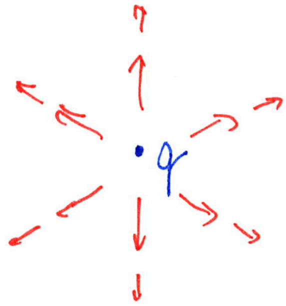
Multipólový rozvoj

Monopól

$$\phi_{mon} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \qquad \vec{E}_{mon} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e} \qquad \varrho_{mon} = q\,\delta$$

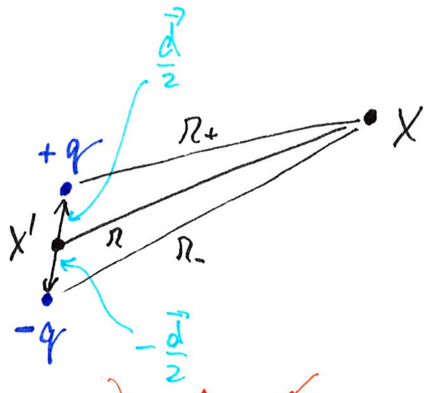


síla na monopól ve vnějším poli

$$\vec{F}_{na\,mon} = q\vec{E}$$

Dipól

pole dvou blízkých opačných nábojů



$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec d}{2}\cdot\left(\vec\nabla'\frac{1}{r} + \vec\nabla'\frac{1}{r}\right)$$

Taylorův rozvoj
absolutní člen se ruší

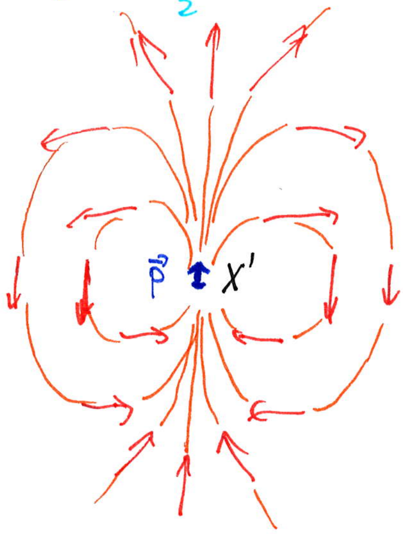
$X_+ = X' + \frac{\vec d}{2}$ $\quad X_- = X' - \frac{\vec d}{2}$

$r(X|X')$

– od náboje
– od členu $-\frac{\vec d}{2}$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, q\vec d\cdot\frac{\vec e}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec p\cdot\vec e}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\vec p\cdot\vec\nabla\frac{1}{r}$$

kde $\vec p = q\vec d$ v limitě $d\to 0$



$$r(X|X') = \sqrt{\Delta x^a \Delta x^b g_{ab}} \qquad \Delta x^a = x^a - x'^a \equiv r^a$$

$$\vec\nabla' r = -\vec e \qquad \vec\nabla'\vec r = -\mathbf{g} \qquad \nabla'_a r_b = -g_{ab}$$

intenzita

$$\vec E = -\vec\nabla\phi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\vec\nabla\frac{\vec r\cdot\vec p}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\vec\nabla\vec\nabla\frac{1}{r}\right)\cdot\vec p$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^3}\left(3\vec p\cdot\vec e\,\vec e - \vec p\right) - \frac{1}{3\varepsilon_0}\,\vec p\,\delta_{X'}$$

viz distribuční derivování výrazu $\frac{1}{r}$

nábojová hustota

$$\varrho_{dip}(X) = \varepsilon_0\vec\nabla\cdot\vec E = \frac{1}{4\pi}\left(\nabla^2\nabla\frac{1}{r}\right)\cdot\vec p = \frac{1}{4\pi}\,\vec p\cdot\vec\nabla\underbrace{\left(\Delta\frac{1}{r}\right)}_{-4\pi\delta_{X'}(X)} = -\vec p\cdot\vec\nabla\delta_{X'}(X)$$

lze získat i z definice dipólu jako dvou blízkých nábojů

$$\varrho_{dip}(X) = \varrho_{mon\,X_+}(X) - \varrho_{mon\,X_-}(X) = q\left(\delta(X|X_+) - \delta(X|X_-)\right) = q\,\vec d\cdot\vec\nabla'\delta(X|X') = -\vec p\cdot\vec\nabla\delta(X|X')$$

díky $\vec\nabla'\delta(X|X') = -\vec\nabla\delta(X|X') \Leftarrow \delta(X|X') = \delta(X-X')$

síla na dipól ve vnějším poli

$$\vec F_{dip} = q\vec E(X_+) - q\vec E(X_-) = \underbrace{q\vec d}_{\vec p}\cdot\vec\nabla\vec E(X) \qquad X_\pm = X \pm \frac{\vec d}{2}$$

$$= (\vec\nabla\vec E)\cdot\vec p + \vec p\cdot(\vec\nabla\vec E) - (\vec\nabla\vec E)\cdot\vec p =$$

$$= \vec\nabla(\vec E\cdot\vec p) - \vec p\times\underbrace{(\vec\nabla\times\vec E)}_{0} = \vec\nabla(\vec E\cdot\vec p)$$

distribučně

$$\vec F_{dip} = \int\vec E\,\varrho_{dip}\,dV = -\int\vec E\,\vec p\cdot\vec\nabla\delta_X\,dV = \int\vec p\cdot(\vec\nabla\vec E)\,\delta_X\,dV = \vec p\cdot\vec\nabla\vec E$$

per partes + $\vec p$ = konst

dál už jako výše

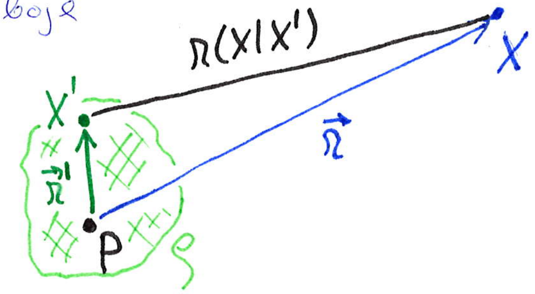
Vzdálené pole systému nábojů

předpokládáme lokalizované rozložení náboje

$\varrho(P+\vec{r}')$ nenulové jen pro malé r'

zajímá nás pole daleko od nábojů

$\phi(P+\vec{r})$ pro "velká" r



budeme zkoumat rozvoj

$$\frac{r'}{r} \ll 1$$

potenciál nábojového rozložení

$$\phi(X) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{r(X|X')}\,\varrho(X')\,dV'$$

rozvoj členu $1/r(X|X')$ v argumentu X'

$$= \frac{\partial^l}{\partial x'^{a_1}\dots\partial x'^{a_l}}\frac{1}{|x-x'|}$$

$$\frac{1}{r(X|X')} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\, r'^{a_1}\dots r'^{a_l}\,\nabla'_{a_1}\dots\nabla'_{a_l}\frac{1}{r}\Big|_{X'=P}$$

pozorování:

