(\varphi + \delta_1)\, \vec e_1 + E_2 \cos(\varphi + \delta_2)\, \vec e_2$$



intenzita $\vec E$ se pohybuje v závislosti na fázi φ po elipse

→ obecná eliptická polarizace

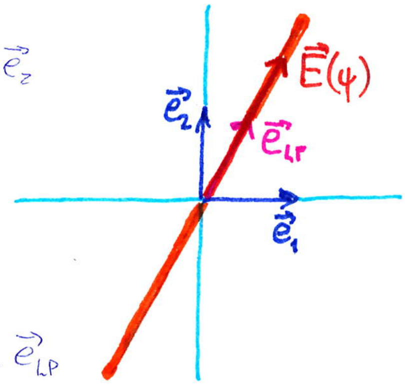
speciální případy:

- lineární polarizace

$\delta_1 = \delta_2 \to \delta_0$ zavedeme $E\vec e_{LP} = E_1 \vec e_1 + E_2 \vec e_2$

$$\Downarrow \quad \vec E = E\cos(\varphi + \delta_0)\, \vec e_{LP}$$

$$c\vec B = E\cos(\varphi + \delta_0)\, \vec e_\parallel \times \vec e_{LP}$$



intenzita $\vec E$ se pohybuje v závislosti na fázi φ harmonicky po úsečce ve směru $\vec e_{LP}$

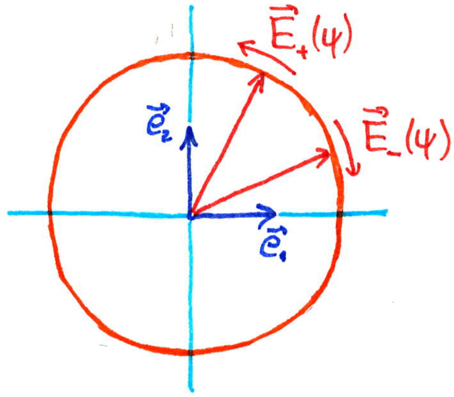
obecná eliptická polarizace lze chápat jako superpozice dvou lineárních polarizací ve směrech $\vec e_1$ a $\vec e_2$ s posunutou fází o $\delta = \delta_2 - \delta_1$

- kruhová polarizace

$\delta_1 = \delta_0 \quad \delta_2 = \delta_0 \mp \frac{\pi}{2} \qquad E_1 = E_2 = E$

$$\Downarrow \quad \vec E_\pm = E\left(\cos(\varphi+\delta_0)\, \vec e_1 \pm \sin(\varphi + \delta_0)\, \vec e_2\right)$$

$$c\vec B_\pm = E\left(\mp \sin(\varphi+\delta_0)\, \vec e_1 + \cos(\varphi+\delta_0)\, \vec e_2\right)$$



intenzita $\vec E$ se pohybuje v závislosti na fázi φ rovnoměrně po kružnici

obecná eliptická polarizace lze rozložit na superposici kruhových polarizací $\vec E_+$ a $\vec E_-$

Sférické vlny

Coulombická kalibrace $\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$

bez zdrojů $\Rightarrow \varrho = 0 \Rightarrow \Delta\phi = 0 \Rightarrow \phi = 0$

elektrické i magnetické pole je dáno vektorovým pot. $\vec{A}$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

rovnice pro potenciál (viz diskuze Coulombické kalibrace)

$$\Box \vec{A} = 0$$

převedeme na řešení skalární vlnové rovnice

Debyeův potenciál ψ

$$\vec{A} = \vec{\mathbb{L}}\,\psi$$

$$\vec{\mathbb{L}} = -i\,\vec{r}\times\vec{\nabla}$$ (v kvantové mech. operátor momentu hybnosti)

vlastnosti operátoru $\vec{\mathbb{L}}$

$\vec{r}\cdot\vec{\mathbb{L}} = 0$ generuje "transverzální" vektory

$\vec{\mathbb{L}}\, r = 0$ operátor v úhlových proměnných ϑ, φ

$\vec{\mathbb{L}}\cdot\vec{\mathbb{L}} = \mathbb{L}^2 \equiv \Delta_{S^2} = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$

$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\mathbb{L}^2$ $\quad \mathbb{L}^2$ je úhlová část Laplaceova oper. Δ

$\vec{\mathbb{L}}\,\Delta = \Delta\,\vec{\mathbb{L}}$ komutace s Δ

$\vec{\mathbb{L}}\,\Box = \Box\,\vec{\mathbb{L}}$ komutace s $\Box = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta$

