Zákony zachování

Energie v elektrostatice.

Elektrostatický potenciál a potenciální energie. Interakční energie nábojů. Energie elektrostatického systému, vyjádření pomocí potenciálu a intenzity, lokalizace energie, positivita energie. Energie nabité koule, divergentní charakter energie bodového náboje, vztah celkové a interakční energie. Energie systému vodičů.

Energie v magnetostatice.

Vztahy pro magnetostatickou energii pomocí magnetické indukce a pomocí potenciálu, lokalizace energie. Energie systému smyček, vyjádření pomocí matice indukčnosti.

Lokální zákony zachování.

Lokální bilance veličiny, integrální vyjádření, diferenciální vyjádření, rovnice kontinuity, její prosotoročasová forma. Zákon zachování náboje.

Energie, hybnost a jejich toky.

Hustota elektromagnetické energie, tok elektromagnetické energie, Poyntingův vektor, bilance energie – Poyntingova věta. Hustota hybnosti elektromagnetického pole, tenzor toku hybnosti, tenzor napětí, bilance hybnosti. Prostoročasová formulace, tenzor energie-hybnosti, variace podle metriky, lokální zákon zachování 4-hybnosti a hustota 4-síly. Nabitý prach.

Elektrostatická energie

Potenciální energie a skalární potenciál

potenciální energie náboje v poli =

= práce, kterou musíme vykonat proti elektrickému poli na rozmístění nábojů

$$\Delta A_{\text{přesun náboje}} = -\int \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int q\vec{E}\cdot d\vec{s} = q\,\Delta\phi \qquad \Downarrow$$

změna energie

$$\Delta U = q\,\Delta\phi$$

potenciální energie

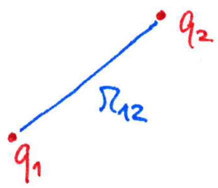
zvolíme potenciál v nekonečnu $\phi|_\infty = 0$

potenciální energie = přesun z nekonečna

$$U = q\phi$$

energie jednoho náboje v poli druhého

$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$



- symetrické $1 \leftrightarrow 2$
- zahrnuje pouze interakční energii mezi náboji

interakční energie systému nábojů

$$U_{\text{interakční}} = \sum_{\text{páry } k,l} U_{kl} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{k,l\\ k\neq l}} U_{kl} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{k,l\\ k\neq l}} \frac{q_k q_l}{r_{kl}}$$

spojité rozložení náboje

$$q_k \to dq|_X \to \varrho(X)\,dV \qquad r_{kl} \to r(X|X')$$

$$U_E = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\varrho(X)\,\varrho(X')}{r(X|X')}\,dV\,dV'$$

"přidali" jsme "diagonálu" $X = X'$

pro 3D a 2D rozložení náboje je to zanedbatelný příspěvek,

pro 1D a 0D to je netriviální změna vedoucí obecně k divergenci

Alternativní výrazy pro energii

$$U_E = \frac{1}{2}\int \varrho(X) \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\varrho(X')}{r(X|X')} dV'}_{\phi(X)} dV = \frac{1}{2}\int \varrho(X)\phi(X)\, dV$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\int (-\nabla^2\phi)\,\phi\, dV = \frac{\varepsilon_0}{2}\int (\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\phi)\, dV - \frac{\varepsilon_0}{2}\int \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{\nabla}\phi)\, dV$$

$$= \int \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 dV \quad - \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\partial V} \underset{\downarrow \frac{1}{r}}{\phi}\ \underset{\downarrow \frac{1}{r^2}}{\vec{\nabla}\phi}\cdot \underset{\downarrow r^2}{d\vec{S}} \rightarrow \frac{1}{r} \rightarrow 0 \text{ malé}$$