1) $\nabla'_{a_1}\;\nabla'_{a_l}\frac{1}{r} = \nabla'_{(a_1}\;\nabla'_{a_l)}\frac{1}{r}$ symetrický tenzor

2) $\left(\nabla'_{a_1}\;\nabla'_{a_l}\frac{1}{r}\right) g^{a_m a_n} = \underbrace{\nabla'_{a_1}\;\nabla'_{a_l}}_{\text{mimo } a_m,\, a_n}\nabla^2\frac{1}{r} = 0$ $\qquad(r\neq 0)$

$\Downarrow$

$\nabla'_{a_1}\;\nabla'_{a_l}\frac{1}{r} = \nabla'_{\langle a_1}\dots\nabla'_{a_l\rangle}\frac{1}{r}$ bezestopý tenzor

nejnižší členy

$\nabla'_a r = -\frac{r_a}{r} = -e_a \qquad \nabla'_a r_b = -g_{ab}$

$r^a = x^a - x'^a \qquad r = \sqrt{r^a r^b g_{ab}}$

$l=0 \qquad \frac{1}{r}$

$l=1 \qquad \nabla'_a\frac{1}{r} = \frac{1}{r^3}r_a = \frac{1}{r^2}e_a$

$l=2 \qquad \nabla'_a\nabla'_b\frac{1}{r} = \frac{3}{r^5}\left(r_a r_b - \frac{1}{3}r^2 g_{ab}\right) = \frac{3}{r^3}\left(e_a e_b - \frac{1}{3}g_{ab}\right)$

$l=3 \qquad \nabla'_a\nabla'_b\nabla'_c\frac{1}{r} = \frac{3\cdot 5}{r^7}r_c\left(r_a r_b - \frac{1}{3}r^2 g_{ab}\right) + \frac{3}{r^5}\left(-g_{ac}r_b - g_{bc}r_a + \frac{2}{3}r_c g_{ab}\right)$

$= \frac{15}{r^7}\left(r_a r_b r_c - \frac{1}{5}\left(r^2 r_a g_{bc} + r^2 r_b g_{ac} + r^2 r_c g_{ab}\right)\right)$

$= \frac{15}{r^4}\left(e_a e_b e_c - \frac{1}{5}\left(e_a g_{bc} + e_b g_{ac} + e_c g_{ab}\right)\right) = \frac{15}{r^4}\left(e_a e_b e_c - \frac{3}{5}e_{(a}g_{bc)}\right)$

lze ověřit, že stopy jsou nulové

$l=4 \qquad \nabla'_a\nabla'_b\nabla'_c\nabla'_d\frac{1}{r} = \frac{7\cdot 5\cdot 3}{r^5}\left(e_a e_b e_c e_d - \frac{6}{7}e_{(a}e_b g_{cd)} + \frac{3}{35}g_{(ab}g_{cd)}\right)$

Použitím operace "bezestopování" ⟨ ⟩ můžeme psát

$$\nabla'_a \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} e_{\langle a\rangle} = \frac{1}{r^2} e_a$$

$$\nabla'_a \nabla'_b \frac{1}{r} = \frac{3}{r^3} e_{\langle a} e_{b\rangle} = \frac{3}{r^3}\left(e_a e_b - \frac{1}{3} g_{ab}\right)$$

$$\nabla'_a \nabla'_b \nabla'_c \frac{1}{r} = \frac{3\cdot 5}{r^4} e_{\langle a} e_b e_{c\rangle} = \frac{3\cdot 5}{r^4}\left(e_a e_b e_c - \frac{3}{5} e_{(a} g_{bc)}\right)$$

$$\nabla'_a \nabla'_b \nabla'_c \nabla'_d \frac{1}{r} = \frac{3\cdot 5\cdot 7}{r^5} e_{\langle a} e_b e_c e_{d\rangle} = \frac{3\cdot 5\cdot 7}{r^5}\left(e_a e_b e_c e_d - \frac{6}{7} e_{(a} e_b g_{cd)} + \frac{3}{35} g_{(ab} g_{cd)}\right)$$

obecně platí

$$\nabla'_{a_1} \cdots \nabla'_{a_l} \frac{1}{r} = \frac{(2l-1)!!}{r^{l+1}} e_{\langle a_1} \cdots e_{a_l\rangle}$$

lze dokázat indukcí

$$\nabla'_{a_1} \cdots \nabla'_{a_l} \nabla'_{a_{l+1}} \frac{1}{r} = (2l-1)!!\, \nabla'_{\langle a_{l+1}}\left(\frac{1}{r^{2l+1}} r_{a_1} \cdots r_{a_l\rangle}\right) = (2l-1)!!\left[\frac{2l+1}{r^{2l+3}} r_{\langle a_1} \cdots r_{a_{l+1}\rangle} + \frac{1}{r^{2l+1}} \nabla'_{\langle a_{l+1}}\left(r_{a_1} \cdots r_{a_l\rangle}\right)\right]$$

$$= \frac{(2l+1)!!}{r^{2l+3}} r_{\langle a_1} \cdots r_{a_{l+1}\rangle} - (2l-1)!!\, l\, \frac{1}{r^{2l+1}} r_{\langle a_1} \cdots r_{a_{l-1}} g_{a_l a_{l+1}\rangle} = \frac{(2l+1)!!}{r^{2l+3}} r_{\langle a_1} \cdots r_{a_{l+1}\rangle}$$

