

Zápočtový problém č. 2

NOFY126 – Klasická elektrodynamika, LS 2025

termín odevzdání: 21. 5. 2025

Úvod

Cílem této úlohy bude nalézt magnetické pole odpovídající vhodně rozloženému náboji umístěnému na rotujícím oblém elipsoidu.

Nebudeme a priori předpokládat konkrétní rozložení náboje. Pokusíme se nalézt magnetické pole jednoduchého tvaru a následně dopočítat zdroje, které ho způsobují.

Vektorový potenciál

Budeme předpokládat, že tok náboje je lokalizovaný pouze na oblém rotačním elipsoidu $\eta = \eta_0$ a jeho směr je dán bázovým vektorem $\vec{e}_\varphi$ a má rotační symetrii vůči otáčení kolem osy z . Z toho lze usoudit, že žádné veličiny nebudou záviset na souřadnici φ . Pro magnetické pole $\vec{B}$ lze očekávat, že nebude mít žádnou složku ve směru $\vec{e}_\varphi$, tj. bude mít směr ležící v rovinách napnutých na $\vec{e}_R, \vec{e}_z$ (ekvivalentně, napnutých na $\vec{e}_\eta, \vec{e}_\psi$). Naoproti tomu vektorový potenciál $\vec{A}$ lze hledat ve tvaru

$$\vec{A} = A^\varphi(\eta, \psi) \vec{e}_\varphi .$$

Zde a níže používáme cylindrické souřadnice R, φ, z , sférické souřadnice r, ϑ, φ a oblé elipsoidální souřadnice η, ψ, φ (charakterizované konstantou ℓ) tak, jak byly zavedeny na přednášce.

Rovnici pro jedinou složku A^φ vektorového potenciálu dostaneme výpočtem indukce $\vec{B}$ a jejím dosazením do zdrojové magnetostatické rovnice:

- 1) Pro diskutovaný vektorový potenciál spočítejte v oblých eliptických souřadnicích magnetickou indukci $\vec{B}$. Ověřte v úvodu zmíněný předpoklad o směru $\vec{B}$.
- 2) Vyjádřete v oblých eliptických souřadnicích vakuovou rovnici $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$ platnou všude mimo samotný elipsoid s proudem.

Separace proměnných

Výslednou rovnici lze řešit separací proměnných pomocí ansatzu

$$A^\varphi(\eta, \psi) = a \mathcal{R}(\eta) \mathcal{P}(\psi) ,$$

kde a bude normalizační konstanta.

- 3) Separujte proměnné, zvolte separační konstantu a sestavte rovnice pro $\mathcal{R}(\eta)$ a $\mathcal{P}(\psi)$.

Pro snadnější identifikaci těchto rovnic bude vhodné změnit používané elipsoidální souřadnice na

$$s = \text{sh } \eta , \quad c = \cos \psi .$$

- 4) Přepište separované rovnice v těchto proměnných, tj. napište rovnice pro $\mathcal{R}(s)$ a $\mathcal{P}(c)$. Jak zjistíte, rovnice pro $\mathcal{P}(c)$ odpovídá přímo rovnici pro asociované Legendrovy funkce

$$(1 - c^2) \frac{d^2}{dc^2} \mathcal{P} - 2c \frac{d}{dc} \mathcal{P} + \left(K - \frac{m^2}{1 - c^2} \right) \mathcal{P} = 0 ,$$

kde K je konstanta ze separace a m vhodný numerický faktor. Jaká hodnota vám vyšla pro faktor m ?

Podobně jako v diskuzi separace proměnných ve sférických souřadnicích, podmínka regularity na ose si vyžádá, že separační konstanta K musí mít tvar

$$K = l(l + 1) , \quad l \in \mathbb{N} .$$

Separací funkce $\mathcal{P}(c)$ je pak dána lineární kombinací asociovaných Legendrových funkcí $P_l^m(c)$.

Rovnice pro separační funkci $\mathcal{R}(s)$ je velmi podobná rovnici pro $\mathcal{P}(c)$.

- 5) Ověřte, že se jedná opět o rovnici pro asociované Legendrovy funkce, pouze vyčíslednou na imaginární ose.

Separční funkce $\mathcal{R}(s)$ by tak měla být tvořena lineární kombinací funkcí $P_l^m(is)$. Avšak rovnice pro asociované Legendrovy funkce mají vedle řešení P_l^m ještě další nezávislá řešení Q_l^m . Při diskuzi úhlové závislosti na $c = \cos \psi$ se tyto řešení neuvažují pro nevhodné chování na intervalu $c \in (-1, 1)$. Při vyšetřování závislosti na proměnné s se řešení $Q_l^m(is)$ ale mohou hodit a nabídnout vhodné asymptotické chování pro $s \rightarrow \infty$. Obecné řešení pro funkci $\mathcal{R}(s)$ je tak lineární kombinací funkcí $P_l^m(is)$ a $Q_l^m(is)$. Koeficienty v lineární kombinaci přirozeně zvolíme tak, aby výsledek byl reálný.

