Tenzorové operace

Symetrizace

symetrizace v p indexech

$$T_{(a_1 \dots a_p)} = \frac{1}{p!} \sum_{\substack{\sigma \\ \text{permutace}}} T_{a_{\sigma_1} \dots a_{\sigma_p}}$$

příklady

$$T_{(ab)} = \frac{1}{2}\left(T_{ab} + T_{ba} \right)$$

$$T_{(abc)} = \frac{1}{6}\left(T_{abc} + T_{bca} + T_{cab} + T_{acb} + T_{cba} + T_{bac} \right)$$

symetrické tenzory tvoří podprostor tenzorů
a symetrizace je projektor na něj

opakovaná symetrizace nic nedělá

$$T_{((ab\dots))} = T_{(ab\dots)} \qquad T_{(ab\dots(m\dots)\dots)} = T_{(ab\dots m\dots)}$$

pokud symetrizujeme součin již symetrických tenzorů

$$M_{(ab\dots} N_{cd\dots)} = \frac{1}{s} \sum M_{m\dots} N_{n\dots}$$

všechna odlišná rozdělení indexů na dvě podskupiny $(m\dots)$ a $(n\dots)$

počet těchto rozdělení

příklady

$$m_{(a} N_{bc)} = \frac{1}{3}\left(m_a N_{bc} + m_b N_{ca} + m_c N_{ab} \right)$$

$$M_{(ab} N_{cd)} = \frac{1}{6}\left(M_{ab} N_{cd} + M_{ac} N_{bd} + M_{ad} N_{bc} + M_{bc} N_{ad} + M_{bd} N_{ac} + M_{cd} N_{ab} \right)$$

bez indexů budeme psát $\mathcal{S}T$, tj.

$$(\mathcal{S}T)_{ab\dots} = T_{(ab\dots)}$$

Antisymetrizace

antisymetrizace v p indexech

$$T_{[a_1 \dots a_p]} = \frac{1}{p!} \sum_{\substack{\sigma \\ \text{permutace}}} (\operatorname{sign} \sigma)\, T_{a_{\sigma_1} \dots a_{\sigma_p}}$$

$\operatorname{sign}\sigma$ = znaménko permutace

$= (-1)^{\text{počet transpozic ze kterých lze } \sigma \text{ složit}}$

příklady

$$T_{[ab]} = \frac{1}{2} (T_{ab} - T_{ba})$$

$$T_{[abc]} = \frac{1}{6} (T_{abc} + T_{bca} + T_{cab} - T_{acb} - T_{cba} - T_{bac})$$

antisymetrické tenzory tvoří podprostor tenzorů a antisymetrizace je projektor na něj

opakovaná antisymetrizace nic nedělá

$$T_{[[ab\dots]]} = T_{[ab\dots]} \qquad T_{[ab\dots[m\dots]\dots]} = T_{[ab\dots m \dots]}$$

antisymetrizace součinu již antisymetrických tenzorů

$$M_{[ab\dots} N_{cd\dots]} = \frac{1}{S} \sum (\pm 1)\, M_{m\dots} N_{n\dots}$$

znaménko permutace zvoleného pořadí indexů $m\dots n\dots$

všechna odlišná rozdělení indexů na dvě podskupiny $[m\dots]$ a $[n\dots]$

S … počet těchto rozdělení

příklady

$$m_{[a} N_{bc]} = \frac{1}{3} (m_a N_{bc} + m_b N_{ca} + m_c N_{ab}) = \frac{1}{3} (m_a N_{bc} - m_b N_{ac} + m_c N_{ab})$$

$$M_{[ab} N_{cd]} = \frac{1}{6} (M_{ab} N_{cd} - M_{ac} N_{bd} + M_{ad} N_{bc} + M_{bc} N_{ad} - M_{bd} N_{ac} + M_{cd} N_{ab})$$

zúžení symetrického a antisymetrického tenzoru je nulové

$$S_{\dots(ab\dots)\dots}\, A_{\dots}^{\dots[ab\dots]\dots} = 0$$

bez indexů budeme psát AT, tj

$$(AT)_{ab\dots} = T_{[ab\dots]}$$

Bezestopá část symetrického tenzoru

mějme symetrický tenzor

$$T_{ab\ldots} = T_{(ab\ldots)}$$

můžeme definovat jeho "stopy"

$$g^{ab} T_{abcde\ldots} \qquad g^{ab} g^{cd} T_{abcde\ldots} \qquad \text{atd}$$

tyto stopy vystihují část tenzoru T
zbývající část je vystihnuta "bezestopou částí" T

$$T_{\langle abc\ldots\rangle} \qquad \text{bezestopá část}$$

původní tenzor je kombinace $T_{\langle abc\ldots\rangle}$ a tenzorů vyrobených pomocí stop a metriky

$$T_{abcde\ldots} = T_{\langle abcde\ldots\rangle} + \alpha_1\, g_{(ab} T_{cde\ldots)}{}^m{}_m + \alpha_2\, g_{(ab} g_{cd} T_{e\ldots)}{}^m{}_m{}^m{}_m + \ldots$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ jsou numerické faktory zvolené tak aby rovnice byla konzistentní

bezestopá část je definována touto rovnicí, tj.

