Legendreovy polynomy

Polynomy $\mathsf{P}_l(\zeta)$ stupně $l \in \mathbb{N}_0$ definované na intervalu $\zeta \in \langle -1, 1\rangle$.
Explicitní vyjádření:

$$\mathsf{P}_l(\zeta) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}_0\\ n\leqslant l}} \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{(2l-n)!}{n!(l-n)!(l-2n)!}\, \zeta^{l-2n}$$

Rodriguesova formule:

$$\mathsf{P}_l(\zeta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\zeta^l} (\zeta^2 - 1)^l$$

Legendreova rovnice:

$$(1-\zeta^2)\frac{d^2\mathsf{P}_l}{d\zeta^2}(\zeta) - 2\zeta\frac{d\mathsf{P}_l}{d\zeta}(\zeta) + l(l+1)\mathsf{P}_l(\zeta) = 0$$

Legendreovy polynomy jako vlastní funkce operátoru:

$$-\frac{d}{d\zeta}\Big[(1-\zeta^2)\frac{d}{d\zeta}\Big]\mathsf{P}_l(\zeta) = l(l+1)\,\mathsf{P}_l(\zeta)$$

Rekurentní vztah:

$$\mathsf{P}_l(\zeta) = \frac{2l-1}{l}\,\zeta\,\mathsf{P}_{l-1}(\zeta) - \frac{l-1}{l}\,\mathsf{P}_{l-2}(\zeta) \qquad \mathsf{P}_0(\zeta) = 1 \quad \mathsf{P}_1(\zeta) = \zeta$$

Generující funkce:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\zeta t + t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathsf{P}_l(\zeta)\, t^l$$

Krajní hodnoty:

$$\mathsf{P}_l(\pm 1) = (\pm 1)^l$$

Relace ortogonality:

$$\int_{-1}^{1} \mathsf{P}_l(\zeta)\mathsf{P}_{l'}(\zeta)d\zeta = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} \qquad \int_{0}^{\pi} \mathsf{P}_l(\cos\vartheta)\mathsf{P}_{l'}(\cos\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$$

Relace úplnosti:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2}\mathsf{P}_l(\zeta)\mathsf{P}_l(\zeta') = \delta(\zeta - \zeta') \qquad \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2}\mathsf{P}_l(\cos\vartheta)\mathsf{P}_l(\cos\vartheta') = \frac{1}{\sin\vartheta}\delta(\vartheta - \vartheta')$$

Separace úhlů:

$$\int \mathsf{P}_l(\vec{e}\cdot\vec{e}_1)\,\mathsf{P}_l(\vec{e}\cdot\vec{e}_2)\,d\Omega = \frac{4\pi}{2l+1}\mathsf{P}_l(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1)$$

Legendreovy polynomy pro $l \leqslant 4$:

$$\mathsf{P}_0(\zeta) = 1$$

$$\mathsf{P}_1(\zeta) = \zeta$$

$$\mathsf{P}_2(\zeta) = \frac{3}{2}\zeta^2 - \frac{1}{2}$$

$$\mathsf{P}_3(\zeta) = \frac{5}{2}\zeta^3 - \frac{3}{2}\zeta$$

$$\mathsf{P}_4(\zeta) = \frac{35}{8}\zeta^4 - \frac{15}{4}\zeta^2 + \frac{3}{8}$$

Přidružené Legendreovy polynomy

Obecná Legendreova rovnice pro přidružené Legendreovy funkce:

$$\frac{d}{d\zeta}\Big((1-\zeta^2)\frac{d\mathsf{P}_l^m}{d\zeta}(\zeta)\Big) + \Big(l(l+1) - \frac{m^2}{1-\zeta^2}\Big)\mathsf{P}_l^m(\zeta) = 0$$

Přidružené Legendreovy "polynomy" – celočíselné parametry $l = 0, 1, \ldots, m = -l, \ldots, l$:

$$\mathsf{P}_l^m(\zeta) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{l+m}}{d\zeta^{l+m}}(\zeta^2-1)^l$$

Vztah k Legandreovým polynomům:

$$\mathsf{P}_l^m(\zeta) = (-1)^m(1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{d\zeta^m}\mathsf{P}_l(\zeta) \quad m \geqslant 0 \qquad\qquad \mathsf{P}_l^0(\zeta) = \mathsf{P}_l(\zeta)$$

Vztah pro opačné m:

$$\mathsf{P}_l^{-m}(\zeta) = (-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\,\mathsf{P}_l^m$$

