Relativistická formulace

Relativistická formulace teorie.

Prostorová a prostoročasová formulace – slovník, invarianty.

Transformační vlastnosti.

Lorentzova transformace, transformace toku, 4-potenciálu a příslušných prostorových veličin. Transformace elektrické intenzity a magnetické indukce. Speciální případy a jejich charakterizace pomocí invariantů. Transformační vlastnosti lineární nábojové hustoty a proudu.

Příklady.

Přímý vodič s proudem v pohybující se soustavě. Pole rovnoměrně pohybujícího se náboje.

Dodatek 6A: Poznámky ke značení

veličina	naše značení	často používané značení
hustota hmotnosti	μ	ρ pozor na hust. náboje
permeabilita vakua	$\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$	μ_0 pozor na hust. hmoty
elektrická indukce	$\varepsilon_0 \vec{E}$	$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ nepoužíváme
magnetická intenzita	$\varepsilon_0 c^2 \vec{B}$	$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$ nepoužíváme
hustota 4-síly	Φ^μ	pozor na tok elektrick. pole
energie	U	W pozor na výkon
tvorba energie (výkon)	W	
hustota energie	u	w pozor na hustotu výkonu
hustota tvorby energie	w	
Poyntingův vektor	$\vec{S}$	$\vec{S}$ pozor na orientovanou plochu
rapidita (boostový parametr)	β	platí $\gamma = \operatorname{ch}\beta$ $\frac{v}{c} = \operatorname{th}\beta$
bezrozměrná rychlost	$\frac{v}{c}$	β pozor na rapiditu
síla (3-síla)	$\vec{f}$	$\vec{F}$ pozor na $F_{\mu\nu}$
hustota (3-)síly	$\vec{f}$	

Relativistické formulace teorie

opakování přednášky STR

popis vůči inerc. soustavě		prostoročasový popis	
poloha	$t \quad \vec{r}$	$\mathbf{x}$	$x^\mu = \begin{bmatrix} ct \\ \vec{r} \end{bmatrix}$
zdroje	$\varrho \quad \vec{j}$	$\mathbf{j}$	$j^\mu = \begin{bmatrix} c\varrho \\ \vec{j} \end{bmatrix}$
potenciály	$\phi \quad \vec{A}$	$\mathbf{A}$	$A^\mu = \begin{bmatrix} \frac{1}{c}\phi \\ \vec{A} \end{bmatrix}$
EM pole	$\vec{E} \quad \vec{B}$	$\mathbf{F}$	$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{c}\vec{E} \\ \frac{1}{c}\vec{E} & \overleftrightarrow{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{1}{c}E_y & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{1}{c}E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}$

Maxwellovy rovnice

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j} \qquad\qquad \nabla_\mu F^{\alpha\mu} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j^\alpha$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad\qquad \nabla_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0$$

vztah k potenciálům

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \qquad\qquad F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$$

hustota Lorentzovy síly

$$\vec{f} = \varrho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}$$

$$w = \vec{j}\cdot\vec{E} \qquad\qquad \mathbf{\Phi} \quad \Phi^\mu = \begin{bmatrix} \frac{w}{c} \\ \vec{f} \end{bmatrix} \qquad \Phi^\alpha = F^\alpha{}_\nu\, j^\nu$$

invarianty

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 - \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}B^2 \qquad\qquad \mathcal{L} = -\frac{\varepsilon_0 c^2}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$\tilde{\mathcal{L}} = \varepsilon_0 c\, \vec{E}\cdot\vec{B} \qquad\qquad \tilde{\mathcal{L}} = \frac{\varepsilon_0 c^2}{8} F^{\kappa\lambda}F^{\mu\nu}\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$$

poznámka k potenciálům

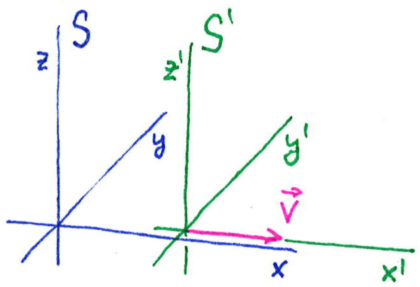
$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 + \text{topologie} \Rightarrow \exists\vec{A} \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

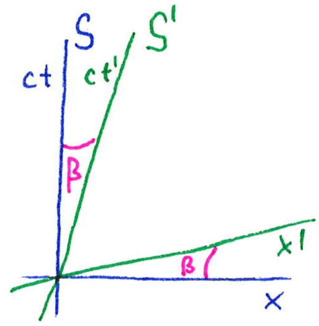
$$\vec{X} = \vec{\nabla}\psi \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{X} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{X} = 0 + \text{topologie} \Rightarrow \exists\psi \quad \vec{X} = \vec{\nabla}\psi$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{A}}_{\vec{B}} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\times\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow \exists\phi \quad \vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi$$