∂V – hranice v nekonečnu

$\Downarrow$

$$U_E = \frac{1}{2}\int \varrho\phi\, dV$$

$$U_E = \int \frac{\varepsilon_0}{2} E^2\, dV$$

lokalizace energie

odvozené výrazy lze interpretovat, že hustota energie je

$\frac{1}{2}\varrho\phi$ nebo $\frac{\varepsilon_0}{2}E^2$

v elektrostatice nelze rozhodnout, co je preferované.
požadavek lokálního zachování energie v plné teorii ukazuje, že správná volba pro hustotu energie je

$$u_E = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2$$

positivita energie

$$U_E = \int \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 dV$$

je explicitně positivní

ve vyjádření $U_E = \int \varrho\phi\, dV$ to není vidět

interakční energie $U_{int} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{k,l \\ k\neq l}} \frac{q_k q_l}{r_{kl}}$ není vždy pozitivní

- nezahrnuje vlastní energii bodových nábojů
- ta je pozitivní a divergující, celková energie tak je pozitivní (ale nekonečná)

Energie systému nabitých vodičů

systém vodičů popsán maticí kapacity

$$Q_k = \sum_l C_{kl} \Phi_l$$

energie

$$U_E = \frac{1}{2}\int \varrho \phi \, dV =$$

náboj lokalizovaný na povrchu vodičů
potenciál konstantní na vodičích $\phi|_{\partial V_k} = \Phi_k$

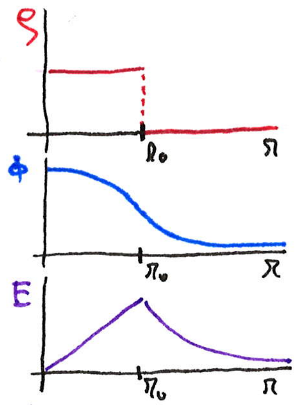
$$= \frac{1}{2}\sum_k \int_{\partial V_k} \sigma_k \Phi_k \, dS_k = \frac{1}{2}\sum_k \Phi_k \underbrace{\int_{\partial V_k} \sigma_k \, dS_k}_{Q_k}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_k Q_k \Phi_k$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k,l} C_{kl} \Phi_k \Phi_l = \frac{1}{2}\sum_{k,l} C^{-1}_{kl} Q_k Q_l$$

energie je vždy kladná $\Rightarrow$
C_{kl} pozitivně definitní matice

Př: energie homogenně nabité koule



$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} = \text{konst} \qquad r < r_0$$

$$\rho = 0 \qquad r > r_0$$

na cvičení jsme našli

$$\phi = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{r_0} - \frac{r^2}{r_0^3}\right) \quad r < r_0 \qquad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{r_0^3}\vec{e}_r \quad r < r_0$$

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \quad r > r_0 \qquad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{e}_r \quad r > r_0$$

energie

$$U = \frac{1}{2}\int_{r<r_0} \frac{3Q}{4\pi r_0^3}\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{r_0} - \frac{r^2}{r_0^3}\right) r^2 dr \, \underbrace{4\pi}_{\int \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi} = \qquad \leftarrow \frac{1}{2}\int \rho\phi \, dV$$

$$= \frac{3Q^2}{16\pi\varepsilon_0 r_0^5}\int_0^{r_0}\left(3r_0^2 r^2 - r^4\right) dr = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$$

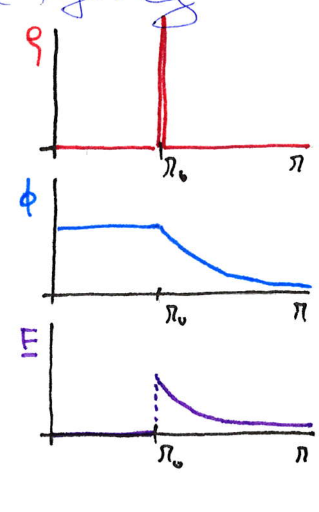
$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\left(\int_{r<r_0}\frac{r^2}{r_0^6} r^2 dr \, 4\pi + \int_{r>r_0}\frac{1}{r^4} r^2 dr \, 4\pi\right) = \qquad \leftarrow \int \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 dV$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\left[\frac{1}{5}\frac{r^5}{r_0^6}\right]_0^{r_0} + \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_0}^{\infty}\right) = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$$

pro jiné sféricky symetrické rozložení náboje se dostane jiný numerický prefaktor

např. pro plošný náboj na povrchu sféry

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$$



Odhad velikosti samointerakční energie

při přechodu od bodových nábojů ke spojitému rozložení jsme změnili výraz pro interakční energii na plnou energii přidáním členu

$$\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k}\frac{q_k q_k}{r_{kk}} \approx \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{X\approx X'}\frac{\varrho(X)\varrho(X')}{r(X|X')}\,dV\,dV'$$