Dosazením do rozvoje $1/r$

$$\frac{1}{r(x|x')} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l-1)!!}{l!} \frac{1}{r^{l+1}} r'^{a_1} \cdots r'^{a_l} e_{\langle a_1} \cdots e_{a_l\rangle}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l-1)!!}{l!} \underbrace{\frac{r'^{l}}{r^{l+1}}}_{\frac{1}{r}\left(\frac{r'}{r}\right)^{l} \ \text{rozvoj v} \ \frac{r'}{r} \ll 1} e'_{\langle a_1} \cdots e'_{a_l\rangle} e^{\langle a_1} \cdots e^{a_l\rangle}$$

jedna závorka lze vynechat

Tenzorové multipóly

dosazením rozvoje $1/r$ do potenciálu

$$\phi(X) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{1}{r^{l+1}} e^{\langle a_1} \dots e^{a_l\rangle} (2l-1)!! \underbrace{\int r'_{a_1} \dots r'_{a_l} \varrho(X') dV'}_{Q_{(l)a_1\dots a_l} \text{ } l\text{-tý moment nábojového rozložení}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{1}{r^{l+1}} e^{\langle a_1} \dots e^{a_l\rangle} (2l-1)!!\, Q_{(l)a_1\dots a_l}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{1}{r^{l+1}} e^{a_1} \dots e^{a_l} M_{(l)a_1\dots a_l}$$

$$M_{(l)}^{a_1\dots a_l} = (2l-1)!!\, Q_{(l)}^{\langle a_1\dots a_l\rangle} \qquad l\text{-tý multipól} = 2^l\text{-pól}$$

$$Q_{(l)}^{a_1\dots a_l} = \int r^{a_1} \dots r^{a_l} \varrho \, dV \qquad l\text{-tý moment náboje}$$

elektrická intenzita 2^l-pólu

$$E^a = -\nabla^a \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{l!} \frac{1}{r^{2l+1}} r^{a_1} \dots r^{a_l} M_{(l)a_1\dots a_l} \right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{l!} \left[(2l+1) \frac{1}{r^{2l+2}} \frac{r^a}{r} r^{a_1} \dots r^{a_l} - \frac{l}{r^{2l+1}} g^{a(a_1} r^{a_2} \dots r^{a_l)} \right] M_{(l)a_1\dots a_l}$$

l-členů z derivace každého r^{a_j}
→ vede k symetrizaci přes indexy $a_1 \dots a_l$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2l+1}{l!} \frac{1}{r^{l+2}} \left[e^a e^{a_1} \dots e^{a_l} M_{(l)a_1\dots a_l} - \frac{l}{2l+1} e^{a_2} \dots e^{a_l} M_{(l)}{}^{a}{}_{a_2\dots a_l} \right]$$

nedistribuční výpočet platný pro $r \neq 0$

Závislost multipólů na volbě počátku

obecně multipóly závisí na volbě P

nejnižší nenulový moment nezávisí na volbě počátku

nechť $Q_{(l)} = 0 \quad l = 0, 1, \dots, k-1 \qquad Q_{(k)} \neq 0$

posun počátku

$$\tilde{P} = P + \vec{d} \qquad X = P + \vec{r} = \tilde{P} + \tilde{\vec{r}} \qquad \tilde{\vec{r}} = \vec{r} - \vec{d}$$

moment vůči $\tilde{P}$

$$\tilde{Q}^{a_1 \dots a_k}_{(k)} = \int \tilde{r}^{a_1} \dots \tilde{r}^{a_k} \varrho(X)\, dV = \int (r^{a_1} - d^{a_1}) \cdots (r^{a_k} - d^{a_k})\, \varrho\, dV$$

$$= \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} (-1)^m d^{(a_1} \cdots d^{a_m} \underbrace{\int r^{a_{m+1}} \cdots r^{a_k)} \varrho\, dV}_{Q_{(k-m)} = 0 \text{ pro } m > 0}$$

$$= Q^{a_1 \dots a_k}_{(k)}$$

$\Downarrow$

nejnižší nenulový multipól nezávisí na volbě počátku

– charakterizuje dominantní chování vzdáleného pole

Monopól $l=0$

$$Q \equiv M_{(0)} = Q_{(0)} = \int \varrho \, dV$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r} \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}$$

Dipól $l=1$

$$p^a = M^a_{(1)} = Q^a_{(1)} = \int r^a \varrho \, dV$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} e^a p_a$$

$$E^a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^3} (3 e^a e^b p_b - p^a)$$ (mimo samotný dipól)

Kvadrupól $l=2$

$$K^{ab} = M^{ab}_{(2)} = 3\, Q^{\langle ab \rangle}_{(2)} = \int (3 r^a r^b - r^2 g^{ab}) \varrho \, dV$$

$$Q^{ab}_{(2)} = \int r^a r^b \varrho \, dV$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^3} \frac{1}{2} e^a e^b K_{ab} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^5} \frac{1}{2} r^a r^b K_{ab}$$

$$E^a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{5}{r^6} \frac{r^a}{r} \frac{1}{2} r^b r^c K_{bc} - \frac{1}{r^5} r^b K^a{}_b \right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^4} \left[\frac{5}{2} e^a e^b e^c K_{bc} - K^a{}_b e^b \right]$$

Oktapól $l=3$

$$M^{abc}_{(3)} = 15\, Q^{\langle abc \rangle}_{(3)} = 15 \int \left(r^a r^b r^c - \frac{3}{5} r^2 r^{(a} g^{bc)} \right) \varrho \, dV$$

$$Q^{abc}_{(3)} = \int r^a r^b r^c \varrho \, dV$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^4} \frac{1}{3!} e^a e^b e^c M_{(3)abc}$$

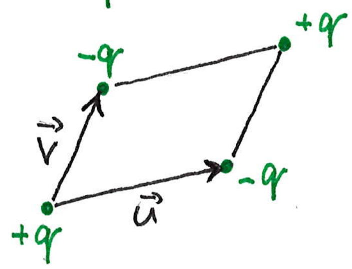
$$E^a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^5} \left[\frac{7}{6} e^a e^b e^c e^d M_{(3)bcd} - \frac{1}{2} M^a_{(3)}{}_{bc} e^b e^c \right]$$

