Dodatek: energie systému smyček

Energie magnetického pole smyček

= práce vykonaná proti EM poli při přípravě systému smyček
tj. práce potřebná k vytvoření stac. proudů a příslušných mag. polí

obtíže:

1) potřebujeme pohybovat smyčkami
2) potřeba udržovat konst. proud v přemisťované smyčce
3) potřeba udržovat mag. pole ve kterém smyčku přemisťujeme
   = udržovat proudy ve zdrojových smyčkách

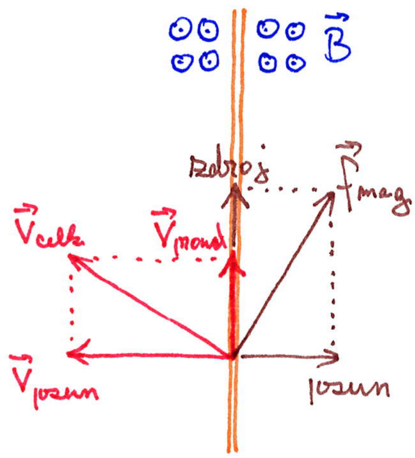
poznámky:

1) a 2) lze v rámci magnetostatiky
(pomalý pohyb "testovací" smyčky ve vnější fixním poli)

3) jde za rámec magnetostatiky
potřeba započítat EM indukci - vliv proměnného pole na smyčky
→ kvazistacionární přiblížení

Práce vykonaná proti mag. poli při posunu smyčky

$$\Delta A_{mag} = \Delta A_{posun} + \Delta A_{zdroj}$$



ΔA_{posun} - práce již vykonáme při posunu smyčky

ΔA_{zdroj} - práce vykonaná zdrojem ve smyčce potřebná k udržení konstantního proudu

magnetická síla nekoná práci!

$$\vec{F}_{mag} = q\,\vec{v}\times\vec{B} \qquad d\vec{s} = \vec{v}\,dt$$

$$dA_{mag} = \vec{F}_{mag}\cdot d\vec{s} = q(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v}\,dt = 0$$

$\Downarrow$

$$0 = \Delta A_{posun} + \Delta A_{zdroj} \qquad \Delta A_{posun} = -\Delta A_{zdroj}$$

Práce vykonaná zdrojem ve smyčce potřebná k udržení konstantního proudu

$$\Delta A_{zdroj} = \int_{t_z}^{t_K} dA_{zdroj}$$

$= $ zdroj působící proti $\vec{f}_{mag}$

$$= -\int_{t_z}^{t_K}\int_{\gamma_t} d\vec{s}\cdot d\vec{f}_{mag} =$$

$$= -\int_{t_z}^{t_K}\int_{\gamma_t} d\vec{s}\cdot(\vec{v}_{celk}\times\vec{B})\,dq \qquad dq \leftarrow I\,dt$$

$$\vec{v}_{celk} \leftarrow \vec{v}_{posun} + \vec{v}_{proud}$$

$\vec{v}_{proud}$ úměrný $d\vec{s} \Rightarrow$ nepřispívá

$$= I\int_V \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}}_{0}\,dV - I\int_{t_z}^{t_K}\int_{\gamma_t} d\vec{s}\cdot(\vec{v}_{posun}\times\vec{B})\,dt$$

přidaná nula $\qquad d\vec{r} = \vec{v}_{posun}\,dt$

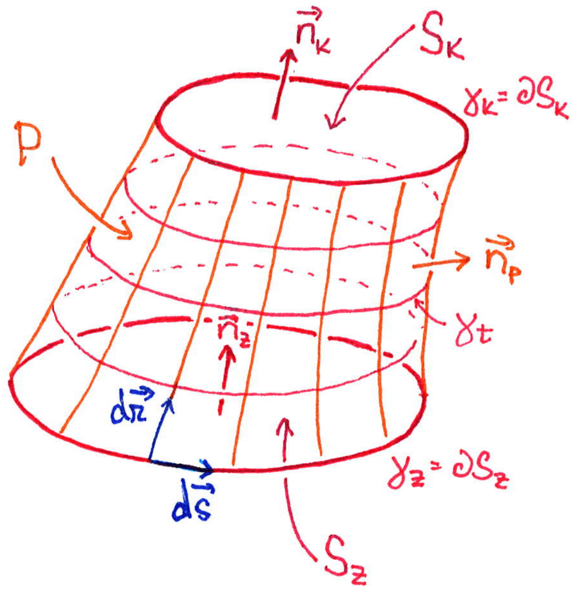
$$= I\int_{\partial V}\vec{B}\cdot d\vec{S} - I\int_P d\vec{s}\cdot(d\vec{r}\times\vec{B})$$