Transformační vlastnosti

Lorentzova transformace





$$a^{\mu'} = L^{\mu'}{}_{\nu}\, a^{\nu}$$

$$L^{\mu'}{}_{\nu} = \begin{array}{c|ccc|} & 0 & \parallel & \perp \\ \hline 0 & \operatorname{ch}\beta & -\operatorname{sh}\beta & 0 \\ \parallel & -\operatorname{sh}\beta & \operatorname{ch}\beta & 0 \\ \perp & 0 & 0 & \overleftrightarrow{I}_{\perp} \end{array}$$

$$\frac{v}{c} = \operatorname{th}\beta \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \operatorname{ch}\beta \qquad \frac{v}{c}\gamma = \operatorname{sh}\beta$$

⇓

$$L^{\mu'}{}_{\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \overleftrightarrow{I}_{\perp} \end{bmatrix} \qquad L^{\nu}{}_{\mu'} = \begin{bmatrix} \gamma & \frac{v}{c}\gamma & 0 \\ \frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \overleftrightarrow{I}_{\perp} \end{bmatrix}$$

transformace toku

$$j^{\mu} = \begin{bmatrix} c\varrho \\ j_{\parallel} \\ \vec{j}_{\perp} \end{bmatrix} \rightarrow j^{\mu'} = \begin{bmatrix} c\varrho' \\ j'_{\parallel} \\ \vec{j}'_{\perp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \overleftrightarrow{I}_{\perp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\varrho \\ j_{\parallel} \\ \vec{j}_{\perp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\gamma\left(\varrho - \frac{v}{c^2} j_{\parallel}\right) \\ \gamma\left(j_{\parallel} - \varrho v\right) \\ \vec{j}_{\perp} \end{bmatrix}$$

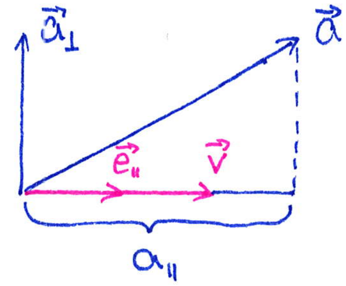
$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \varrho' &= \gamma\left(\varrho - \frac{v}{c^2} j_{\parallel}\right) \\ j'_{\parallel} &= \gamma\left(j_{\parallel} - \varrho v\right) \\ \vec{j}'_{\perp} &= \vec{j}_{\perp} \end{aligned}$$

transformace potenciálů

$$A^{\mu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c}\phi \\ A_{\parallel} \\ \vec{A}_{\perp} \end{bmatrix} \rightarrow A^{\mu'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c}\phi' \\ A'_{\parallel} \\ \vec{A}'_{\perp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \overleftrightarrow{I}_{\perp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{c}\phi \\ A_{\parallel} \\ \vec{A}_{\perp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c}\gamma\left(\phi - vA_{\parallel}\right) \\ \gamma\left(A_{\parallel} - \frac{v}{c^2}\phi\right) \\ \vec{A}_{\perp} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \phi' &= \gamma\left(\phi - vA_{\parallel}\right) \\ A'_{\parallel} &= \gamma\left(A_{\parallel} - \frac{v}{c^2}\phi\right) \\ \vec{A}'_{\perp} &= \vec{A}_{\perp} \end{aligned}$$

transformace polních veličin



$$\vec E = E_\parallel \vec e_\parallel + \vec E_\perp \qquad \vec v = v\,\vec e_\parallel$$

$$\vec B = B_\parallel \vec e_\parallel + \vec B_\perp \qquad a_\parallel = \vec e_\parallel\cdot\vec a \quad \vec a_\perp = \vec a - a_\parallel \vec e_\parallel$$

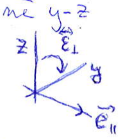
$$F^\alpha{}_\beta = \begin{bmatrix} 0 & \frac1c E_\parallel & \frac1c \vec E_\perp \\ \frac1c E_\parallel & 0 & \vec B_{\parallel\perp} \\ \frac1c \vec E_\perp & \vec B_{\perp\parallel} & \overleftrightarrow{B}_{\perp\perp} \end{bmatrix}$$

matice $\overleftrightarrow{B}$ splňuje $\overleftrightarrow{B}\cdot\vec a = \vec a\times\vec B$

$$\overleftrightarrow{B} = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec B_{\parallel\perp} = \vec e_\parallel\cdot\overleftrightarrow{B} = -\vec e_\parallel\times\vec B = \underbrace{-\vec e_\parallel\times}\vec B_\perp = \overleftrightarrow{\mathcal{E}}_\perp\cdot\vec B_\perp$$

otočení o $-\frac{\pi}{2}$ v rovině y-z



$$\overleftrightarrow{B}_{\perp\perp} = \overleftrightarrow{B}_\parallel = B_\parallel \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = B_\parallel \overleftrightarrow{\mathcal{E}}_\perp \qquad (**)$$