Příklady

1) $Q = M_{(0)} = Q_{(0)} = \int \varrho \, dV = q - q = 0$

$\vec p = \vec M_{(1)} = \vec Q_{(1)} = \int \vec r \varrho \, dV = q\frac{\vec u}{2} - q\left(-\frac{\vec u}{2}\right) = q\vec u$

2) $Q = q + q - q - q = 0$



$\vec p = q\left(-\frac{\vec u}{2}-\frac{\vec v}{2}\right) + q\left(\frac{\vec u}{2}+\frac{\vec v}{2}\right) - q\left(\frac{\vec u}{2}-\frac{\vec v}{2}\right) - q\left(-\frac{\vec u}{2}+\frac{\vec v}{2}\right) = 0$

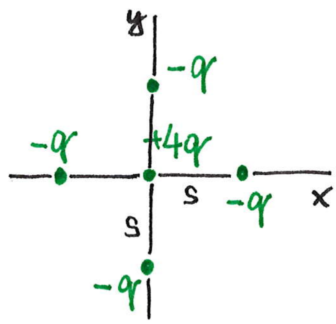
$Q^{ab} = \frac{q}{4}\left[(-u-v)^a(-u-v)^b + (u+v)^a(u+v)^b - (u-v)^a(u-v)^b - (-u+v)^a(-u+v)^b\right]$

$= q\left[u^a v^b + v^a u^b\right] = 2q\, u^{(a} v^{b)}$

$K^{ab} = M^{ab}_{(2)} = 3Q^{\langle ab\rangle}_{(2)} = 6q\, u^{\langle a} v^{b\rangle} = 6q\left(u^{(a}v^{b)} - \frac{1}{3} g^{ab} u^m v_m\right)$

$\overleftrightarrow{K} = 6q\langle \vec u \vec v\rangle = 6q\left(\frac{1}{2}(\vec u\vec v + \vec v\vec u) - \frac{1}{3}\overleftrightarrow{g}\, \vec u\cdot\vec v\right)$

3) $Q = 4q - q - q - q - q = 0$



$\vec p = -qs\vec e_x - q(-s\vec e_x) - qs\vec e_y - q(-s\vec e_y) = 0$

$\overleftrightarrow{Q}_{(2)} = -qs^2\left[\vec e_x\vec e_x + (-\vec e_x)(-\vec e_x) + \vec e_y\vec e_y + (-\vec e_y)(-\vec e_y)\right]$

$= -2qs^2(\vec e_x\vec e_x + \vec e_y\vec e_y) = 2qs^2(\vec e_z\vec e_z - \overleftrightarrow{g})$

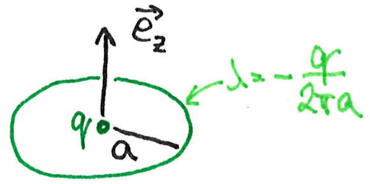
$K^{ab} = M^{ab}_{(2)} = 3Q^{\langle ab\rangle}_{(2)} = 6qs^2\, e_z^{\langle a} e_z^{b\rangle} = 2qs^2\left(2e_z^a e_z^b - e_x^a e_x^b - e_y^a e_y^b\right)$

výpočet vzhledem k $\tilde P = P - s\vec e_x$

$Q^{ab}_{(2)} = qs^2\left(4\vec e_x\vec e_x - (2\vec e_x)(2\vec e_x) - (\vec e_x+\vec e_y)(\vec e_x+\vec e_y) - (\vec e_x-\vec e_y)(\vec e_x-\vec e_y)\right)$

$= -2qs^2(\vec e_x\vec e_x + \vec e_y\vec e_y)$ ← stejné jako vůči P

4) $Q = q + \int \lambda\, ds = q - q = 0$

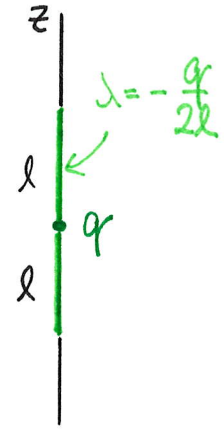


$\vec p = \int \vec r \lambda\, ds = 0$

$Q^{ab}_{(2)} = \int r^a r^b \lambda\, ds = \frac{2\pi a}{3}\lambda a^2 g_\perp^{ab}$ ⇐ $\int e^a e^b d\varphi = \frac{2\pi}{3} g^{ab}$ ⇐ symetrie stopa

$= -\frac{1}{3}qa^2\left(e_x^a e_x^b + e_y^a e_y^b\right) = \frac{1}{3}qa^2\left(e_z^a e_z^b - g^{ab}\right)$

$K^{ab} = M^{ab}_{(2)} = 3Q^{\langle ab\rangle}_{(2)} = qa^2\, e_z^{\langle a} e_z^{b\rangle} = \frac{1}{3}qa^2\left(2e_z^a e_z^b - e_x^a e_x^b - e_y^a e_y^b\right)$



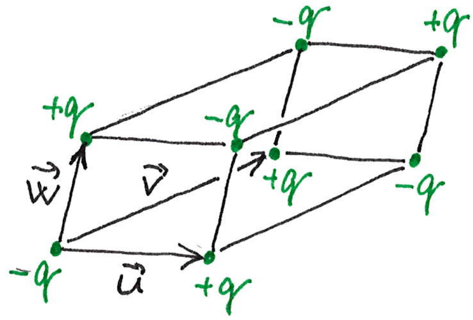
5) $$Q = q + \int \lambda \, ds = q - q = 0$$

$$\vec{p} = \int \vec{r} \lambda \, ds = 0$$

$$\overleftrightarrow{Q}_{(2)} = \lambda \vec{e}_z \vec{e}_z \int_{-\ell}^{\ell} z^2 dz = -\frac{q}{2\ell} \frac{2}{3} \ell^3 \vec{e}_z \vec{e}_z = -\frac{1}{3} q \ell^2 \vec{e}_z \vec{e}_z$$

$$K^{ab} = M^{ab}_{(2)} = 3 Q^{\langle ab \rangle}_{(2)} = -q \ell^2 e_z^{\langle a} e_z^{b \rangle}$$

$$= -\frac{1}{3} q \ell^2 \left(2 e_z^a e_z^b - e_x^a e_x^b - e_y^a e_y^b \right)$$