Relace ortogonality:

$$\int\limits_{-1}^{1}\mathsf{P}_l^m(\zeta)\mathsf{P}_{l'}^m(\zeta)\,d\zeta = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,\delta_{ll'} \qquad \int\limits_{-1}^{1}\mathsf{P}_l^m(\zeta)\mathsf{P}_l^{m'}(\zeta)\,\frac{d\zeta}{1-\zeta^2} = \frac{1}{m}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,\delta_{mm'}$$

Kulové funkce (sférické harmoniky)

Parametrizace jednotkového vektoru $\vec{e}$ pomocí sférických úhlů:

$$\vec{e} = \cos\vartheta\,\vec{e}_z + \sin\vartheta\,\big(\cos\vartheta\,\vec{e}_x + \sin\vartheta\,\vec{e}_y\big)$$

Integrační element na jednotkové sféře:

$$d\Omega \equiv d\vec{e} = \sin\vartheta\,d\vartheta d\varphi = d\zeta d\varphi \qquad\qquad \zeta = \cos\vartheta$$

2D δ-funkce na jednotkové sféře:

$$\delta^{(2)}\big(\vec{e}|\vec{e}'\big) = \frac{1}{\sin\vartheta}\,\delta(\vartheta-\vartheta')\delta(\varphi-\varphi') = \delta(\zeta-\zeta')\delta(\varphi-\varphi')$$

$$f(\vec{e}) = \int\delta^{(2)}\big(\vec{e}|\vec{e}'\big)f(\vec{e}')\,d\Omega' = \int\delta(\vartheta-\vartheta')\delta(\varphi-\varphi')\,f(\vartheta',\varphi')\,d\vartheta'd\varphi'$$

Kulové funkce – komplexní funkce na jednotkové sféře ($l = 0, 1, \ldots, m = -l, \ldots, l$):

$$\mathsf{Y}_l^m(\vec{e}) \equiv \mathsf{Y}_l^m(\vartheta,\varphi) = (-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,\mathsf{P}_l^m(\cos\vartheta)\exp(im\varphi)$$

Komplexně sdružené funkce:

$$\mathsf{Y}_l^m(\vec{e})^* = (-1)^m\,\mathsf{Y}_l^{-m}(\vec{e})$$

Kulové funkce jako vlastní funkce operátorů:

$$-\bigg[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Big[\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Big] + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\bigg]\mathsf{Y}_l^m(\vartheta,\varphi) = l(l+1)\,\mathsf{Y}_l^m \qquad\qquad -i\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathsf{Y}_l^m = m\,\mathsf{Y}_l^m$$

Relace ortogonality a úplnosti:

$$\int\mathsf{Y}_l^m(\vec{e})\mathsf{Y}_{l'}^{m'}(\vec{e})^*\,d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \qquad\qquad \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\mathsf{Y}_l^m(\vec{e})\mathsf{Y}_l^m(\vec{e}')^* = \delta^{(2)}(\vec{e}|\vec{e}')$$

Rozklad Legandreova polynomu:

$$\sum_{m=-l}^{l}\mathsf{Y}_l^m(\vec{e})\,\mathsf{Y}_l^m(\vec{e}')^* = \frac{2l+1}{4\pi}\mathsf{P}_l(\vec{e}\cdot\vec{e}')$$

Přidružené Legendreovy polynomy pro $l \leqslant 4$

$$\mathsf{P}_0^0(\zeta) = 1$$

$$\mathsf{P}_1^{-1}(\zeta) = \frac{1}{2}\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\mathsf{P}_1^0(\zeta) = \zeta$$

$$\mathsf{P}_1^1(\zeta) = -\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\mathsf{P}_2^{-2}(\zeta) = \frac{1}{8}(1-\zeta^2)$$

