

Zápočtový problém č. 2

NOFY126 – Klasická elektrodynamika, LS 2023

termín odevzdání: 18. 5. 2023

Mějme vlnovod ohraničený kuželovou plochou a rovníkovou rovinou. Neboli, zajímá nás prostor popsaný ve sférických souřadnicích (r, ϑ, φ) intervalem úhlu $\vartheta \in (\vartheta_0, \frac{\pi}{2})$.

Uvnitř tohoto vlnovodu uvažujme pole \vec{E} a \vec{B} s harmonickým časovým průběhem mající následující tvar:

$$\vec{E} = \frac{1}{r} E(r, \vartheta) e^{-i\omega t} \vec{e}_\vartheta ,$$
$$\vec{B} = \frac{1}{r} B(r, \vartheta) e^{-i\omega t} \vec{e}_\varphi .$$

Uvnitř vlnovodu neuvažujte žádné zdroje.

- 1) V dané oblasti rozepište explicitně všechny komponenty Maxwellových rovnic ve sférických souřadnicích.

Po zkrácení harmonického faktoru $e^{-i\omega t}$ budou dvě výsledné rovnice nadále obsahovat frekvenci ω a dvě na ω záviset nebudou.

- 2) Zintegrujte rovnice neobsahující frekvenci.

Nezapomeňte, že integrační konstanta podle jedné proměnné může záviset na druhé proměnné.

- 3) Obdržené vztahy pro E a B dosadte do rovnic s frekvencí. Dostanete dvě závislé diferenciální rovnice. Substitucí jedné do druhé je dekaplujete. Rovnice vyřešte.
- 4) Napište výsledné komplexní řešení pro \vec{E} a \vec{B} . Napište odpovídající reálné řešení pro \vec{E} a \vec{B} .
- 5) Vyberte řešení reprezentující 'odcházející' vlnu, tj. řešení, u kterého se vlnoplocha šíří od středu.

V dalším uvažujte pouze toto odcházející řešení.

- 6) Určete plošný proud na hranicích vlnovodu 'vedoucí' nalezenou elektromagnetickou vlnu uvnitř vlnovodu.

Konkrétně, vně vlnovodu uvažujte nulové \vec{E} a \vec{B} a použijte standardní podmínky (známé z magnetostatiky) pro navazování nespojitého magnetického pole na hranici.

- 7) Spočítejte proud skrze kružnici $r = r_0 \equiv \text{konst}$ na obou hranicích vlnovodu.
- 8) Spočítejte Poyntingův vektor uvnitř vlnovodu.
- 9) Spočítejte tok energie skrze plochu $r = r_0 \equiv \text{konst}$.

