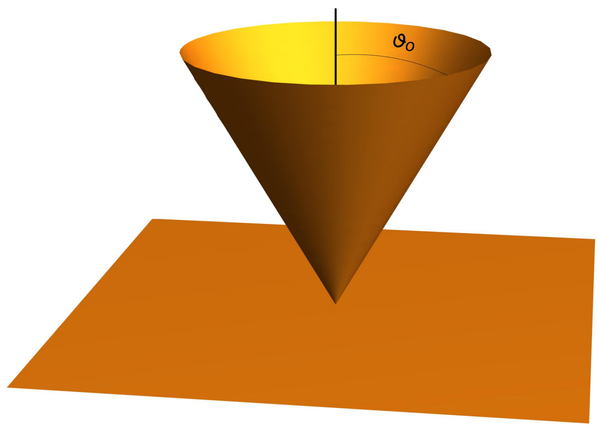
Zápočtový problém č. 2

`NOFY126` – Klasická elektrodynamika, LS 2023

vzorové řešení

Mějme vlnovod ohraničený kuželovou plochou a rovníkovou rovinou. Neboli, zajímá nás prostor popsaný ve sférických souřadnicích (r, ϑ, φ) intervalem úhlu $\vartheta \in (\vartheta_o, \frac{\pi}{2})$.



Uvnitř tohoto vlnovodu uvažujme pole $\vec{E}$ a $\vec{B}$ s harmonickým časovým průběhem mající následující tvar:

$$\vec{E} = \frac{1}{r} E(r,\vartheta)\, e^{-i\omega t}\, \vec{e}_\vartheta\,,$$
$$\vec{B} = \frac{1}{r} B(r,\vartheta)\, e^{-i\omega t}\, \vec{e}_\varphi\,.$$

Uvnitř vlnovodu neuvažujte žádné zdroje.

1) V dané oblasti rozepište explicitně všechny komponenty Maxwellových rovnic ve sférických souřadnicích.

Po zkrácení harmonického faktoru $e^{-i\omega t}$ budou dvě výsledné rovnice nadále obsahovat frekvenci ω a dvě na ω záviset nebudou.

Řešení:

S použitím známých vztahů pro vyjádření divergence a rotace vektorových polí v ortogonálních souřadnicích, konkrétně sférických, a známých Laméových koeficientů, dostáváme

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0\,, \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{1}{r}\,E\right) = 0\,, \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\, E\right) = 0$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0\,, \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{1}{r}\,B\right) = 0\,, \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\, B\right) = 0\,,$$

a

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}E - i\omega\frac{1}{r}B\right)\vec{e}_\varphi = 0\,,$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}B + i\frac{\omega}{c^2}\frac{1}{r}E\right)\vec{e}_\vartheta + \left[\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{1}{r}\,B\right)\right]\vec{e}_r = 0\,,$$

a tedy relevantní rovnice dávají

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\, E\right) = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial r}E = i\frac{\omega}{c}B\,, \tag{1}$$
$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\, B\right) = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial r}cB = i\frac{\omega}{c}E\,. \tag{2}$$

2) Zintegrujte rovnice neobsahující frekvenci.

Nezapomeňte, že integrační konstanta podle jedné proměnné může záviset na druhé proměnné.

Řešení:

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\, E\right) = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\, B\right) = 0\,,$$
$$\sin\vartheta E = \hat{E}(r)\,, \qquad \sin\vartheta B = \hat{B}(r)\,,$$
$$E(r,\vartheta) = \frac{\hat{E}(r)}{\sin\vartheta}\,, \qquad B(r,\vartheta) = \frac{\hat{B}(r)}{\sin\vartheta}$$

3) Obdržené vztahy pro E a B dosaďte do rovnic s frekvencí. Dostanete dvě závislé diferenciální rovnice. Substitucí jedné do druhé je dekaplujete. Rovnice vyřešte.