$$\mathsf{P}_2^{-1}(\zeta) = \frac{1}{2}\sqrt{1-\zeta^2}\,\zeta$$

$$\mathsf{P}_2^0(\zeta) = -\frac{1}{2}(1-3\zeta^2)$$

$$\mathsf{P}_2^1(\zeta) = -3\sqrt{1-\zeta^2}\,\zeta$$

$$\mathsf{P}_2^2(\zeta) = 3(1-\zeta^2)$$

$$\mathsf{P}_3^{-3}(\zeta) = \frac{1}{48}\sqrt{1-\zeta^2}(1-\zeta^2)$$

$$\mathsf{P}_3^{-2}(\zeta) = \frac{1}{8}(1-\zeta^2)\zeta$$

$$\mathsf{P}_3^{-1}(\zeta) = -\frac{1}{8}\sqrt{1-\zeta^2}(1-5\zeta^2)$$

$$\mathsf{P}_3^0(\zeta) = -\frac{1}{2}(3\zeta-5\zeta^3)$$

$$\mathsf{P}_3^1(\zeta) = \frac{3}{2}\sqrt{1-\zeta^2}(1-5\zeta^2)$$

$$\mathsf{P}_3^2(\zeta) = 15(1-\zeta^2)\zeta$$

$$\mathsf{P}_3^3(\zeta) = -15\sqrt{1-\zeta^2}(1-\zeta^2)$$

$$\mathsf{P}_4^{-4}(\zeta) = \frac{1}{384}(1-\zeta^2)^2$$

$$\mathsf{P}_4^{-3}(\zeta) = \frac{1}{48}\sqrt{1-\zeta^2}(1-\zeta^2)\zeta$$

$$\mathsf{P}_4^{-2}(\zeta) = -\frac{1}{48}(1-\zeta^2)(1-7\zeta^2)$$

$$\mathsf{P}_4^{-1}(\zeta) = -\frac{1}{8}\sqrt{1-\zeta^2}(3\zeta-7\zeta^3)$$

$$\mathsf{P}_4^0(\zeta) = \frac{1}{8}(3-30\zeta^2+35\zeta^4)$$

$$\mathsf{P}_4^1(\zeta) = \frac{5}{2}\sqrt{1-\zeta^2}(3\zeta-7\zeta^3)$$

$$\mathsf{P}_4^2(\zeta) = -\frac{15}{2}(1-\zeta^2)(1-7\zeta^2)$$

$$\mathsf{P}_4^3(\zeta) = -105\sqrt{1-\zeta^2}(1-\zeta^2)\zeta$$

$$\mathsf{P}_4^4(\zeta) = 105(1-\zeta^2)^2$$

Kulové funkce pro $l \leqslant 4$

$$x = \sin\vartheta\cos\varphi \qquad y = \sin\vartheta\sin\varphi \qquad z = \cos\vartheta \qquad x^2+y^2+z^2=1$$

$$\mathsf{Y}_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$\mathsf{Y}_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}z$$

$$\mathsf{Y}_1^1 = -\mathsf{Y}_1^{-1*} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\exp(i\varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}(x+iy)$$

$$\mathsf{Y}_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(-1+3\cos^2\vartheta) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(-x^2-y^2+2z^2)$$

$$\mathsf{Y}_2^1 = -\mathsf{Y}_2^{-1*} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\vartheta\cos\vartheta\exp(i\varphi) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\,z\,(x+iy)$$

$$\mathsf{Y}_2^2 = \mathsf{Y}_2^{-2*} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\vartheta\exp(2i\varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}(x+iy)^2$$

$$\mathsf{Y}_3^0 = \sqrt{\frac{7}{16\pi}}(-3\cos\vartheta+5\cos^3\vartheta) = \sqrt{\frac{7}{16\pi}}(-3x^2-3y^2+2z^2)z$$

$$\mathsf{Y}_3^1 = -\mathsf{Y}_3^{-1*} = \sqrt{\frac{21}{64\pi}}(-1+5\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\exp(i\varphi) = \sqrt{\frac{21}{64\pi}}(x^2+y^2-4z^2)(x+iy)$$

$$\mathsf{Y}_3^2 = \mathsf{Y}_3^{-2*} = \sqrt{\frac{105}{32\pi}}\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\exp(2i\varphi) = \sqrt{\frac{105}{32\pi}}\,z\,(x+iy)^2$$

$$\mathsf{Y}_3^3 = -\mathsf{Y}_3^{-3*} = \sqrt{\frac{35}{64\pi}}\sin^3\vartheta\exp(3i\varphi) = \sqrt{\frac{35}{64\pi}}(x+iy)^3$$

$$\mathsf{Y}_4^0 = \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}(3-30\cos^2\vartheta+35\cos^4\vartheta) = \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\big(3(x^2+y^2)^2-24(x^2+y^2)z^2+8z^4\big)$$

$$\mathsf{Y}_4^1 = -\mathsf{Y}_4^{-1*} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(-3\cos\vartheta+7\cos^3\vartheta)\sin\vartheta\exp(i\varphi) = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(3x^2+3y^2-4z^2)\,z\,(x+iy)$$

$$\mathsf{Y}_4^2 = \mathsf{Y}_4^{-2*} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{5}{2\pi}}\sin^2\vartheta(-1+7\cos^2\vartheta)\exp(2i\varphi) = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{5}{2\pi}}(x^2+y^2-6z^2)(x+iy)^2$$

$$\mathsf{Y}_4^3 = -\mathsf{Y}_4^{-3*} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{35}{\pi}}\sin^3\vartheta\cos\vartheta\exp(3i\varphi) = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{35}{\pi}}\,z\,(x+iy)^3$$

$$\mathsf{Y}_4^4 = \mathsf{Y}_4^{-4*} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{35}{4\pi}}\sin^4\vartheta\exp(4i\varphi) = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{35}{4\pi}}(x+iy)^4$$