$\vec{e}_z\cdot\vec{\mathbb{L}} = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}$ z-složka je derivace v úhlu φ

$\vec{\mathbb{L}}\times\vec{\mathbb{L}} = i\,\vec{\mathbb{L}}$

$[\vec{a}\cdot\vec{\mathbb{L}}, \vec{b}\cdot\vec{\mathbb{L}}] = i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\mathbb{L}}$ vztahy důležité pro kvantovou mechaniku

ansatz pro vektorový potenciál

$$\vec{A} = \vec{\mathbb{L}}\,\psi \qquad \Box\vec{A} = \Box\vec{\mathbb{L}}\,\psi = \vec{\mathbb{L}}\,\Box\psi$$

rovnice pro Debyeův potenciál

$$\Box\psi = 0 \quad\Rightarrow\quad \Box\vec{A} = 0$$

řešení skalární vlnové rovnice pro Debyeův potenciál ψ indukuje řešení vektorové vlnové rovnice pro $\vec{A}$

TE - pole

pro elektrickou intenzitu a magnetickou indukci dostáváme

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathbb{L}}\,\psi^{TE} \qquad \Box \psi^{TE} = 0$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{\mathbb{L}}\,\psi^{TE}$$

platí

$\vec{r}\cdot\vec{E} = 0$ tzv. transverzální elektrické (TE) pole

$$\vec{r}\cdot\vec{B} = \vec{r}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{\mathbb{L}}\,\psi^{TE} = \vec{r}\times\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbb{L}}\,\psi^{TE} = i\,\vec{\mathbb{L}}\cdot\vec{\mathbb{L}}\,\psi^{TE} = i\,\mathbb{L}^2\psi^{TE}$$

TM - pole

pro EM pole bez zdrojů máme symetrii $\vec{E}\to -c\vec{B}$ $\vec{B}\to\vec{E}$
mohli bychom zavést duální vektorový potenciál a jeho Debyeův potenciál ψ^{TM}

pro elektrickou intenzitu a magnetickou indukci dostaneme

$$\frac{1}{c}\vec{E} = \vec{\nabla}\times\vec{\mathbb{L}}\,\psi^{TM} \qquad \Box \psi^{TM} = 0$$

$$c\vec{B} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathbb{L}}\,\psi^{TM}$$

platí

$\vec{r}\cdot\vec{B} = 0$ tzv. transverzální magnetické (TM) pole

$$\vec{r}\cdot\vec{E} = ic\,\mathbb{L}^2\psi^{TM}$$

Řešení skalární vlnové rovnice

$$\Box \psi = 0$$

separace proměnných ve sférických souřadnicích

$$\psi = R(r)\, Y(\vartheta, \varphi)\, \mathcal{E}(t) \qquad \text{viz separace pro } \Delta$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{\psi}\Box\psi = -\frac{1}{c^2}\underbrace{\frac{1}{\mathcal{E}}\frac{d^2\mathcal{E}}{dt^2}}_{-\omega^2} + \frac{1}{r^2}\frac{1}{R}\frac{d}{dr}r^2\frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2}\underbrace{\frac{1}{Y}\mathbb{L}^2 Y}_{-l(l+1)} = 0$$

$\frac{d^2\mathcal{E}}{dt^2} + \omega^2\mathcal{E} = 0$ zvolíme řešení $\exp(-i\omega t)$ a označíme $k = \frac{\omega}{c}$

$-\mathbb{L}^2 Y = l(l+1)Y$ řeší sférické harmoniky Y_l^m

$\Downarrow$

pro radiální závislost

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R = 0$$

řeší tzv. sférické Besselovy funkce

$$R_{kl}(r) = \begin{cases} j_l(kr) = \left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(kr) & j_l(\xi) = (-\xi)^l\left[\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\right]^l\frac{\sin\xi}{\xi} \approx \frac{\xi^l}{(2l+1)!!} \quad \text{pro } \xi \ll 1 \\ n_l(kr) = \left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{\frac{1}{2}} N_{l+\frac{1}{2}}(kr) & n_l(\xi) = -(-\xi)^l\left[\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\right]^l\frac{\cos\xi}{\xi} \approx -\frac{(2l-1)!!}{\xi^{l+1}} \quad \text{pro } \xi \ll 1 \end{cases}$$