$r_{kk}=0$ čili $\frac{1}{r_{kk}}$ zjevně diverguje

ve spojité variantě divergence $\frac{1}{r}$ jde proti "malosti" nábojů $dq=\varrho\,dV$

odhadneme chování "diagonálního" členu diskretizací prostoru a aproximujeme samointerakční energii každé elementární buňky jako $\sim\frac{\Delta Q^2}{r}$ ΔQ náboj v buňce, r velikost buňky (motivace samointerakční energie koule)

délku L (velikost systému) rozdělíme na N buněk a zajímá nás chování $N\to\infty$

charakter zdroje	náboj v buňce	energie na diagonále
3D	$\Delta Q\sim\frac{Q}{N^3}$	$\sum\limits_{3D}\frac{\Delta Q^2}{r}\sim N^3\left(\frac{Q}{N^3}\right)^2\frac{1}{L/N}\sim\frac{1}{N^2}\to 0$
2D	$\Delta Q\sim\frac{Q}{N^2}$	$\sum\limits_{2D}\frac{\Delta Q^2}{r}\sim N^2\left(\frac{Q}{N^2}\right)^2\frac{1}{L/N}\sim\frac{1}{N}\to 0$
1D	$\Delta Q\sim\frac{Q}{N}$	$\sum\limits_{1D}\frac{\Delta Q^2}{r}\sim N\left(\frac{Q}{N}\right)^2\frac{1}{L/N}\sim 1$ netriviální [ve skutečnosti log divergence]
0D	$\Delta Q\sim Q$	$\frac{\Delta Q^2}{r}\sim Q^2\frac{1}{L/N}\sim N$ diverguje

interakční energie je ekvivalentní plné energii pro zdroje 3D a 2D charakteru

pro zdroje 1D a 0D se tyto energie liší a pro 0D plná energie diverguje

Magnetostatická energie

Povaha magnetostatické energie

chtěli bychom definovat

energie = práce konaná proti poli potřebná k ustanovení proudů a jejich magnetického pole

nelze provést v čisté magnetostatice

- je nutno pohybovat "smyčkami" proudů
- změna proudů, i když pomalá, jde za hranici magnetostatiky
- potřeba alespoň kvazistacionární přiblížení viz diskuze kvazistac. přiblížení a Faradayova zák.

Magnetostatická energie

$$U_M = \int \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} B^2 \, dV \qquad u_M = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} B^2$$

celková energie   hustota energie

- viz postup zmíněný výše
- viz bilance energie v plné teorii (dále)

Alternativní výrazy pro energii

$$U_M = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \int B^2 dV = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \int \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \, dV = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \int \left(\vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \right) dV$$

$$= \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \vec{j} \, dV + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \int_{\partial V} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \vec{j} \, dV$$

hranice v nekonečnu → malé

$$\Downarrow$$

$$U_M = \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \vec{j} \, dV$$

Systém proudových smyček

systém smyček je popsán maticí indukčnosti

$$\Psi_k = \sum_l L_{kl} I_l$$

energie

$$U_M = \frac{1}{2}\int \vec{A}\cdot\vec{j}\,dV =$$

přiblížení tenkých vodičů - smyčky γ_k
proud I_k konstantní - lze vytknout

$$= \frac{1}{2}\sum_k I_k \int_{\gamma_k=\partial S_k} \vec{A}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{2}\sum_k I_k \int_{S_k} \underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{A})}_{\vec{B}}\cdot d\vec{S} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_k \Psi_k I_k$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k,l} L_{kl} I_k I_l$$

obecné proudové rozložení lze chápat jako superpozice tenkých smyček s elementárním proudem dI

vskutku, podmínka stacionarity $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=0$ říká, že orbity proudu nezačínají a nekončí, tj. tvoří (zobecněné) smyčky

energii pak můžeme psát

$$U_M = \frac{1}{2}\sum_{k,l} \underbrace{\Psi_{\text{skrze } \gamma_k \text{ od pole smyčky } \gamma_l}}_{L_{kl} I_l} I_k$$

tento vzorec je odvozován výpočtem práce vykonané na systému pomocí kvazistacionárního přiblížení