6) $$Q = 0$$

$$\vec{p} = \vec{M}_{(1)} = \vec{Q}_{(1)} = \frac{1}{2} q \Big[(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}) - (-\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}) - (\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}) + (-\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}) - (\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}) + (-\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}) - (-\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}) + (\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}) \Big] = 0$$

$$Q^{ab}_{(2)} = \frac{q}{4} \Big[(u+v+w)^a (u+v+w)^b - (-u-v-w)^a (-u-v-w)^b - (u+v-w)^a (u+v-w)^b + (-u-v+w)^a (-u-v+w)^b - (u-v+w)^a (u-v+w)^b + (-u+v-w)^a (-u+v-w)^b - (-u+v+w)^a (-u+v+w)^b + (u-v-w)^a (u-v-w)^b \Big] = 0$$

$$K^{ab} = M^{ab}_{(2)} = 3 Q^{\langle ab \rangle}_{(2)} = 0$$

$$Q^{abc}_{(3)} = \frac{q}{8} \Big[(u+v+w)^a (u+v+w)^b (u+v+w)^c - (-u-v-w)^a (-u-v-w)^b (-u-v-w)^c - (u+v-w)^a (u+v-w)^b (u+v-w)^c + \dots - (u-v+w)^a (u-v+w)^b (u-v+w)^c + \dots - (-u+v+w)^a (-u+v+w)^b (-u+v+w)^c + \dots \Big] =$$

$$= 6 q \, u^{(a} v^b w^{c)}$$

$$M^{abc}_{(3)} = 15 Q^{\langle abc \rangle}_{(3)} = 90 q \, u^{\langle a} v^b w^{c \rangle}$$

Kanonická reprezentace multipólů

neexistuje jednoduchá kanonická reprezentace
vyšších multipólů

pro $l = 1, 2, 3$ viz příklady 1) 2) 6)

matematická reprezentace

libovolný symetrický bezestopý tenzor stupně l lze
parametrizovat velikostí a l jednotkovými směry

$$M_{(l)}^{a_1 \dots a_l} = M \, e_1^{\langle a_1} \cdots e_l^{a_l \rangle}$$

$$\overleftrightarrow{M}_{(l)} = M \langle \vec{e}_1 \cdots \vec{e}_l \rangle$$

kde

M "velikost" – 1 parametr

$\vec{e}_j$ jednotkový vektor – 2 parametry ϑ_j, φ_j

$\Downarrow$

$2l+1$ nezávislých parametrů

obtížné dokázat

není moc užitečné

Nezávislé komponenty multipólů

zvolme komplexní bázi

$$\vec{f}_0 = \vec{e}_z \qquad \vec{f}_0^{\,2} = 1$$

$$\vec{f}_+ = \vec{e}_x + i\vec{e}_y \qquad \vec{f}_+^{\,2} = \vec{e}_x^{\,2} - \vec{e}_y^{\,2} = 0$$

$$\vec{f}_- = \vec{e}_x - i\vec{e}_y \qquad \vec{f}_-^{\,2} = \vec{e}_x^{\,2} - \vec{e}_y^{\,2} = 0$$

$$\vec{f}_0 \cdot \vec{f}_+ = \vec{f}_0 \cdot \vec{f}_- = 0 \qquad \vec{f}_- \cdot \vec{f}_+ = \vec{e}_x^{\,2} + \vec{e}_y^{\,2} = 2$$

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad g^{ab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

neortogonální báze!
tzv. "nulová" báze

stopa symetrického tenzoru

$$T_{ab}\, g^{ab} = T_{00} + \frac{1}{2} T_{+-} + \frac{1}{2} T_{-+} = T_{00} + T_{-+}$$

pro bezestopý tenzor

$$0 = T_{00} + T_{-+} \quad \Rightarrow \quad T_{-+} = T_{+-} = -T_{00}$$

nezávislé složky symetrického bezestopého tenzoru

$$T_{--\cdots-0\cdots0} \qquad T_{00\cdots0} \qquad T_{++\cdots+0\cdots0}$$

všechny ostatní lze na tyto převést

$T_{0\cdots0}$ reálné

$T_{-\cdots-0\cdots0}\,,\ T_{+\cdots+0\cdots0}$ komplexní $\quad T_{\underbrace{+\cdots+}_{m}0\cdots0} = T^*_{\underbrace{-\cdots-}_{m}0\cdots0}$

pro stupeň l máme $2l+1$ reálných složek

značení pro multipóly

$$M_l^m = \left\{ \begin{array}{ll} m>0 & \square\ M_{(l)\overbrace{+\cdots+}^{m}0\cdots0} \\ m=0 & \square\ M_{(l)0\cdots\cdots0} \\ m<0 & \square\ M_{(l)\underbrace{-\cdots-}_{-m}0\cdots0} \end{array} \right\} \quad \text{pro } m=-l,\dots,l$$

Legendreovy polynomy

Polynomy $\mathsf{P}_l(\zeta)$ stupně $l \in \mathbb{N}_0$ definované na intervalu $\zeta \in \langle -1, 1\rangle$.
Explicitní vyjádření:

$$\mathsf{P}_l(\zeta) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}_0 \\ n \leqslant l}} \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{(2l-n)!}{n!(l-n)!(l-2n)!} \zeta^{l-2n}$$

Rodriguesova formule:

$$\mathsf{P}_l(\zeta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\zeta^l} (\zeta^2 - 1)^l$$

Legendreova rovnice:

$$(1-\zeta^2)\frac{d^2\mathsf{P}_l}{d\zeta^2}(\zeta) - 2\zeta\frac{d\mathsf{P}_l}{d\zeta}(\zeta) + l(l+1)\mathsf{P}_l(\zeta) = 0$$