souvislost s Besselovými funkcemi

substituce $R = \frac{f}{\sqrt{r}}$ vede na Besselovu rovnici

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + k^2 - \frac{(l+\frac{1}{2})^2}{r^2}\right]f = 0$$

kterou řeší Besselovy funkce J_ν a N_ν

řešení $j_l(kr)$ a $n_l(kr)$ se liší chováním v počátku a asymptotickým chováním

R_{kl} se musí zvolit ve shodě s chováním hledaného pole v počátku či v nekonečnu

systém funkcí řešících skalární vlnovou rovnici

$$\psi_{klm} = R_{kl}(r)\, Y_l^m(\vartheta, \varphi)\exp(-i\omega t)$$

$$\omega = ck \in \mathbb{R}^+ \qquad l = 0, 1, 2, \dots \qquad m = -l, \dots, l$$

Řešení vektorové vlnové rovnice

$$\Box \vec{A} = 0 \quad \Leftarrow \quad \vec{A} = \vec{\mathbb{L}}\psi \quad \Box\psi = 0$$

systém funkcí

$$\vec{A}^{TE}_{k\ell m} = \vec{\mathbb{L}}\,\psi^{TE}_{k\ell m}$$

$$\vec{A}^{TM}_{k\ell m} = \vec{\mathbb{L}}\,\psi^{TM}_{k\ell m}$$

$\psi^{TE}_{k\ell m}$ a $\psi^{TM}_{k\ell m}$ se mohou lišit volbou okrajových podmínek pro $R^{TE}_{k\ell}$ a $R^{TM}_{k\ell}$

pro EM pole dostáváme rozklad (při fixovaném ω)

$$\frac{1}{c}\vec{E} = \sum_{\ell m}\left(-a^{TE}_{k\ell m}\overbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}}^{-ik}\vec{\mathbb{L}}\,\psi^{TE}_{k\ell m} + a^{TM}_{k\ell m}\vec{\nabla}\times\vec{\mathbb{L}}\,\psi^{TM}_{k\ell m}\right)$$

$$\vec{B} = \sum_{\ell m}\left(a^{TE}_{k\ell m}\vec{\nabla}\times\vec{\mathbb{L}}\,\psi^{TE}_{k\ell m} + a^{TM}_{k\ell m}\underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}}_{-ik}\vec{\mathbb{L}}\,\psi^{TM}_{k\ell m}\right)$$

koeficienty $a^{TE}_{k\ell m}$, $a^{TM}_{k\ell m}$ lze získat z radiální komponenty polí

$$\frac{1}{c}\vec{r}\cdot\vec{E} = \sum_{\ell m} a^{TM}_{k\ell m}\, i\mathbb{L}^2 R^{TM}_{k\ell} Y^m_\ell e^{-i\omega t} = -i\sum_{\ell m}\ell(\ell+1)\,a^{TM}_{k\ell m} R^{TM}_{k\ell} Y^m_\ell e^{-i\omega t}$$

$$\vec{r}\cdot\vec{B} = \sum_{\ell m} a^{TE}_{k\ell m}\, i\mathbb{L}^2 R^{TE}_{k\ell} Y^m_\ell e^{-i\omega t} = -i\sum_{\ell m}\ell(\ell+1)\,a^{TE}_{k\ell m} R^{TE}_{k\ell} Y^m_\ell e^{-i\omega t}$$

ortonormalita

$$\int Y^m_\ell Y^{m'*}_{\ell'}\, d^2\Omega = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$$

$\Downarrow$

$$a^{TM}_{k\ell m} R^{TM}_{k\ell}(r) = \frac{i}{\ell(\ell+1)}\int \frac{1}{c}\vec{r}\cdot\vec{E}\, Y^{m*}_\ell\, d^2\Omega\, e^{i\omega t}$$

$$a^{TE}_{k\ell m} R^{TE}_{k\ell}(r) = \frac{i}{\ell(\ell+1)}\int \vec{r}\cdot\vec{B}\, Y^{m*}_\ell\, d^2\Omega\, e^{i\omega t}$$

stačí vyčíslit pro r, kde máme zadané okrajové podmínky pro pole

v těchto výrazech předpokládáme, že $\vec{E}$ a $\vec{B}$ mají harmonickou závislost na čase

$$\vec{E}, \vec{B} \propto \exp(-i\omega t)$$

tj. že se již jedná o Fourierův obraz obecných $\vec{E}$ a $\vec{B}$