$$T_{\langle abcde\ldots\rangle} = T_{abcde\ldots} - \alpha_1\, g_{(ab} T_{cde\ldots)}{}^m{}_m - \alpha_2\, g_{(ab} g_{cd} T_{e\ldots)}{}^m{}_m{}^m{}_m$$

Př: $l=1$

$$T_a \text{ nemá stopu} \Rightarrow T_{\langle a\rangle} = T_a$$

Př: $l=2$

$$T_{\langle ab\rangle} = T_{ab} - \alpha\, g_{ab} T^m{}_m \qquad / g^{ab} \quad \Rightarrow \quad 0 = T^m{}_m - \alpha 3 T^m{}_m \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

$$T_{\langle ab\rangle} = T_{ab} - \frac{1}{3} g_{ab} T^m{}_m$$

Př: $l=3$

$$T_{\langle abc\rangle} = T_{abc} - \alpha\, g_{(ab} T_{c)}{}^m{}_m = T_{abc} - \frac{\alpha}{3}\left(g_{ab} \underbrace{T_c}_{= T_c{}^m{}_m} + g_{ac} T_b + g_{bc} T_a\right) \qquad / g^{bc}$$

$$\Rightarrow 0 = T_a - \frac{\alpha}{3}\left(T_a + T_a + 3T_a\right) \Rightarrow \alpha = \frac{3}{5}$$

$$T_{\langle abc\rangle} = T_{abc} - \frac{3}{5} g_{(ab} T_{c)}{}^m{}_m$$

Př: $l=4$

$$T_{\langle abcd\rangle} = T_{abcd} - \frac{6}{7} g_{(ab} T_{cd)}{}^m{}_m + \frac{3}{35} g_{(ab} g_{cd)} T^m{}_m{}^m{}_m$$

$$T_{\langle abcd\rangle} = T_{abcd} - \alpha_1\, g_{(ab} T_{cd)} - \alpha_2\, g_{(ab} g_{cd)}\, T$$

$$T_{cd} = T^{m}{}_{m} \qquad T = T^{m}{}_{m}{}^{n}{}_{n}$$

$$= T_{abcd} - \frac{\alpha_1}{6}\left(g_{ab}T_{cd} + g_{ac}T_{bd} + g_{ad}T_{bc} + g_{bc}T_{ad} + g_{bd}T_{ac} + g_{cd}T_{ab}\right)$$

$$- \frac{\alpha_2}{3}\left(g_{ab}g_{cd} + g_{ac}g_{bd} + g_{ad}g_{bc}\right) T$$

g^{cd}

$\Downarrow$

$$0 = T_{ab} - \frac{\alpha_1}{6}\left(g_{ab}T + T_{ab} + T_{ab} + T_{ab} + T_{ab} + 3T_{ab}\right) - \frac{\alpha_3}{3}\left(3g_{ab} + g_{ab} + g_{ab}\right) T$$

$$= \left(1 - \frac{7}{6}\alpha_1\right) T_{ab} - \frac{1}{6}\left(\alpha_1 + 10\alpha_2\right) g_{ab} T$$

$\Downarrow$

$$\alpha_1 = \frac{6}{7} \qquad \alpha_2 = -\frac{3}{35}$$

$\Downarrow$

$$T_{\langle abcd\rangle} = T_{abcd} - \frac{6}{7}\, g_{(ab} T_{cd)}{}^{m}{}_{m} + \frac{3}{35}\, g_{(ab} g_{cd)}\, T^{m}{}_{m}{}^{n}{}_{n}$$

bezestopé symetrické tenzory tvoří podprostor symetrických tenzorů

operace $\langle \dots \rangle$ je projektor na tento podprostor

tj. opakované působení nic nedělá

$$T_{\langle\langle ab\dots\rangle\rangle} = T_{\langle ab\dots\rangle} \qquad T_{\langle a\dots\langle m\dots\rangle\dots\rangle} = T_{\langle a\dots m\dots\rangle}$$

metrika má triviální bezestopou část

$$g_{\langle ab\rangle} = 0$$

stejně tak každý tenzor "složený" z metriky

$$T_{\langle ab\dots}\, g_{mn\rangle} = 0$$

bez indexů budeme psát $\langle T\rangle$, tj.

$$\langle T\rangle_{ab\dots} = T_{\langle ab\dots\rangle}$$