$$\vec B_\perp = \overleftrightarrow{\mathcal{E}}_\perp\cdot\vec B_{\perp\parallel} \Leftarrow \quad \vec B_{\perp\parallel} = \overleftrightarrow{B}\cdot\vec e_\parallel = \vec e_\parallel\times\vec B = \vec e_\parallel\times\vec B_\perp = \underbrace{-\overleftrightarrow{\mathcal{E}}_\perp}\cdot\vec B_\perp \qquad (*)$$

otočení o $+\frac{\pi}{2}$ v rovině y-z

$$F^{\alpha'}{}_{\beta'} = L^{\alpha'}{}_\mu F^\mu{}_\nu L^\nu{}_{\beta'} = \begin{bmatrix} \gamma & -\frac vc\gamma & 0 \\ -\frac vc\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \overleftrightarrow{I}_\perp \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & \frac1c E_\parallel & \frac1c \vec E_\perp \\ \frac1c E_\parallel & 0 & \vec B_{\parallel\perp} \\ \frac1c \vec E_\perp & \vec B_{\perp\parallel} & \overleftrightarrow{B}_{\perp\perp} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \gamma & \frac vc\gamma & 0 \\ \frac vc\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \overleftrightarrow{I}_\perp \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\gamma\frac{v}{c^2}E_\parallel & \gamma\frac1c E_\parallel & \gamma\frac1c(\vec E_\perp - v\vec B_{\parallel\perp}) \\ \gamma\frac1c E_\parallel & -\gamma\frac{v}{c^2}E_\parallel & \gamma(\vec B_{\parallel\perp} - \frac{v}{c^2}\vec E_\perp) \\ \frac1c\vec E_\perp & \vec B_{\perp\parallel} & \overleftrightarrow{B}_{\perp\perp} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \gamma & \frac vc\gamma & 0 \\ \frac vc\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \overleftrightarrow{I}_\perp \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac1c E_\parallel & \frac1c\gamma(\vec E_\perp - v\vec B_{\parallel\perp}) \\ \frac1c E_\parallel & 0 & \gamma(\vec B_{\parallel\perp} - \frac{v}{c^2}\vec E_\perp) \\ \frac1c\gamma(\vec E_\perp + v\vec B_{\perp\parallel}) & \gamma(\vec B_{\perp\parallel} + \frac{v}{c^2}\vec E_\perp) & \overleftrightarrow{B}_{\perp\perp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac1c E'_\parallel & \frac1c \vec E'_\perp \\ \frac1c E'_\parallel & 0 & \vec B'_{\parallel\perp} \\ \frac1c \vec E'_\perp & \vec B'_{\perp\parallel} & \overleftrightarrow{B}'_{\perp\perp} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad E'_\parallel = E_\parallel \qquad \vec E'_\perp = \gamma(\vec E_\perp + v\vec B_{\perp\parallel}) = \gamma(\vec E_\perp + \vec v\times\vec B_\perp) \qquad \text{použito } (*)$$

$$\overleftrightarrow{B}'_{\perp\perp} = \overleftrightarrow{B}_{\perp\perp} \Rightarrow B'_\parallel = B_\parallel \qquad \text{použito } (**)$$

platí $\overleftrightarrow{\mathcal{E}}'_\perp = \overleftrightarrow{\mathcal{E}}_\perp \qquad \overleftrightarrow{\mathcal{E}}_\perp = -\vec e_\parallel\times$

$$\vec B'_{\perp\parallel} = \gamma(\vec B_{\perp\parallel} + \frac{v}{c^2}\vec E_\perp) \qquad /\overleftrightarrow{\mathcal{E}}_\perp\cdot \quad \ldots \quad a\ (*) \Rightarrow \vec B'_\perp = \gamma(\vec B_\perp - \frac{1}{c^2}\vec v\times\vec E_\perp)$$

$$\Rightarrow \quad E'_\parallel = E_\parallel \qquad \vec E'_\perp = \gamma(\vec E_\perp + \vec v\times\vec B_\perp)$$

$$B'_\parallel = B_\parallel \qquad \vec B'_\perp = \gamma(\vec B_\perp - \frac{1}{c^2}\vec v\times\vec E_\perp)$$

Elektrické a magnetické pole při změně soustavy

$\vec{E}$ a $\vec{B}$ se navzájem míchají!

invarianty nezávislé na volbě soustavy

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 - \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} B^2$$

$$\tilde{\mathcal{L}} = \varepsilon_0 c \, \vec{E} \cdot \vec{B}$$

důsledky

1) $E = cB$ v jedné soustavě

$\Rightarrow \mathcal{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad E' = cB'$ ve všech soustavách

2) $\vec{E} \perp \vec{B}$ v jedné soustavě

$\Rightarrow \tilde{\mathcal{L}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}' \perp \vec{B}'$ ve všech soustavách