Řešení $l = 1$

V dalším případě uvažujme jako jednoduchý příklad pole odpovídající volbě $l = 1$.

- 6) Napište explicitně vektorový potenciál $\vec{A}_{\text{in}}$ daný funkcemi $\mathcal{P}(c) = P_1^m(c)$ a $\mathcal{R}(s) = P_1^m(is)$ a vyjádřete potenciál v původních oblých elipsoidálních souřadnicích η a ψ .
- 7) Vyjádřete v oblých elipsoidálních souřadnicích i odpovídající magnetickou indukci $\vec{B}_{\text{in}}$.
- 8) Převed'te magnetickou indukci $\vec{B}_{\text{in}}$ do cylindrických souřadnic. O jaké magnetické pole se jedná?

Zde je výhodné použít vztahy

$$\begin{aligned} z &= \ell \operatorname{sh} \eta \cos \psi, & R &= \ell \operatorname{ch} \eta \sin \psi, \\ \vec{e}_z &= \cos \alpha \vec{e}_\eta - \sin \alpha \vec{e}_\psi, & \vec{e}_\eta &= \cos \alpha \vec{e}_z + \sin \alpha \vec{e}_R, & \sin \alpha &= \frac{\ell}{h} \operatorname{sh} \eta \sin \psi, \\ \vec{e}_R &= \sin \alpha \vec{e}_\eta + \cos \alpha \vec{e}_\psi, & \vec{e}_\psi &= -\sin \alpha \vec{e}_z + \cos \alpha \vec{e}_R, & \cos \alpha &= \frac{\ell}{h} \operatorname{ch} \eta \cos \psi, \end{aligned}$$

kde h je dáno Lamého koeficienty h_η a h_ψ ,

$$h = h_\eta = h_\psi = \ell \sqrt{\operatorname{ch}^2 \eta - \sin^2 \psi} = \ell \sqrt{\operatorname{sh}^2 \eta + \cos^2 \psi}.$$

Nalezením $\vec{B}_{\text{in}}$ jste odhalili, že získané pole není vhodné pro interpretaci jako pole kolem rotujícího nabitého elipsoidu. Asymptoticky neodpovídá očekávanému chování. K nalezení vhodně chovajícího se pole je potřeba využít pro separční funkci $\mathcal{R}(s)$ jinou kombinaci funkcí $P_1^m(is)$ a $Q_1^m(is)$.

- 9) Ověřte, že např. funkce

$$\mathcal{R}(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} (-s + (1+s^2) \operatorname{arccot} s)$$

splňuje výše získanou rovnici pro $\mathcal{R}$.

- 10) Vyjádřete vektorový potenciál $\vec{A}_{\text{out}}$ daný touto funkcí $\mathcal{R}(s)$ a funkcí $\mathcal{P}(c) = P_1^m(c)$ v původních oblých elipsoidálních souřadnicích η a ψ .
- 11) Nalezněte odpovídající magnetickou indukci $\vec{B}_{\text{out}}$ v oblých elipsoidálních souřadnicích.
- 12) Určete asymptotické chování složek B_{out}^η a B_{out}^ψ pro velkou vzdálenost od počátku, $r \gg \ell$. Mělo by vyjít očekávané klesání pro pole ostrovního systému proudů. Jaké to je?

Zde je dobré si uvědomit vztahy ke sférickým souřadnicím

$$r = \ell \sqrt{\operatorname{ch}^2 \eta - \cos^2 \psi} = \ell \sqrt{\operatorname{sh}^2 \eta + \sin^2 \psi}, \quad \cot \vartheta = \operatorname{th} \eta \cot \psi.$$

Z nich plynou rozvoje pro velká r

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \eta &= \frac{r}{\ell} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \frac{\ell^2}{r^2} + \dots \right), & \sin \psi &= \sin \vartheta \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta \frac{\ell^2}{r^2} + \dots \right), \\ \operatorname{ch} \eta &= \frac{r}{\ell} \left(1 + \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta \frac{\ell^2}{r^2} + \dots \right), & \cos \psi &= \sin \vartheta \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \frac{\ell^2}{r^2} + \dots \right), \\ \operatorname{th} \eta &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\ell^2}{r^2} + \dots, & \tan \psi &= \tan \vartheta \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\ell^2}{r^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Navíc platí

$$\operatorname{arccot} \frac{1}{\epsilon} = \epsilon - \frac{1}{3} \epsilon^3 + \dots \quad \text{pro } \epsilon \ll 1.$$

Zdroj pole

Uvažujme nyní kombinaci obou získaných polí: uvnitř elipsoidu ($\eta < \eta_0$) použijte pole $\vec{B}_{\text{in}}$ a vně elipsoidu ($\eta > \eta_0$) pole $\vec{B}_{\text{out}}$.