Lokální zákony zachování

veličina se lokálně zachovává, pokud v každé prostoročasové oblasti platí bilance:

veličina na konci − veličina na začátku
+ množství veličiny, které uteče z oblasti pryč
= množství veličiny, které vzniklo

$$\int_V w\big|_{t_k} dV - \int_V w\big|_{t_z} dV + \int_{t_z}^{t_k}\int_{\partial V} \vec{w}\cdot d\vec{S}\,dt = \int_{t_z}^{t_k}\int_V s\,dV\,dt$$

w objemová hustota veličiny
$\vec{w}$ hustota toku
s objemová hustota tvorby veličiny

$$\Downarrow \int_{t_z}^{t_k}\int_V \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{w}\right) dV\,dt = \int_{t_z}^{t_k}\int_V s\,dV\,dt$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{w} = s$$

rovnice kontinuity

relativistická formulace

$$\nabla_\mu w^\mu = s \qquad w^\mu = \begin{bmatrix} c w \\ \vec{w} \end{bmatrix} \quad \text{4-tok veličiny}$$

zákon zachování náboje

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$ náboj nevzniká a nezaniká $\Rightarrow s = 0$

$$\nabla_\mu j^\mu = 0$$

plyne z Maxwellových rovnic

$$\nabla_\mu j^\mu = \varepsilon_0 c^2 \nabla_\mu \nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0$$ díky symetrii $\nabla_\mu\nabla_\nu$ a antisym. $F^{\mu\nu}$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}\right) = \underline{\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}} + c^2\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B}}_{0} - \underline{\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}} = 0$$

Energie, hybnost a jejich toky

bilance energie a hybnosti v plné teorii

Maxwellovy rovnice

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

bilance energie EM pole

hustota práce konané proti Lorentzově síle

náboji a proudy vázanými na (neelektromagnetický) mechanický systém

= energie dodaná do EM pole

$= -\vec{j}\cdot\vec{E} = -w$

$$-w = -\vec{j}\cdot\vec{E} = \varepsilon_0 c^2\left(-\vec{\nabla}\times\vec{B} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot\vec{E} =$$

$$= \varepsilon_0 c^2\left(\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) - \vec{B}\cdot\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{E})}_{-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}} + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial}{\partial t}E^2\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}B^2\right] + \varepsilon_0 c^2\,\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B})$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S}$$

$u = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}B^2$ hustota energie EM pole

$\vec{S} = \varepsilon_0 c^2\,\vec{E}\times\vec{B}$ tok energie EM pole – Poyntingův vektor

$-w = -\vec{j}\cdot\vec{E}$ hustota tvorby EM energie

= úbytek energie mechanického systému

$U_{EM} = \int\left(\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}B^2\right)dV$ celková energie

$\int_S \vec{S}\cdot d\vec{S}$ rychlost toku energie skrze plochu S

$\int_{t_z}^{t_k}\int_S \vec{S}\cdot d\vec{S}\,dt$ energie proteklá skrze plochu S za čas $\langle t_z, t_k\rangle$

bilance hybnosti EM pole

hustota síly potřebné proti Lorentzově síle
ze strany (neelektromagnetického) mechanického systému

$$= -\vec{f} = -\left(\rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}\right)$$

$$= -\varepsilon_0(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E} - \varepsilon_0 c^2(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}$$

$$= -\varepsilon_0(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E} - \varepsilon_0 c^2\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})}_{0}\vec{B} + \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B})$$
$$+ \varepsilon_0\vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) + \varepsilon_0 c^2\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}) - \varepsilon_0(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E} - \varepsilon_0\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\vec{E} + \varepsilon_0(\vec{\nabla}\vec{E})\cdot\vec{E}$$
$$- \varepsilon_0 c^2(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\vec{B} - \varepsilon_0 c^2\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\vec{B} + \varepsilon_0 c^2(\vec{\nabla}\vec{B})\cdot\vec{B}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}) - \varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{E}\vec{E} + c^2\vec{B}\vec{B} - \frac{1}{2}(E^2 + c^2B^2)\overleftrightarrow{g}^{-1}\right]$$

$$= \frac{\partial\vec{g}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{T}$$