3) $\vec{B} = 0$ v jedné soustavě

$\Rightarrow \tilde{\mathcal{L}} = 0 \qquad \mathcal{L} > 0$

$$\vec{E}' = E_\parallel \vec{e}_\parallel + \gamma \vec{E}_\perp \qquad \vec{B}' = -\gamma \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}_\perp = -\frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}'$$

$\Rightarrow \vec{B}' = -\frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}'$ ve všech soustavách

4) $\vec{E} = 0$ v jedné soustavě

$\Rightarrow \tilde{\mathcal{L}} = 0 \qquad \mathcal{L} < 0$

$$\vec{B}' = B_\parallel \vec{e}_\parallel + \gamma \vec{B}_\perp \qquad \vec{E}' = \gamma \vec{v} \times \vec{B} = \vec{v} \times \vec{B}'$$

$\Rightarrow \vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B}'$ ve všech soustavách

Transformace lineární nábojové hustoty a proudu

uvažujme
(I) lineární nábojovou hustotu λ podél přímky
(II) proud I v přímém vodiči
a Lorentzovu transformaci ve směru λ, resp. I

intuitivně

$\lambda = \frac{\text{náboj}}{\text{délka}}$ délka se v pohybující soustavě zkracuje, náboj se nemění, tedy hustota se zvětšuje

$\Rightarrow \lambda = \gamma \lambda_0$

$I = \frac{\text{náboj}}{\text{čas}}$ čas za který náboj proteče v pohybující se soustavě je kratší než čas v klidové soustavě, náboj se nemění, tedy proud se zvětšuje

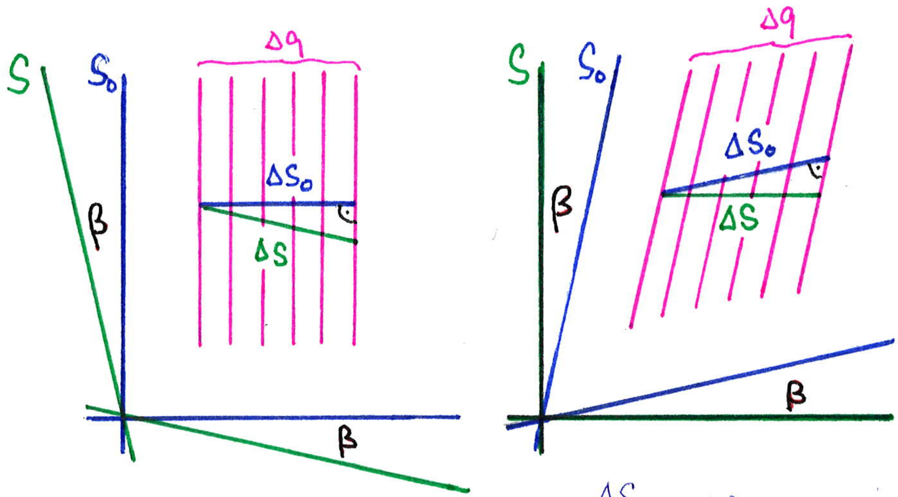
$\Rightarrow I = \gamma I_0$

přesněji:
nábojová hustota
klidová soustava S_0

$$\lambda_0 = \frac{\Delta q}{\Delta S_0}$$

pohybující se soustava S

$$\lambda = \frac{\Delta q}{\Delta S} = \gamma \frac{\Delta q}{\Delta S_0} = \gamma \lambda_0$$



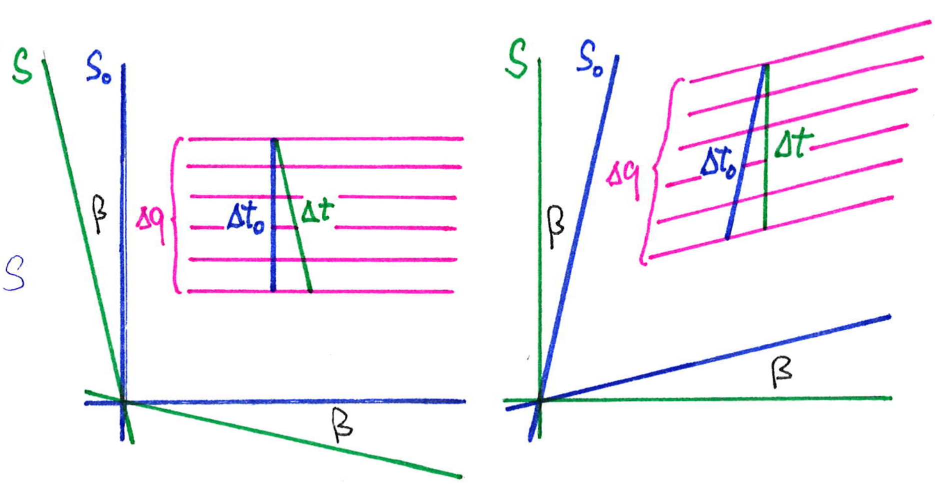
$$\frac{\Delta S_0}{\Delta S} = \operatorname{ch}\beta = \gamma$$

