Zápočtový problém č. 1

NOFY126 – Klasická elektrodynamika, LS 2025

termín odevzdání: 4. 4. 2025

Část 1

Na cvičení jsme zkoumali elektrický potenciál závisející pouze na radiální souřadnici η protáhlých elipsoidálních souřadnic. Jeho ekvipotenciály jsou protáhlé elipsoidy se společnými ohnisky ležícími na ose z. Potenciál jsme dostali ve tvaru

$$\phi = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_o \ell} \log \frac{\cosh\eta + 1}{\cosh\eta - 1} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_o \ell} \log \frac{\sqrt{R^2 + (z-\ell)^2} - (z-\ell)}{\sqrt{R^2 + (z+\ell)^2} - (z+\ell)}\,, \tag{1}$$

kde Q je celkový náboj budící toto pole a ℓ vzdálenost ohnisek od počátku.

Uvažujme, že pro $\eta \geq \eta_o$ je toto pole vytvořeno nábojem Q rozloženém na vodivém elipsoidu $\eta = \eta_o$.

1) Nalezněte nábojovou hustotu σ na elipsoidu.
2) Spočtěte náboj ΔQ lokalizovaný v proužku $\Delta\psi$ okolo "rovnoběžky" $\psi = \text{konst.}$
3) Nalezněte sílu $\Delta\vec{F}$ působící na tento proužek náboje. (Síla $\Delta\vec{F}$ bude samozřejmě malá, úměrná "úhlu" $\Delta\psi$.) Jaký má tato síla směr a kde nabývá maxima?

Tuto sílu musí kompenzovat materiál elipsoidu aby udržel náboj nehybný. Z výsledku vyplývá, že elipsoid zamezuje pohybu náboje i ve směru z.

Dále zkoumejme limitu $\eta_o \to 0$, kdy elipsoid přejde na tyčku lokalizovanou na ose z na intervalu $z \in (-\ell, \ell)$.

4) Nalezněte vztah elipsoidální souřadnice ψ a souřadnice z na limitní tyčce.
5) Nalezněte limitu velikosti náboje ΔQ v proužku šířky $\Delta\psi$ diskutovaném výše. Vyjádřete ho pomocí odpovídajícího intervalu Δz a určete lineární hustotu náboje λ. Jak závisí λ na poloze na tyčce?
6) Nalezněte limitu síly $\Delta\vec{F}$ působící na tento náboj. Diskutujte průběh síly podél tyčky.

Část 2

Uvažujme nyní pole nabité tyčky - tj. potenciál (1) uvažovaný pro všechny hodnoty $\eta > 0$.

7) Spočtěte intenzitu $\vec{E}$ na ose z nad a pod tyčkou, vyjádřenou pomocí souřadnice z. Dejte pozor na směr síly na obou stranách tyčky.
8) Uvažujte homogenně nabitou tyčku s lineární hustotou náboje λ umístěnou na ose z v intervalu $(-\ell, \ell)$, ze které je vyjmutý úsek $(z-\delta, z+\delta)$. Spočtěte intenzitu $\vec{E}$ ve středu vyjmutého úseku v limitě $\delta \to 0$.
9) Uvažujte, že ve středu vyjmutého úseku je umístěn náboj $\Delta Q = \lambda\Delta z$. Jaká na něj působí síla $\Delta\vec{F}$? Porovnejte s výsledkem části 1 a interpretujte.

Protáhlé elipsoidální souřadnice

$$\begin{aligned} x &= \ell \sinh\eta \, \sin\psi \cos\varphi \\ y &= \ell \sinh\eta \, \sin\psi \sin\varphi \\ z &= \ell \cosh\eta \, \cos\psi \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} h_\eta = h_\psi &= \ell\sqrt{\cosh^2\eta - \cos^2\psi} \\ h_\varphi &= \ell \sinh\eta \, \sin\psi \end{aligned}$$

K zamyšlení pro zájemce ...

Lze jednoduše spočíst sílu mezi dvěma nepřekrývajícími se homogenně nabitými úsečkami umístěnými na ose z. Tato síla bohužel diverguje, pokud se úsečky dotýkají. Nelze proto jednoduše říci, jakou silou působí homogenně nabitá úsečka na svůj segment délky Δz. Nabízí se rozdělit úsečku na tři kusy: nad segmentem, segment a pod segmentem. Síly úseček pod a nad segmentem na zvolený segment jsou nekonečné. Pokud ale obě úsečky zkrátíme o δ a vytvoříme tak kolem segmentu symetrickou mezeru, můžeme výslednou sílu určit. Ukazuje se, že nekonečné příspěvky se vyruší a výsledná síla na segment je stejná, jako síla spočtená v části 2. Aproximace segmentu bodovým nábojem v dané limitě je tak korektní.

Existuje ve skutečnosti jednoduchý argument (nepotřebující jakékoli počítání) ukazující, že síla na náboj či malou úsečku umístěné doprostřed mezery ve velké úsečce je stejná, jako (regularizovaná) síla od celé velké úsečky. Přijdete na něj?