$\overleftrightarrow{g}$ 3D metrika

$\vec{g} = \varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}$ hustota hybnosti

$\overleftrightarrow{T} = -\overleftrightarrow{\tau} = -\varepsilon_0\left(\vec{E}\vec{E} + c^2\vec{B}\vec{B} - \frac{1}{2}(E^2 + c^2B^2)\overleftrightarrow{g}^{-1}\right)$ tenzor toku hybnosti

$\overleftrightarrow{\tau}$ Maxwellův tenzor napětí

$-\vec{f}$ změna hybnosti EM pole

Prostoročasový zápis

metrický tenzor energie-hybnosti

$$T^{\mu\alpha}_{EM} = \begin{bmatrix} u & c\vec{g} \\ \frac{1}{c}\vec{S} & \overleftrightarrow{T} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{hustota 4-hybnosti} \\ \leftarrow \text{tok hustoty 4-hybnosti} \end{matrix}$$

bilance hustoty 4-hybnosti

$$\nabla_\mu T^{\mu\alpha}_{EM} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S}\right) \\ \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{T} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} w/c \\ \vec{f} \end{bmatrix} = -\underset{\substack{\uparrow \\ \text{hustota 4-síly}}}{\Phi^\mu} = -F^\mu{}_\nu j^\nu$$

zápis pomocí Maxwellova tenzoru $F_{\mu\nu}$

$$T^{\mu\nu}_{EM} = \varepsilon_0 c^2 \left(F^{\mu\kappa} F^{\nu\lambda} \eta_{\kappa\lambda} - \frac{1}{4} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} \eta^{\mu\nu} \right)$$

lze dostat variací akce podle metriky

$$T^{\mu\nu}_{EM} = 2c \frac{\delta S_{EM}}{\delta \eta_{\mu\nu}}$$

Pozn: pokud $d^4\Omega$ zahrnujeme do variace tak $T^{\mu\nu}_{EM} = \frac{2c}{d^4\Omega}\frac{\delta S_{EM}}{\delta \eta_{\mu\nu}}$

potřeba znát

$$\delta\, d^4\Omega = \frac{1}{2}\eta^{\kappa\lambda}\delta\eta_{\kappa\lambda}\, d^4\Omega \qquad \delta\eta^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\kappa}\eta^{\nu\lambda}\delta\eta_{\kappa\lambda}$$

$$S = \frac{1}{c}\int \mathcal{L}\, d^4\Omega = -\frac{\varepsilon_0 c}{4}\int F_{\mu\kappa}F_{\nu\lambda}\eta^{\mu\nu}\eta^{\kappa\lambda}\, d^4\Omega$$

pozor na polohu indexů
$F_{\mu\nu}$ neobsahuje metriku

$$\delta S = \frac{\varepsilon_0 c}{4}\int \left[-2F_{\mu\kappa}F_{\nu\lambda}\eta^{\mu\nu}\delta\eta^{\kappa\lambda} - \frac{1}{2}F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}\eta^{\mu\nu}\delta\eta_{\mu\nu}\right] d^4\Omega$$

$$= \frac{\varepsilon_0 c}{2}\int \left[F_{\mu\kappa}F_{\nu\lambda}\eta^{\mu\nu}\eta^{\kappa\alpha}\eta^{\lambda\beta} - \frac{1}{4}F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}\eta^{\alpha\beta}\right]\delta\eta_{\alpha\beta}\, d^4\Omega$$

$$\Rightarrow T^{\alpha\beta}_{EM} = 2c\frac{\delta S_{EM}}{\delta\eta_{\alpha\beta}} = \varepsilon_0 c^2\left[F^{\alpha\kappa}F^{\beta\lambda}\eta_{\kappa\lambda} - \frac{1}{4}F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}\eta^{\alpha\beta}\right]$$