proud
klidová soustava S_0

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t_0}$$

(soustava, kde je proud čistě prostorový)
pohybující se soustava S

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \gamma \frac{\Delta q}{\Delta t_0} = \gamma I_0$$



odvození pomocí transf. vlastností toku

lineární hustota a proud souvisí s objemovou hustotou a proudovou hustotou

$$\lambda\, ds = \varrho\, dV \qquad\qquad I\, d\vec{s} = \vec{j}\, dV$$
$$\Delta S_\perp ds \qquad\qquad I\, ds\, \vec{e}_\parallel \quad j_\parallel \vec{e}_\parallel \Delta S_\perp ds$$

$\Rightarrow \lambda = \varrho \Delta S_\perp \qquad I = j_\parallel \Delta S_\perp$

při Lorentzově transformaci ve směru $\vec{e}_\parallel$ s $\Delta S_\perp$ nemění

$\Rightarrow \begin{bmatrix} c\lambda \\ I \end{bmatrix}$ se transformuje stejně jako $\begin{bmatrix} c\varrho \\ j_\parallel \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda' &= \gamma\left(\lambda - \frac{v}{c^2} I\right) \\ I' &= \gamma (I - v\lambda) \end{aligned}$$

pokud v S_0 $\quad \lambda_0 \neq 0 \quad I_0 = 0$

$\Rightarrow$ v soustavě S $\qquad \lambda = \gamma \lambda_0 \qquad I = -v\gamma\lambda_0 = -v\lambda$

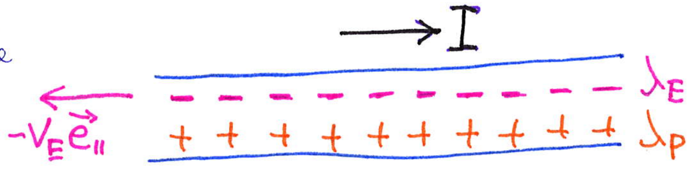
pokud v S_0 $\quad \lambda_0 = 0 \quad I_0 \neq 0$

$\Rightarrow$ v soustavě S $\qquad I = \gamma I_0 \qquad \lambda = -\frac{v}{c^2}\gamma I_0 = -\frac{v}{c^2} I$

Příklady

Přímý vodič s proudem

S - klidová soustava vodiče
- zde je vodič neutrální
- teče v něm proud I



$\lambda_P > 0$ lineární hustota kladných nábojů spojených s vodičem

$v_P = 0$ rychlost kladných nábojů (nehýbou se v S)

$I_P = 0$ proud spojený s kladnými náboji

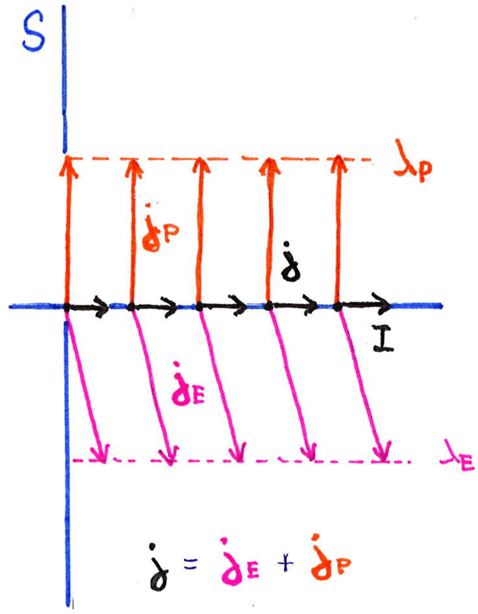
$\lambda_E < 0$ lineární hustota vodivostních elektronů

$-v_E$ rychlost elektronů vůči S

$I_E = -v_E \lambda_E$ proud spojený s elektrony

$\lambda = \lambda_E + \lambda_P = 0$ celková hustota náboje (vodič je neutrální)