povrch opsaný posouvanou smyčkou

$$= I\left[\int_{S_K}\vec{B}\cdot d\vec{S} - \int_{S_z}\vec{B}\cdot d\vec{S} + \int_P \vec{B}\cdot d\vec{S} - \int_P \vec{B}\cdot\underbrace{(d\vec{s}\times d\vec{r})}_{d\vec{S}}\right]$$

$$\partial V = S_K - S_z + P$$

$$= I(\Phi_K - \Phi_z) = I\Delta\Phi$$



přesun smyčky z polohy $\gamma_z = \partial S_K$ do polohy $\gamma_K = \partial S_K$ uzavře objem V s hranicí $\partial V = S_K - S_z + P$ kde znaménko "–" indikuje opačnou volbu vnější normály ∂V a normály S_z

body smyčky se posouvají ve směru elementárního posunu $d\vec{r}$
posouvající smyčka vytvoří plochu P
plošný element na P je dán
$d\vec{S} = d\vec{s}\times d\vec{r}$

$\Downarrow$

$$\Delta A_{zdroj} = I\Delta\Phi$$
$$\Delta A_{posun} = -I\Delta\Phi$$

za krátký časový úsek

$$dA_{zdroj} = -\int_\gamma d\vec{f}_{mag}\cdot d\vec{s} = I\,d\Phi$$

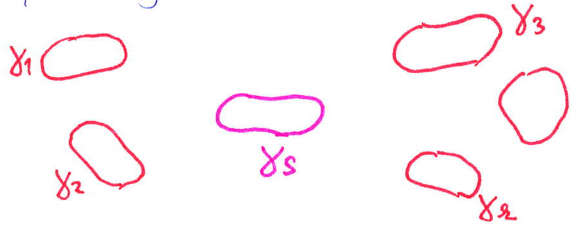
Práce vykonaná zdroji pole

uvažujme, že magnetické pole, ve kterém pohybujeme smyčkou γ_s je dáno systémem smyček γ_k $k=1\ldots N$

pro systém všech smyček $(\gamma_s+\gamma_k)$ v každém okamžiku jsou toky magnetického pole dány proudy skrze matici indukčn.

$$\Psi_s = L_{ss} I_s + \sum_l L_{sl} I_l$$

$$\Psi_k = L_{ks} I_s + \sum_l L_{kl} I_l$$



při pohybu smyčky γ_s se mění indukčnosti L_{ks} a L_{sk}

$$\frac{d\Psi_k}{dt} = \frac{dL_{ks}}{dt} I_s = -\mathcal{E}_k \qquad \Leftarrow \text{Faradayův zákon}$$

$$\frac{d\Psi_s}{dt} = \sum_l \frac{dL_{sl}}{dt} I_l = -\mathcal{E}_s$$

$\Downarrow$

$$\underbrace{I_s \frac{d\Psi_s}{dt}}_{\frac{dA_{\text{zdroj ve smyčce } \gamma_s}}{dt}} = \sum_l I_s \frac{dL_{sl}}{dt} I_l = \sum_l \underbrace{-\mathcal{E}_l I_l}_{\substack{\text{práce zdroje ve smyčce } \gamma_l \\ \text{na náboj } dq_l = I_l dt \text{ za čas } dt}} \qquad \Leftarrow L_{sl} = L_{ls}$$

$\Downarrow$

$$\Delta A_{\text{zdroj ve smyčce } \gamma_s} = \Delta A_{\text{zdroje pole}}$$

(zdroje ve smyčkách γ_k)

Celková práce vnějších zdrojů při přesunu smyčky γ_s

$$\begin{aligned} \Delta A_s &= \Delta A_{\text{posun}} + \Delta A_{\text{zdroj ve smyčce}} + \Delta A_{\text{zdroje pole}} \\ &= -I_s \Delta\Psi_s + I_s \Delta\Psi_s + I_s \Delta\Psi_s \\ &= I_s \Delta\Psi_s \end{aligned}$$

při přesunu smyčky z nekonečna, kde $\Psi_s|_{\text{počáteční}} = 0$

$$\Delta A_s = I_s \Psi_s$$

Magnetická energie jedné smyčky

samotná smyčka a její magnetické pole již nese energii
- k "rozpohybování" proudu je potřeba překonávat vlastní magnetické pole smyčky (samoindukčnost)

mějme fixovanou smyčku a pomalu zapínejme proud

změna energie je dána prací, kterou musíme proti samoindukčnosti překonávat

konkrétně, změna proudu změní magnetické pole a to naindukuje elektrické pole, které musíme překonat

$\Downarrow$

$$\frac{dU_s}{dt} = -\mathcal{E}_s I_s \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Faradayův} \\ \text{zákon}}}{=} I_s \frac{d\Phi_s}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \Phi = LI}}{=} L_{ss} I_s \frac{dI_s}{dt}$$