Legendreovy polynomy jako vlastní funkce operátoru:

$$-\frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta^2)\frac{d}{d\zeta}\right]\mathsf{P}_l(\zeta) = l(l+1)\,\mathsf{P}_l(\zeta)$$

Rekurentní vztah:

$$\mathsf{P}_l(\zeta) = \frac{2l-1}{l}\,\zeta\,\mathsf{P}_{l-1}(\zeta) - \frac{l-1}{l}\,\mathsf{P}_{l-2}(\zeta) \qquad \mathsf{P}_0(\zeta) = 1 \quad \mathsf{P}_1(\zeta) = \zeta$$

Generující funkce:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta t + t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathsf{P}_l(\zeta)\, t^l$$

Krajní hodnoty:

$$\mathsf{P}_l(\pm 1) = (\pm 1)^l$$

Relace ortogonality:

$$\int_{-1}^{1} \mathsf{P}_l(\zeta)\mathsf{P}_{l'}(\zeta) d\zeta = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} \qquad \int_{0}^{\pi} \mathsf{P}_l(\cos\vartheta)\mathsf{P}_{l'}(\cos\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$$

Relace úplnosti:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2}\mathsf{P}_l(\zeta)\mathsf{P}_l(\zeta') = \delta(\zeta - \zeta') \qquad \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2}\mathsf{P}_l(\cos\vartheta)\mathsf{P}_l(\cos\vartheta') = \frac{1}{\sin\vartheta}\delta(\vartheta - \vartheta')$$

Separace úhlů:

$$\int \mathsf{P}_l(\vec{e}\cdot\vec{e}_1)\,\mathsf{P}_l(\vec{e}\cdot\vec{e}_2)\,d\Omega = \frac{4\pi}{2l+1}\mathsf{P}_l(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1)$$

Legendreovy polynomy pro $l \leqslant 4$:

$$\mathsf{P}_0(\zeta) = 1$$
$$\mathsf{P}_1(\zeta) = \zeta$$
$$\mathsf{P}_2(\zeta) = \frac{3}{2}\zeta^2 - \frac{1}{2}$$
$$\mathsf{P}_3(\zeta) = \frac{5}{2}\zeta^3 - \frac{3}{2}\zeta$$
$$\mathsf{P}_4(\zeta) = \frac{35}{8}\zeta^4 - \frac{15}{4}\zeta^2 + \frac{3}{8}$$

Přidružené Legendreovy polynomy

Obecná Legendreova rovnice pro přidružené Legendreovy funkce:

$$\frac{d}{d\zeta}\Big((1-\zeta^2)\frac{d\mathsf{P}_l^m}{d\zeta}(\zeta)\Big) + \Big(l(l+1) - \frac{m^2}{1-\zeta^2}\Big)\mathsf{P}_l^m(\zeta) = 0$$

Přidružené Legendreovy "polynomy" – celočíselné parametry $l = 0, 1, \ldots,\ m = -l, \ldots, l$:

$$\mathsf{P}_l^m(\zeta) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{l+m}}{d\zeta^{l+m}}(\zeta^2-1)^l$$

Vztah k Legandreovým polynomům:

$$\mathsf{P}_l^m(\zeta) = (-1)^m(1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{d\zeta^m}\mathsf{P}_l(\zeta) \quad m \geqslant 0 \qquad \mathsf{P}_l^0(\zeta) = \mathsf{P}_l(\zeta)$$

Vztah pro opačné m:

$$\mathsf{P}_l^{-m}(\zeta) = (-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\,\mathsf{P}_l^m$$

Relace ortogonality:

$$\int_{-1}^{1} \mathsf{P}_l^m(\zeta)\mathsf{P}_{l'}^m(\zeta)\,d\zeta = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,\delta_{ll'} \qquad \int_{-1}^{1} \mathsf{P}_l^m(\zeta)\mathsf{P}_l^{m'}(\zeta)\,\frac{d\zeta}{1-\zeta^2} = \frac{1}{m}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,\delta_{mm'}$$

Kulové funkce (sférické harmoniky)

Parametrizace jednotkového vektoru $\vec{e}$ pomocí sférických úhlů:

$$\vec{e} = \cos\vartheta\,\vec{e}_z + \sin\vartheta\,\big(\cos\vartheta\,\vec{e}_x + \sin\vartheta\,\vec{e}_y\big)$$

Integrační element na jednotkové sféře:

$$d\Omega \equiv d\vec{e} = \sin\vartheta\,d\vartheta d\varphi = d\zeta d\varphi \qquad \zeta = \cos\vartheta$$

2D δ-funkce na jednotkové sféře:

$$\delta^{(2)}(\vec{e}|\vec{e}') = \frac{1}{\sin\vartheta}\,\delta(\vartheta - \vartheta')\delta(\varphi - \varphi') = \delta(\zeta - \zeta')\delta(\varphi - \varphi')$$

$$f(\vec{e}) = \int \delta^{(2)}(\vec{e}|\vec{e}')\,f(\vec{e}')\,d\Omega' = \int \delta(\vartheta - \vartheta')\delta(\varphi - \varphi')\,f(\vartheta', \varphi')\,d\vartheta' d\varphi'$$

Kulové funkce – komplexní funkce na jednotkové sféře ($l = 0, 1 \ldots,\ m = -l, \ldots, l$):

$$\mathsf{Y}_l^m(\vec{e}) \equiv \mathsf{Y}_l^m(\vartheta, \varphi) = (-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,\mathsf{P}_l^m(\cos\vartheta)\exp(im\varphi)$$

Komplexně sdružené funkce:

$$\mathsf{Y}_l^m(\vec{e})^* = (-1)^m\,\mathsf{Y}_l^{-m}(\vec{e})$$

Kulové funkce jako vlastní funkce operátorů:

$$-\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right] + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\mathsf{Y}_l^m(\vartheta, \varphi) = l(l+1)\,\mathsf{Y}_l^m \qquad -i\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathsf{Y}_l^m = m\,\mathsf{Y}_l^m$$

Relace ortogonality a úplnosti:

$$\int \mathsf{Y}_l^m(\vec{e})\mathsf{Y}_{l'}^{m'}(\vec{e})^*\,d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \qquad \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \mathsf{Y}_l^m(\vec{e})\mathsf{Y}_l^m(\vec{e}')^* = \delta^{(2)}(\vec{e}|\vec{e}')$$