$I = I_E + I_P = -v_E \lambda_E$ celkový proud ve vodiči



elektrické pole

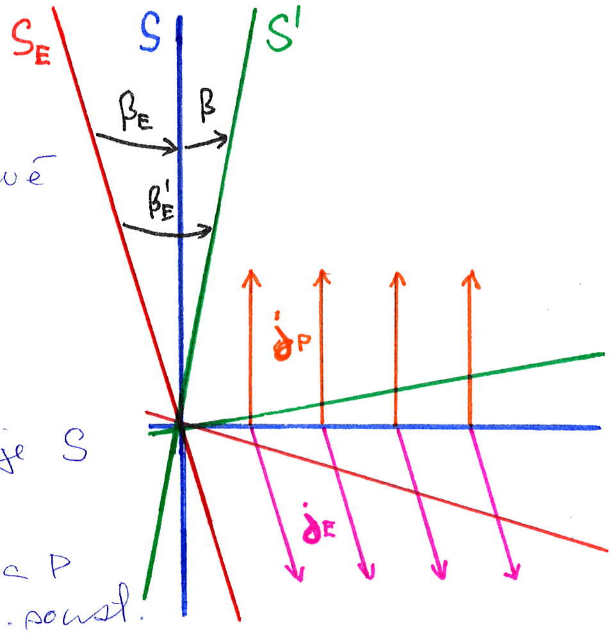
$\vec{E} = 0$ $\qquad \phi = 0$

magnetické pole

$\vec{B} = \frac{I\mu_0}{2\pi R}\vec{e}_{\varphi}$ $\qquad \vec{A} = \frac{I\mu_0}{2\pi}\ln\frac{R_0}{R}\vec{e}_{\parallel}$

$A_{\parallel} = \frac{I\mu_0}{2\pi}\ln\frac{R_0}{R}$ $\qquad \vec{A}_{\perp} = 0$

S' soustava pohybující se vůči S rychlostí v



proud

$I' = \gamma I$ viz výše

I – klidový proud

I' – proud v pohyb. soustavě

nábojová hustota

$\lambda' = \lambda'_E + \lambda'_P$

P: klidová soustava pro P je S

$\Rightarrow \lambda'_P = \gamma \lambda_P$

λ_P – klidová hustota P

λ'_P – hustota v pohyb. soust.

E: klidová soustava pro E je S_E

S se vůči S_E pohybuje rychlostí v_E

(protože elektrony se vůči S pohybují rychlostí $-v_E$)

$\Rightarrow \lambda_E = \gamma_E \lambda_{E0} \qquad \gamma_E = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_E^2}{c^2}}}$

λ_{E0} – klidová hustota E

λ_E – hustota v soustavě S

S' se vůči S_E pohybuje rychlostí v'_E

$\Rightarrow \lambda'_E = \gamma'_E \lambda_{E0} \qquad \gamma'_E = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_E'^2}{c^2}}}$

λ_{E0} – klidová hustota E

λ'_E – hustota v soustavě S'

$\Rightarrow \lambda'_E = \frac{\gamma'_E}{\gamma_E} \lambda_E$

skládání rychlostí

$$\underset{v'_E}{\beta'_E} = \underset{v_E}{\beta_E} + \underset{v}{\beta} \Rightarrow \frac{\gamma'_E}{\gamma_E} = \frac{\operatorname{ch}\beta'_E}{\operatorname{ch}\beta_E} = \frac{\operatorname{ch}\beta_E \operatorname{ch}\beta + \operatorname{sh}\beta_E \operatorname{sh}\beta}{\operatorname{ch}\beta_E} = \operatorname{ch}\beta(1+\operatorname{th}\beta_E \operatorname{th}\beta)$$

$$= \gamma\left(1+\frac{v_E v}{c^2}\right)$$

$\Downarrow$

$$\lambda' = \lambda_E \gamma\left(1+\frac{v_E v}{c^2}\right) + \gamma \lambda_P = \gamma \lambda_E \frac{v_E v}{c^2} = -\frac{v}{c^2}\gamma \overset{-v_E\lambda_E}{I} = -\frac{v}{c^2} I'$$

nenulová nábojová hustota v soustavě S' !!

přímá transformace zdrojů

v soustavě S $\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$

v soustavě S' $\begin{bmatrix} \lambda' \\ I' \end{bmatrix}$

$$\lambda' = \gamma\left(\lambda - \frac{v}{c^2} I\right) \qquad \Rightarrow \qquad \lambda' = -\gamma \frac{v}{c^2} I = -\frac{v}{c^2} I'$$
$$I' = \gamma (I - v\lambda) \qquad \qquad I' = \gamma I$$

což souhlasí se vztahy z předchozího odvození

pole v soustavě S'

počítáno ze zdrojů λ', I' $\Rightarrow$

elektrické pole

$$\vec{E}' = \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 R'} \vec{e}_R{}' = -\frac{v I'}{2\pi\varepsilon_0 c^2 R} \vec{e}_R$$

díky $R' = R$ $\vec{e}_R{}' = \vec{e}_R$, $\lambda' = -\frac{v}{c^2} I'$

$$\phi' = \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{R_0}{R'} = -\frac{v I'}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \ln\frac{R_0}{R}$$

magnetické pole

$$\vec{B}' = \frac{I'\mu_0}{2\pi R'} \vec{e}_\varphi{}' = \frac{I'\mu_0}{2\pi R} \vec{e}_\varphi$$

díky $R' = R$ $\vec{e}_\varphi{}' = \vec{e}_\varphi$

$$A'_\parallel = \frac{I'\mu_0}{2\pi} \ln\frac{R_0}{R'} = \frac{I'\mu_0}{2\pi} \ln\frac{R_0}{R} \qquad \vec{A}'_\perp = 0$$

počítáno transformací $\vec{E}$ a $\vec{B}$

$E'_\parallel = E_\parallel$ $\vec{E}'_\perp = \gamma(\vec{E}_\perp + \vec{v} \times \vec{B}_\perp)$