Řešení:

V prvním kroku se zbavíme úhlové závislosti, v druhém kroku obě rovnice derivujeme dle radiální souřadnice a konečne ve třetím kroku použijeme rovnice pro první derivace.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}E &= i\frac{\omega}{c}cB\,, & \frac{\partial}{\partial r}cB &= i\frac{\omega}{c}E\,,\\
\frac{\partial}{\partial r}\hat{E} &= i\frac{\omega}{c}c\hat{B}\,, & \frac{\partial}{\partial r}c\hat{B} &= i\frac{\omega}{c}\hat{E}\,,\\
\frac{\partial^2}{\partial r^2}\hat{E} &= i\frac{\omega}{c}\frac{\partial}{\partial r}c\hat{B}\,, & \frac{\partial^2}{\partial r^2}c\hat{B} &= i\frac{\omega}{c}\hat{E}\,,\\
\frac{\partial^2}{\partial r^2}\hat{E} &= -\frac{\omega^2}{c^2}\hat{E}\,, & \frac{\partial^2}{\partial r^2}c\hat{B} &= -\frac{\omega^2}{c^2}c\hat{B}\,,
\end{aligned}
$$

Vidíme, že se jedná o rovnice pro *harmonický oscilátor* s řešením

$$\hat{E}(r) = E_{\gg}e^{i\frac{\omega}{c}r} + E_{\ll}e^{-i\frac{\omega}{c}r}\,,$$

kde $E_{\gg}$ a $E_{\ll}$ jsou konstanty. Řešení pro $\hat{B}$ bude mít stejný tvar, ovšem konstanty jsou již omezené

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\hat{E}(r) &= i\frac{\omega}{c}E_{\gg}e^{i\frac{\omega}{c}r} - i\frac{\omega}{c}E_{\ll}e^{-i\frac{\omega}{c}r} = i\frac{\omega}{c}c\hat{B}\\
c\hat{B}(r) &= E_{\gg}e^{i\frac{\omega}{c}r} - E_{\ll}e^{-i\frac{\omega}{c}r}
\end{aligned}
$$

4) Napište výsledné komplexní řešení pro $\vec{E}$ a $\vec{B}$. Napište odpovídající reálné řešení pro $\vec{E}$ a $\vec{B}$.

Řešení:

Komplexní řešení je dáno

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(E_{\gg}e^{i\frac{\omega}{c}r-i\omega t} + E_{\ll}e^{-i\frac{\omega}{c}r-i\omega t}\right)\vec{e}_\vartheta\,,\\
\vec{B} &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{1}{c}E_{\gg}e^{i\frac{\omega}{c}r-i\omega t} - \frac{1}{c}E_{\ll}e^{-i\frac{\omega}{c}r-i\omega t}\right)\vec{e}_\varphi\,,
\end{aligned}
$$

a reálné tedy

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(E_{\gg}\cos\left(\frac{\omega}{c}r-\omega t\right) + E_{\ll}\cos\left(\frac{\omega}{c}r+\omega t\right)\right)\vec{e}_\vartheta\,,\\
\vec{B} &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{1}{c}E_{\gg}\cos\left(\frac{\omega}{c}r-\omega t\right) - \frac{1}{c}E_{\ll}\cos\left(\frac{\omega}{c}r+\omega t\right)\right)\vec{e}_\varphi\,.
\end{aligned}
$$

5) Vyberte řešení reprezentující 'odcházející' vlnu, tj. řešení, u kterého se vlnoplocha šíří od středu.

V dalším uvažujte pouze toto odcházející řešení.

Řešení:

Odcházející řešení má fázi $\frac{\omega}{c}r - \omega t$ a tedy

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{1}{r\sin\vartheta}E_{\gg}\cos\left(\frac{\omega}{c}r-\omega t\right)\vec{e}_\vartheta\,,\\
\vec{B} &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{1}{c}E_{\gg}\cos\left(\frac{\omega}{c}r-\omega t\right)\vec{e}_\varphi\,.
\end{aligned}
$$

6) Určete plošný proud na hranicích vlnovodu 'vedoucí' nalezenou elektromagnetickou vlnu uvnitř vlnovodu.

Konkrétně, vně vlnovodu uvažujte nulové $\vec{E}$ a $\vec{B}$ a použijte standardní podmínky (známé z magnetostatiky) pro navazování nespojitého magnetického pole na hranici.

Řešení:

Plošný proud na hranici vlnovodu je dán skokem tečných složek magnetické indukce

$$\mu_0\vec{\iota} = \vec{n}\times\left(\vec{B}_+ - \vec{B}_-\right),$$

kde máme uvažovat nulovou magnetickou indukci vně vlnovodu, $\vec{B}_- = 0$.