Rozklad Legandreova polynomu:

$$\sum_{m=-l}^{l} \mathsf{Y}_l^m(\vec{e})\,\mathsf{Y}_l^m(\vec{e}')^* = \frac{2l+1}{4\pi}\mathsf{P}_l(\vec{e}\cdot\vec{e}')$$

Rozklad faktoru $1/r$ do Legendreových polynomů

nalezli jsme

$$\frac{1}{r(X|X')} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l-1)!!}{l!} \frac{r'^{l}}{r^{l+1}} e^{a_1}\cdots e^{a_l}\, e'_{\langle a_1}\cdots e'_{a_l\rangle}$$

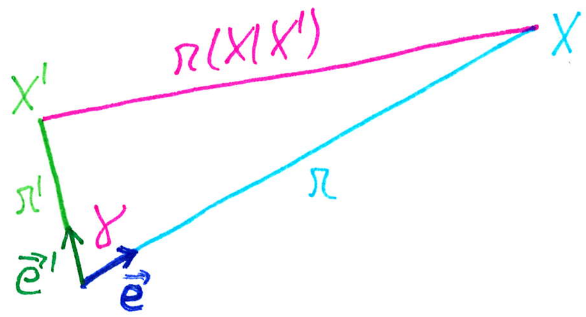
$$e^{a_1}\cdots e^{a_l}\Big(\underbrace{e'_{a_1}\cdots e'_{a_l}}_{(\vec e\cdot\vec e')^{l}} - \alpha_1 \underbrace{q_{(a_1a_2}e'_{a_3}\cdots e'_{a_l)}}_{(\vec e\cdot\vec e')^{l-2}} - \alpha_2 \underbrace{q_{(a_1a_2}q_{a_3a_4}e'_{a_5}\cdots e'_{a_l)}}_{(\vec e\cdot\vec e')^{l-4}} - \cdots\Big)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^{l}}{r^{l+1}} P_l(\vec e\cdot\vec e')$$

kde $P_l(q)$ jsou Legendreovy polynomy

- polynomy stupně l s mocninami $l, l-2, l-4\ldots$
- $P_l(q) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dq^l}(q^2-1)^l$

více viz tabulka



dostáváme tak

$$\frac{1}{r(X|X')} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^{l}}{r^{l+1}} P_l(\vec e\cdot\vec e')$$

z geometrie $r(X|X') = \sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma}$ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{r'}{r}\cos\gamma+\left(\frac{r'}{r}\right)^2}} = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\gamma)$$

vytvářející fce pro Legendreovy polynomy

konkrétně ($q = \vec e\cdot\vec e'$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{r(X|X')} = {} & \frac{1}{r} + \\ & + \frac{1}{1}\frac{r'}{r^2} e^a e'_a \\ & + \frac{1\cdot3}{1\cdot2}\frac{r'^2}{r^3} e^a e^b\left(e'_a e'_b - \frac13 q_{ab}\right) \\ & + \frac{1\cdot3\cdot5}{1\cdot2\cdot3}\frac{r'^3}{r^4} e^a e^b e^c\left(e'_a e'_b e'_c - \frac35 e'_{(a} q_{bc)}\right) \\ & + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\frac{r'^4}{r^5} e^a e^b e^c e^d\left(e'_a e'_b e'_c - \frac67 e'_{(a} e'_b q_{cd)} + \frac{3}{35} q_{(ab}q_{cd)}\right) \\ & + \ldots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = {} & \frac{1}{r} \\ & + \frac{r'}{r^2}\,\vec e\cdot\vec e' \\ & + \frac{r'^2}{r^3}\left(\frac32(\vec e\cdot\vec e')^2 - \frac12\right) \\ & + \frac{r'^3}{r^4}\left(\frac52(\vec e\cdot\vec e')^3 - \frac32(\vec e'\cdot\vec e')\right) \\ & + \frac{r'}{r^5}\left(\frac{35}{8}(\vec e\cdot\vec e')^4 - \frac{15}{4}(\vec e\cdot\vec e')^2 + \frac38\right) \\ & + \ldots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = {} & \frac{1}{r} P_0(q) \\ & + \frac{r'}{r^2} P_1(q) \\ & + \frac{r'^2}{r^3} P_2(q) \\ & + \frac{r'^3}{r^4} P_3(q) \\ & + \frac{r'^4}{r^5} P_4(q) \\ & + \ldots\end{aligned}$$

dostáváme

$$P_0(\xi) = 1$$

$$P_1(\xi) = \xi$$

$$P_2(\xi) = \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_3(\xi) = \frac{5}{2}\xi^3 - \frac{3}{2}\xi$$

$$P_4(\xi) = \frac{35}{8}\xi^4 - \frac{15}{4}\xi^2 + \frac{3}{8}$$

Rozklad faktoru $1/r$ do sférických harmonik

máme

$$\frac{1}{r(X|X')} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l-1)!!}{l!} \frac{r'^l}{r^{l+1}} \underbrace{e_{\langle a_1} \cdots e_{a_l\rangle} e'_{\langle b_1} \cdots e'_{b_l\rangle} q^{a_1 b_1} \cdots q^{a_l b_l}}$$

vyjádříme v bázi $\vec{f}_0, \vec{f}_+, \vec{f}_-$

součet přes komponenty bude obsahovat

$\langle + + - \quad 0 + \rangle \quad \langle - - + \cdots 0 - \rangle$

vždy doplňkové znaménka

všechny komponenty lze převést na

$\langle - \cdots - 0 \cdots 0\rangle \quad \langle 0 \cdots \cdots 0\rangle \quad \langle + \cdots + 0 \cdots 0\rangle$

dostáváme

$$\sum_{m=-l}^{l} \boxed{l, m}\; E_l^m\, E_l'^{-m}$$

↑ numerický faktor určující počet ekvivalentních komponent

$$q^{ab} = \begin{array}{c|ccc} & 0 & + & - \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 & 1/2 \\ - & 0 & 1/2 & 0 \end{array}$$