$B'_\parallel = B_\parallel$ $\vec{B}'_\perp = \gamma(\vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}_\perp)$

$\phi' = \gamma(\phi - v A_\parallel)$

$A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \frac{v}{c^2}\phi)$ $\vec{A}'_\perp = \vec{A}_\perp$

v soustavě S

$$E_\parallel = 0 \qquad \vec{E}_\perp = 0 \qquad \phi = 0$$
$$B_\parallel = 0 \qquad \vec{B}_\perp = \frac{I\mu_0}{2\pi R} \vec{e}_\varphi, \qquad A_\parallel = \frac{I\mu_0}{2\pi} \ln\frac{R_0}{R} \qquad \vec{A}_\perp = 0$$

$\Downarrow$ elektrické pole v S'

$$E'_\parallel = 0 \qquad \vec{E}'_\perp = \gamma \frac{I\mu_0}{2\pi R} v \vec{e}_\parallel \times \vec{e}_\varphi = -\frac{v I'}{2\pi\varepsilon_0 c^2 R} \vec{e}_R$$
$$\phi' = -\gamma v \frac{I\mu_0}{2\pi} \ln\frac{R_0}{R} = -\frac{v I'}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \ln\frac{R_0}{R}$$

magnetické pole v S'

$$B'_\parallel = 0 \qquad \vec{B}'_\perp = \gamma \frac{I\mu_0}{2\pi R} \vec{e}_\varphi = \frac{I'\mu_0}{2\pi R} \vec{e}_\varphi$$
$$A'_\parallel = \gamma \frac{I\mu_0}{2\pi} \ln\frac{R_0}{R} = \frac{I'\mu_0}{2\pi} \ln\frac{R_0}{R} \qquad \vec{A}'_\perp = 0$$

souhlasí s předchozím výpočtem!

Pole rovnoměrně se pohybujícího náboje

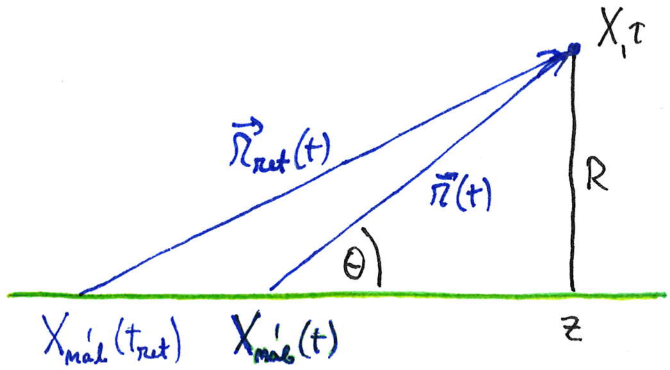
soustava S

náboj pohybující se rychlostí v ve směru z

$X_{náb}(t)$: $z_{náb}(t) = vt$ $\quad x_{náb}(t) = y_{náb}(t) = 0$

okamžitý směrový vektor

$$\vec{r}(t) = X - X_{náb}(t)$$
$$= (z - vt)\,\vec{e}_{\parallel} + R\,\vec{e}_R$$
$$= r(t)\,(\cos\theta\,\vec{e}_{\parallel} + \sin\theta\,\vec{e}_R)$$
$$\tan\theta(t) = \frac{R}{z - vt}$$



retardovaný směrový vektor

$$\vec{r}_{ret}(t) = X - X_{náb}(t_{ret})$$

retardovaný čas je dán podmínkou

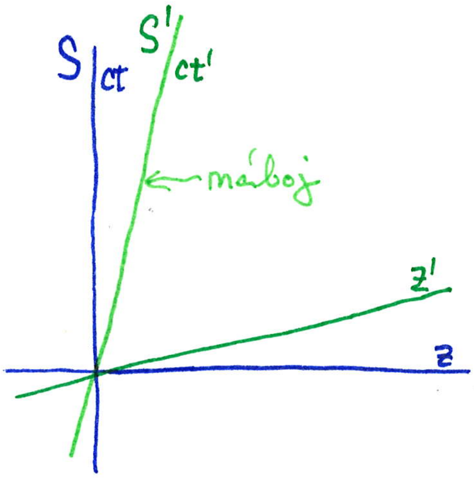
$$r_{ret}(t) = c\,(t - t_{ret})$$

v $X_{náb}(t_{ret})$ vznikne v čase t_{ret} pole, které doletí rychlostí světla v čase t do X

klidová soustava náboje S' - náboj v počátku P'

