Zápočtový problém č. 1

NOFY126 – Klasická elektrodynamika, LS 2023

termín odevzdání: 30. 3. 2023

Část 1

Mějme potenciál

$$\phi_{\text{uvn}} = K\Big(\frac{R^2}{A^2} + \frac{z^2}{B^2} + \gamma\Big) \, ,$$

kde (R, φ, z) jsou cylindrické souřadnice a K, A, B, γ konstanty.

1) Nalezněte, jakým nábojový rozložením je tento potenciál vytvořen. Neboli, určete nábojovou hustotu ρ.
2) Jaký tvar mají ekvipotenciály tohoto pole?

Část 2

Hledejme axiálně symetrické bezezdrojové pole ϕ a to metodou separací proměnných v oblých elipsoidálních souřadnicích (η, ψ, φ). Jelikož je pole bez zdrojů, splňuje

$$\triangle\phi = 0 \, .$$

Axiální symetrie znamená nezávislost na souřadnici φ. Uvažujte tedy pole ve tvaru

$$\phi = \mathcal{R}(\eta)\,\mathcal{P}(\psi) \, .$$

3) Nalezněte separované rovnice pro $\mathcal{R}(\eta)$ a $\mathcal{P}(\psi)$. Separační konstantu nazvěte $l(l+1)$.
4) Napište tyto rovnice v proměnných $s = \operatorname{sh}\eta$ a $u = \cos\psi$, tj., rovnice pro funkce $R(s)$ a $P(u)$, kde $\mathcal{R}(\eta) = R(\operatorname{sh}\eta)$ a $\mathcal{P}(\psi) = P(\cos\psi)$.

   Rovnice pro $P(u)$ by vám měla vyjít Legendrova rovnice. Řešení by tak měla mít tvar Legendrových polynomů diskutovaných na přednášce: $P(u) = \mathsf{P}_l(u) \equiv \mathsf{P}_l^0(u)$. Regularita na osách vyžaduje $l \in \mathbb{N}_0$.

5) Ověřte, že funkce studovaná na přednášce v kontextu vodivého elipsoidu

   $$\mathsf{q}_0(s) = \operatorname{arccot} s$$

   splňuje rovnici pro $R(s)$ s hodnotou separační konstanty $l = 0$. Pro jaké $l = l_{\text{o}}$ splňuje tuto rovnici funkce

   $$\mathsf{q}_{l_{\text{o}}}(s) = \frac{1}{2}\big(1 + 3s^2\big)\operatorname{arccot} s - \frac{3}{2}s \;?$$

   Zde funkce $\operatorname{arccot} s$ nabývá hodnot z intervalu $(0, \pi)$ a tedy $\operatorname{arccot} 0 = \frac{\pi}{2}$.

   Uvažujme nyní potenciál

   $$\phi_{\text{ven}} = K_0\,\mathsf{q}_0(\operatorname{sh}\eta)\,\mathsf{P}_0(\cos\psi) + K_{l_{\text{o}}}\,\mathsf{q}_{l_{\text{o}}}(\operatorname{sh}\eta)\,\mathsf{P}_{l_{\text{o}}}(\cos\psi) \, ,$$

   kde za l_{o} užijeme právě určenou hodnotu. Postupem výše jsme ověřili, že ϕ_{ven} splňuje Laplaceovu rovnici všude mimo disk $\eta = 0$. Na disku nejsou totiž elipsoidální souřadnice hladké. Souřadnice ψ nenavazuje na sebe spojitě z obou stran disku – na horní straně disku máme $\psi \in (0, \frac{\pi}{2})$ a na dolní straně $\psi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Na disku lze proto očekávat problematické chování pole.

6) Ověřte, že potenciál ϕ_{ven} je na disku spojitý, ale normálová složka intenzity je nespojitá. Určete plošnou nábojovou hustotu σ na disku.
7) Pro jaké K_0 a $K_{l_{\text{o}}}$ je tato hustota všude konečná (včetně okraje disku)? Vyjádřete tyto konstanty pomocí celkového náboje Q na disku.

Komentář

Diskutovaná pole lze využít při studiu pole homogenně nabitého elipsoidu, jehož hranice je dána $\eta = \eta_\mathrm{o}$. To znamená oblého rotačního elipsoidu o hlavní poloose $a \operatorname{ch} \eta_\mathrm{o}$ a vedlejší poloose $a \operatorname{sh} \eta_\mathrm{o}$. Potenciál ϕ_ven odpovídá poli vně elipsoidu, v oblasti $\eta > \eta_\mathrm{o}$, a potenciál ϕ_uvn poli uvnitř, $\eta < \eta_\mathrm{o}$. Konstanty K, A, B, γ ve výrazu pro ϕ_uvn lze zvolit tak, aby na povrchu elipsoidu na sebe spojitě navazoval jak potenciál, tak intenzita. Určení těchto konstant je přímočaré, ale výpočetně náročné. Pokud se pokusíte si je dopočítat, mělo by vám např. vyjít

$$K = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\mathrm{o} a} \,, \quad \gamma = \frac{3}{2} \operatorname{arccot} \operatorname{sh} \eta_\mathrm{o} \,.$$

Konstanty A^{-2} a B^{-2} nejsou o moc složitější než γ.

Poznamenejme ještě, že povrch elipsoidu $\eta = \eta_\mathrm{o}$ *není* ekvipotenciálou zkoumaného pole.