$\Downarrow$

$$U_s = \frac{1}{2} L_{ss} I_s^2 \qquad (\text{pro } I_s = 0 \text{ předpokládáme } U_s = 0)$$

Magnetická energie systému smyček

magnetická energie systému smyček γ_k $k = 1 \ldots N$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k,l} L_{kl} I_k I_l = \frac{1}{2} \sum_k I_k \Phi_{\text{skrze } \gamma_k}$$

důkaz indukcí
- pro jednu smyčku se redukuje na odvozený vztah
- indukční krok

  uvažujme systém smyček γ_k $k = 1 \ldots N$

  a přidejme další smyčku γ_s

metoda 1 – zapínání proudu v γ_s

metoda 2 – posun smyčky γ_s s proudem I_s do pole ostatních smyček

v každý okamžik jsou toky a proudy vztaženy

$$\Phi_s = L_{ss} I_s + \sum_l L_{sl} I_l$$

$$\Phi_k = L_{ks} I_s + \sum_l L_{kl} I_l$$

metoda zapínání proudu

smyčky γ_r i γ_s se nemění

$\Rightarrow$ matice indukčnosti je konstantní

$$\frac{dL_{rl}}{dt} = 0 \qquad \frac{dL_{sr}}{dt} = 0 \qquad \frac{dL_{rs}}{dt} = 0$$

měníme pouze proud I_s

$$\frac{dI_r}{dt} = 0$$

změna energie při zapínání proudu I_s

= práce vykonaná elektromotorickou silou ve smyčkách

$$\frac{dA}{dt} = -\mathcal{E}_s I_s - \sum_r \mathcal{E}_r I_r = I_s \frac{d\Psi_{skrze\,\gamma_s}}{dt} + \sum_r I_r \frac{d\Psi_{skrze\,\gamma_r}}{dt}$$

$$\Downarrow \quad = I_s L_{ss} \frac{dI_s}{dt} + \sum_r I_r L_{rs} \frac{dI_s}{dt}$$

$$\Delta A = \frac{1}{2} L_{ss} I_s^2 + \sum_r I_r \underbrace{L_{rs}}_{\frac{1}{2}(L_{rs}+L_{sr})} I_s$$

zapnutí proudu I_s: $0 \to I_s$

magnetická energie

$$U_{systém\,\gamma_r+\gamma_s} = U_{systém\,\gamma_r} + \Delta A =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r,l} L_{rl} I_r I_l + \frac{1}{2}\sum_r L_{rs} I_r I_s + \frac{1}{2}\sum_l L_{sl} I_s I_l + \frac{1}{2} L_{ss} I_s^2$$

což jsme chtěli ukázat

metoda přesunu smyčky γ_s v poli smyček γ_k

$$U_{\text{systém } \gamma_k + \gamma_s} = U_{\text{systém } \gamma_k} + \Delta A_{\substack{\text{práce všech zdrojů} \\ \text{při přesunu smyčky } \gamma_s}} + U_{\text{smyčka } \gamma_s}$$

energie samotných smyček γ_k

odvozeno výše

energie, kterou má smyčka γ_s již v nekonečnu

$$= \frac{1}{2} \sum_k I_k \Psi_{\substack{\text{skrze } \gamma_k \\ \text{bez příspěvku} \\ \text{od } \gamma_s}} + I_s \Psi_{\substack{\text{skrze } \gamma_s \\ \text{od ostatních} \\ \text{smyček}}} + \frac{1}{2} L_{ss} I_s^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_k \Big(I_k \Psi_{\substack{\text{skrze } \gamma_k \\ \text{bez příspěvku} \\ \text{od } \gamma_s}} + \underbrace{I_s \Psi_{\substack{\text{skrze } \gamma_s \\ \text{od pole smyčky} \\ \gamma_k}}}_{I_s L_{sk} I_k} \Big) + \frac{1}{2} I_s \underbrace{\Big(\Psi_{\substack{\text{skrze } \gamma_s \\ \text{od ostatních} \\ \text{smyček}}} + \Psi_{\substack{\text{skrze } \gamma_s \\ \text{od smyčky } \gamma_s}} \Big)}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_k \Big(I_k \Psi_{\substack{\text{skrze } \gamma_k \\ \text{bez příspěvku} \\ \text{od } \gamma_s}} + I_k \Psi_{\substack{\text{skrze } \gamma_k \\ \text{od smyčky } \gamma_s}} \Big)} + \frac{1}{2} I_s \Psi_{\text{skrze } \gamma_s}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_k I_k \Psi_{\text{skrze } \gamma_k} + \frac{1}{2} I_s \Psi_{\text{skrze } \gamma_s} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\text{všechny} \\ \text{smyčky}}} I_k \Psi_k$$

což jsme chtěli dokázat