S' se pohybuje rychlostí v vůči S

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}z\right)$$
$$z' = \gamma\,(z - vt)$$
$$R' = R$$



směrový vektor v S'

$$\vec{r}\,' = X' - X'_{náb} = X' - P'$$
$$r' = \sqrt{z'^2 + R'^2} = \sqrt{\gamma^2 (z - vt)^2 + R^2}$$
$$= \gamma r \sqrt{\cos^2\theta + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\sin^2\theta}$$
$$= \gamma r \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}$$

Pole v S' = pole stojícího náboje

$$\vec{E}' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{\rho}'}{\rho'^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho'^3}\left(z'\vec{e}'_{\parallel} + R'\vec{e}'_R\right)$$

$$E'_{\parallel} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z'}{\rho'^3} \qquad \vec{E}'_{\perp} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R}{\rho'^3}\vec{e}_R$$

$$B'_{\parallel} = 0 \qquad \vec{B}'_{\perp} = 0$$

Pole v S (transformace s $\vec{v} \to -\vec{v}$)

$$E_{\parallel} = E'_{\parallel} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma(z-vt)}{\rho'^3} \qquad \vec{E}_{\perp} = \gamma\vec{E}'_{\perp} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma R}{\rho'^3}\vec{e}_R$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma}{\rho'^3}\underbrace{\left((z-vt)\vec{e}_{\parallel} + R\vec{e}_R\right)}_{\to\ \vec{\rho}(t)} =$$

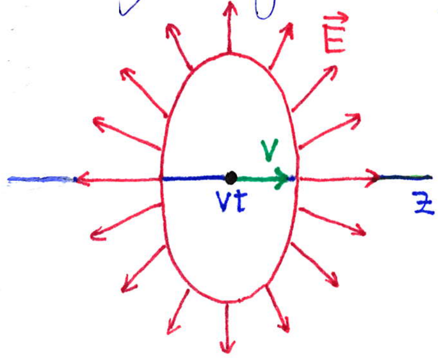
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}^{\,3}}\frac{\vec{e}(t)}{\rho^2(t)} \qquad \vec{e} = \frac{\vec{\rho}}{\rho} = (\cos\theta\,\vec{e}_{\parallel} + \sin\theta\,\vec{e}_R)$$

$$\vec{B}_{\parallel} = 0 \qquad \vec{B}_{\perp} = \gamma\frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}'_{\perp} = \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E} = \frac{qv}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\sin\theta}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}^{\,3}}\frac{\vec{e}_{\varphi}}{\rho^2(t)}$$

$\vec{E}$ má směr <u>okamžitého</u> směrového vektoru $\vec{\rho}$

- jak to příroda může vědět, kde náboj bude?
- neví to, pouze hádá
- pro rovnoměrný pohyb náboj hádá přesně



Potenciál

soustava S'

$$\phi' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'} \qquad A'_\parallel = 0 \qquad \vec{A}'_\perp = 0$$

transformační vztahy

$$\phi = \gamma\left(\phi' + v A'_\parallel\right)$$

$$A_\parallel = \gamma\left(A'_\parallel + \frac{v}{c^2}\phi'\right)$$

$$\vec{A}_\perp = \vec{A}'_\perp$$

potenciál v soustavě S

$$\phi = \gamma\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta(t)}}\frac{1}{r(t)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(z-vt)^2+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)R^2}}$$

$$A_\parallel = \gamma\frac{v}{c^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'} = \frac{qv}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta(t)}}\frac{1}{r(t)} = \frac{qv}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{\sqrt{(z-vt)^2+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)R^2}}$$

pole v soustavě S

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$r\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta} = \sqrt{(z-vt)^2+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)R^2}$$

$$\vec{\nabla}\left((z-vt)^2+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)R^2\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{(z-vt)\vec{e}_\parallel+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)R\,\vec{e}_R}{\sqrt{(z-vt)^2+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)R^2}^{\,3}} = -\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}^{\,3}}\left(\cos\theta\,\vec{e}_\parallel+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\sin\theta\,\vec{e}_R\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left((z-vt)^2+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)R^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(z-vt)v}{\sqrt{(z-vt)^2+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)R^2}^{\,3}} = \frac{1}{r^2}\frac{v\cos\theta}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}^{\,3}}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}^{\,3}}\left(\cos\theta\,\vec{e}_\parallel - \frac{v^2}{c^2}\cos\theta\,\vec{e}_\parallel + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\sin\theta\,\vec{e}_R\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}^{\,3}}\frac{\vec{e}_r}{r^2}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}$$

ekvipotenciála skalárního potenciálu v čase t

$\phi = \text{konst} \iff (z-vt)^2 + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)R^2 = \text{konst}$

oblý rotační elipsoid s poměrem poloos $1:\gamma$ centrovaný na $z = vt$