Pro $\vartheta = \vartheta_o$ je normála dovnitř vlnovodu dána $\vec{n} = \vec{e}_\vartheta$

$$\mu_o \vec{\imath} = \vec{e}_\vartheta \times \frac{1}{r \sin \vartheta_o} \frac{E_\gg}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c} r - \omega t\right) \vec{e}_\varphi = \frac{E_\gg \cos\left(\frac{\omega}{c} r - \omega t\right)}{cr \sin \vartheta_o} \vec{e}_\varphi \,.$$

Pro $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ je normála dovnitř vlnovodu dána $\vec{n} = -\vec{e}_\vartheta$

$$\mu_o \vec{\imath} = -\vec{e}_\vartheta \times \frac{1}{r \sin \frac{\pi}{2}} \frac{E_\gg}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c} r - \omega t\right) \vec{e}_\varphi = -\frac{E_\gg \cos\left(\frac{\omega}{c} r - \omega t\right)}{cr} \vec{e}_\varphi \,.$$

7) Spočtěte proud skrze kružnici $r = r_o \equiv$ konst na obou hranicích vlnovodu.

   Řešení:

   Budeme integrovat přes kružnici s poloměrem $r = r_o$, proud tekoucí dovniřr

$$I_{\vartheta_o}(r_o) = \varepsilon_o c^2 \int \vec{\imath} \cdot \vec{e}_r \, ds = \varepsilon_o c^2 \int \vec{\imath} \cdot \vec{e}_r r_o \sin \vartheta_o \, d\varphi = 2\pi \varepsilon_o c E_\gg \left(\frac{\omega}{c} r_o - \omega t\right),$$

   a proud tekoucí ven (čili vezmeme opačné znaménko u $\vec{e}_r$) proud tekoucí dovnitř

$$I_{\frac{\pi}{2}}(r_o) = \varepsilon_o c^2 \int \vec{\imath} \cdot (-\vec{e}_r) \, ds = -\varepsilon_o c^2 \int \vec{\imath} \cdot \vec{e}_r r_o \sin \vartheta_o \, d\varphi = 2\pi \varepsilon_o c E_\gg \left(\frac{\omega}{c} r_o - \omega t\right).$$

   Vidíme, že nedochází k hromadění náboje.

8) Spočtěte Poyntingův vektor uvnitř vlnovodu.

   Řešení:

$$\vec{\mathcal{S}} = \varepsilon_o c^2 \vec{E} \times \vec{B} = \frac{\varepsilon_o c}{r^2 \sin^2 \vartheta} E_\gg^2 \cos^2\left(\frac{\omega}{c} r - \omega t\right) \vec{e}_r \,.$$

9) Spočtěte tok energie skrze plochu $r = r_o \equiv$ konst.

   Řešení:

   Hustota toku energie danou plochou je dána průmětem Poytnigova vektoru do směru normály. Hustotu musíme integrovat přes celou plochu $r = r_o$ vlnovodu

$$\begin{aligned}
P &= \int \vec{\mathcal{S}} \cdot d\vec{S} \\
&= \int_{\vartheta_o}^{\frac{\pi}{2}} \int_o^{2\pi} \mathcal{S}^r r_o^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \\
&= \int_{\vartheta_o}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_o^{2\pi} d\varphi \, \frac{\varepsilon_o c}{r_o^2 \sin^2 \vartheta} E_\gg^2 \cos^2\left(\frac{\omega}{c} r - \omega t\right) r_o^2 \sin \vartheta \\
&= 2\pi \varepsilon_o c E_\gg^2 \cos^2\left(\frac{\omega}{c} r - \omega t\right) \int_{\vartheta_o}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin \vartheta} d\vartheta \\
&= 2\pi \varepsilon_o c E_\gg^2 \cos^2\left(\frac{\omega}{c} r - \omega t\right) \ln \cot \frac{\vartheta_o}{2} \,.
\end{aligned}$$

   kde jse využili znalosti $\int_{\vartheta_o}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin \vartheta} d\vartheta = \left[\ln \tan \frac{\vartheta}{2}\right]_{\vartheta_o}^{\frac{\pi}{2}}$.