Lokální zákon zachování 4-hybnosti
jako důsledek kovariance akce

celkové akce invariantní vůči transformaci "všeho"
pomocí difeomorfismu naindukujeme změnu
všech fyzikálních polí
změníme též metriku (kinematické struktura v STR)

kovariance akce – při takovéto změně se akce nezmění
jedná se v podstatě o "přečíslování" bodů

difeomorfismus
spojité posunutí podél vektorového pole $\delta\xi^\mu$
indukuje změnu všech polí

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \delta A_\mu$$
$$\psi \to \psi' = \psi + \delta\psi$$
atd.
$$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$$

dáno Lieovou derivací pole podél $\delta\xi$

$\delta g^{\mu\nu} = \nabla^{(\mu}\delta\xi^{\nu)}$ ← pro metriku

změna akce

$$S(A_\mu, \psi, \dots ; g_{\mu\nu})$$

$$\delta S_{dif} = \int \underbrace{\frac{\delta S}{\delta A_\mu}}_{0} \delta A_\mu \, d^4\Omega + \int \underbrace{\frac{\delta S}{\delta \psi}}_{0} \delta\psi \, d^4\Omega + \dots + \int \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} \, d^4\Omega = 0$$

⇓ pohybové rovnice pro $A_\mu, \psi, \dots$

$$0 = \int \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \nabla_{(\mu}\delta\xi_{\nu)} \, d^4\Omega = -\int \left(\nabla_\mu \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}\right) \delta\xi_\nu \, d^4\Omega$$

⇓

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \qquad T^{\mu\nu} = 2c \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}$$ metrický tenzor energie-hybnosti

tenzor energie hybnosti
skládá se z příspěvků od různých druhů hmoty
$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{EM} + T^{\mu\nu}_{SP} + \dots$$
energie jednoho druhu se může přeměňovat na energii jiného druhu hmoty
$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}_{EM} + \nabla_\mu T^{\mu\nu}_{ostatní} = 0 \qquad \nabla_\mu T^{\mu\nu}_{ostatní} = f^{\nu}_{EM}$$

Interakce s jinými systémy

Celkový zákon zachování energie-hybnosti

$$\nabla_\mu T^{\mu\alpha}_{\text{celkové}} = 0$$

$\Downarrow$

$$\nabla_\mu T^{\mu\alpha}_{EM} + \nabla_\mu T^{\mu\alpha}_{\text{ostatní}} = 0$$

$\Downarrow$

$$\nabla_\mu T^{\mu\alpha}_{\text{ostatní}} = \Phi^\alpha = F^{\alpha\mu} j_\mu$$ hustota Lorentz. síly

Nekoherentní prach

$$T^{\mu\nu}_{\text{prach}} = \mu_{00} u^\mu u^\nu = u^\mu \Pi^\nu \qquad \mu = \gamma^2 \mu_{00}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon & c\vec{\Pi} \\ \frac{\vec{v}}{c}\varepsilon & \vec{v}\vec{\Pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu c^2 & c\mu\vec{v} \\ c\mu\vec{v} & \mu\vec{v}\vec{v} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{hustota 4-hybnosti} \\ \leftarrow \text{tok hust. 4-hybnosti} \end{matrix}$$

pohybové rovnice dané zákonem zachování

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\varepsilon) = w = \varrho \vec{v}\cdot\vec{E}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\Pi} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\vec{\Pi}) = \vec{f} = \varrho\vec{E} + \varrho\vec{v}\times\vec{B}$$

podrobnosti viz dodatek

μ_{00} klidová hustota klidové hmotnosti

$\mu_0 = \gamma\mu_{00}$ $\begin{cases} \text{klidová hustota relativistické hmotnosti} \\ \text{hustota klidové hmotnosti} \end{cases}$

$\mu = \gamma^2\mu_{00}$ hustota relativistické hmotnosti