$$\vec{f}_0 = \vec{e}_z$$

$$\vec{f}_\pm = \vec{e}_x \pm i \vec{e}_y$$

kde

$$E_l^m = \begin{cases} m \geq 0 \quad e_{\langle \underbrace{+ \cdots e_+}_{m} e_0 \cdots e_0\rangle} = e_{\langle a_1} \cdots e_{a_l\rangle} f_+^{a_1} \cdots f_+^{a_m} f_0^{a_{m+1}} \cdots f_0^{a_l} \\ m \leq 0 \quad e_{\langle \underbrace{- \cdots e_-}_{-m} e_0 \cdots e_0\rangle} = e_{\langle a_1} \cdots e_{a_l\rangle} f_-^{a_1} \cdots f_-^{a_m} f_0^{a_{m+1}} \cdots f_0^{a_l} \end{cases}$$

např:

$$E_2^{-1} = \left(e_a e_b - \tfrac{1}{3} q_{ab}\right) \underbrace{\overset{1}{f_-^a}\, f_0^b}_{2} = (\vec{e}\cdot\vec{f}_0)\,(\vec{e}\cdot \underset{2}{\vec{f}_-})$$

$$E_4^2 = \left(e_a e_b e_c e_d - \tfrac{6}{7} e_{(a} e_b q_{cd)} + \tfrac{3}{35} q_{(ab} q_{cd)}\right) \underbrace{f_+^a f_+^b f_0^c f_0^d}_{4}$$

$$= (\text{polynom v } \vec{e}\cdot\vec{f}_0)\cdot(\vec{e}\cdot\vec{f}_+)^2$$

díky $f_+^a f_+^b q_{ab} = 0 \quad f_+^a f_0^b q_{ab} = 0$

platí $\vec{e}\cdot\vec{f}_\pm = \sin\vartheta \exp(\pm i\varphi) \quad \Leftarrow \quad \vec{e} = \cos\vartheta\, \vec{e}_z + \sin\vartheta(\cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y)$

$\vec{e}\cdot\vec{f}_0 = \cos\vartheta \qquad \vec{e}\cdot\vec{f}_\pm = \sin\vartheta(\cos\varphi \pm i \sin\varphi) = \sin\vartheta\, e^{\pm i\varphi}$

obecně

$$E_l^m = \boxed{l, m}\; P_l^m(\cos\vartheta)\, \exp(im\varphi) = \boxed{l,m}\; Y_l^m(\vec{e})$$

normalizace — funkce jen $\cos\vartheta = \vec{e}\cdot\vec{f}_0$ — φ-závislá část $(\vec{e}\cdot\vec{f}_+)^m$

dosazením do rozvoje $1/r$

$$\frac{1}{r(X|X')} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{r'^l}{r^{l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} Y_l^m(\vec{e})\, Y_l^m(\vec{e}\,')^*$$

plyne z $E_l'^{-m} = E_l'^{m\,*}$

zde Y_l^m jsou kulové funkce (sférické harmoniky)

$$Y_l^m(\vec{e}) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, P_l^m(\cos\vartheta) \exp(im\varphi)$$

zde P_l^m jsou přidružené Legendreovy polynomy

$$P_l^m(\xi) = \frac{(-1)^m}{2^l\, l!} (1-\xi^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}} (\xi^2-1)^l$$

platí

$$Y_l^m(\vec{e})^* = (-1)^m\, Y_l^{-m}(\vec{e})$$

více viz tabulka

dostáváme též

$$P_l(\vec{e}\cdot\vec{e}\,') = \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} Y_l^m(\vec{e})\, Y_l^m(\vec{e}\,')^*$$

Multipólový rozvoj ve sférických harmonikách

dosazením rozkladu $1/r$ do potenciálu

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{1}{r^{l+1}} Y_l^m(\vec{e}) \underbrace{\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int r'^l Y_l^{m*}(\vec{e}') \varrho(x') dV'}_{\text{sférický multipól } M_l^m}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^{l} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_l^m(\vec{e}) M_l^m$$

kde sférický multipól je

$$M_l^m = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int r^l Y_l^m(\vec{e})^* \varrho(x) dV$$

Axiálně symetrické pole

nechť nábojové rozložení nezávisí na φ
(axiálně symetrické rozložení)

$$\varrho(X) = \varrho(r,\vartheta)$$

pro sférický multipól dostáváme

$$M_\ell^m = \boxed{\ell, m} \int r^{\ell+2} P_\ell^m(\cos\vartheta)\, \exp(-im\varphi)\, \varrho(r,\vartheta) \sin\vartheta \, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

můžeme vytknout integrál přes φ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-im\varphi)\, d\varphi = \begin{cases} m \neq 0 & \left[\frac{i}{m} \exp(-im\varphi)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ m = 0 & \left[\varphi\right]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$M_\ell^m = 0 \quad \text{pro} \quad m \neq 0$$

$$M_\ell^0 = \int r^\ell P_\ell(\cos\vartheta)\, \varrho(r,\vartheta) \overbrace{r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi}^{dV}$$

$$= 2\pi \int r^{\ell+2} P_\ell(\xi)\, \varrho(r,\xi)\, dr\, d\xi \qquad \xi = \cos\vartheta$$

potenciál

$$\phi(X) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\vartheta)\, M_\ell^0$$

rozvoj potenciálu podél osy pro velké $z = \frac{1}{\eta}$

$$\phi(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{z^{\ell+1}} M_\ell^0 \qquad \text{na ose}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \left.\frac{d^\ell \phi}{d\eta^\ell}\right|_{\eta=0} \frac{1}{z^\ell} \overset{\ell \to \ell+1}{=} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(\ell+1)!} \left.\frac{d^{\ell+1}\phi}{d\eta^{\ell+1}}\right|_{\eta=0} \frac{1}{z^{\ell+1}}$$

porovnáním dostaneme multipóly ze znalosti potenciálu na ose

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} M_\ell^0 = \frac{1}{(\ell+1)!} \left.\frac{d^{\ell+1}\phi}{d\eta^{\ell+1}}\right|_{\eta=0} \qquad \eta = \frac{1}{z}$$