- 13) Lze splnit navazující podmínky pro normálové složky pole? Jak musíte zvolit normalizační konstanty u obou řešení?
- 14) Z tečných složek magnetické indukce spočítejte plošný proud na elipsoidu

$$\vec{\tau} = \varepsilon_0 c^2 \vec{n} \times (\vec{B}_{\text{out}} - \vec{B}_{\text{in}}) .$$

- 15) Jak jsme již konstatovali, výsledný plošný proud by měl mít směr $\vec{e}_\varphi$. Pro jaké rozložení náboje σ na elipsoidu $\eta = \eta_0$ lze tento proud interpretovat jako konvekční proud způsobený rotací o úhlové rychlosti ω ? Připomíná vám tato hustota nějakou na přednášce či cvičení diskutovanou situaci? Interpretujte nalezený zdroj!

Připomeňme, že orbitální rychlost při rotaci kolem osy z ve vzdálenosti R od osy je $\vec{v} = \omega R \vec{e}_\varphi$ a konvekční plošný proud je $\vec{\tau} = \sigma \vec{v}$.

Závěrem

Vhodnou volbou separovaného řešení jste našli magnetické pole rozumně interpretovatelného rotujícího objektu. Pro jiná nábojová rozložení na rotujícím elipsoidu bychom museli pole hledat pomocí složitějších lineárních kombinací přípustných řešení pro separační funkce $\mathcal{R}$ a $\mathcal{P}$. Všechna tato řešení by však asymptoticky byla podobná, jak vyplývá z obecného multipólového chování pole ve velkých vzdálenostech.

Poznámky

Předpokládejme, že zafixujeme magnetické pole v asymptotické oblasti. To odpovídá fixní volbě normalizačních konstant ve vektorovém potenciálu $\vec{A}_{\text{out}}$. Pokud pro toto pole spočteme celkový náboj Q na zdrojovém elipsoidu, trochu překvapivě nalezneme, že Q závisí na velikosti elipsoidu. Překvapivě proto, že magnetické pole vně elipsoidu na velikosti elipsoidu nezávisí.

Pro fixované elektrické pole v analogické situaci je celkový náboj na elipsoidu nezávislý na velikosti elipsoidu. Celkový náboj lze totiž odečíst z elektrického toku, který můžeme spočítat v asymptotické oblasti, kde do výpočtu velikost elipsoidu nijak nevstoupí.

Podobný argument ale neplatí pro magnetické pole. Zde bychom se mohli pokusit použít Ampérův zákon dávající do souvislosti cirkulaci $\vec{B}$ podél smyčky a proud skrze smyčku. Nabízí se smyčka mající jednu část na ose z , kterou uzavřeme polokruhem velkého poloměru r . Proud procházející touto smyčkou je celkový proud I tekoucí na povrchu elipsoidu. Ten je dán celkovým nábojem Q a periodou rotace T vztahem $I = Q/T$. Pokud by tedy cirkulace magnetické indukce nezávisela na velikosti elipsoidu, měli bychom argument, že ani I , a následně ani náboj Q , by neměl záviset na velikosti elipsoidu. Cirkulace $\vec{B}$ ale na velikosti elipsoidu závisí. Část smyčky na ose z prochází oblastí uvnitř zdrojového elipsoidu. Příspěvek od vnitřního pole bude různý od příspěvku od vnějšího pole a rozdíl bude záviset na velikosti elipsoidu.

Co zůstává invariantní, na zdrojovém elipsoidu nezávislé, je dipólový moment systému. Přirozeně, tento moment určuje asymptotickou podobu pole.

Druhá poznámka se týká rovnice pro vektorový potenciál. Je snadné ověřit, že v úvodu zvolený vektorový potenciál splňuje Coulombovu kalibrační podmínku $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, což zaručuje, že potenciál splňuje vektorovou Laplaceovu rovnici

$$-\Delta \vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \vec{j} .$$

To však neznamená, že Laplaceovu rovnici splňuje i složka A^φ . A to ani s uvážením skutečností, že zdroj i vektorový potenciál mají pouze složku ve směru $\vec{e}_\varphi$. Obecně $-\Delta A^\varphi \neq \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j^\varphi$. V našem případě můžete dokázat

$$-\Delta(A^\varphi \vec{e}_\varphi) = \left(-\Delta A^\varphi + \frac{1}{R^2} A^\varphi \right) \vec{e}_\varphi .$$