Definice a vlastnosti distribucí na $\mathbb{R}$

Definice

Distribuce jsou lineární spojité funkcionály na prostoru testovacích funkcí. Prostor distribucí $\mathcal{D}'$ je tak duálem k prostoru testovacích funkcí $\mathcal{D}$.

$$T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}\,, \quad \varphi \in \mathcal{D} \to \big\langle T, \varphi \big\rangle\,.$$

Intuitivně má působení distribuce T na testovací funkci φ význam

$$\big\langle T, \varphi \big\rangle = \int_{\mathbb{R}} T(x)\varphi(x)\,dx\,.$$

Tímto vztahem jsou definovány tzv. regulární distribuce odpovídající lokálně integrovatelným funkcím. Máme tedy $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}} \subset \mathcal{D}'$.
Prostor testovacích funkcí $\mathcal{D}$ se může volit podle potřeby a jeho volba vymezuje velikost prostoru distribucí. Obvyklé volby jsou:

$\mathcal{D}'$ – distribuce

$\mathcal{D}$ prostor hladkých funkcí s kompaktním nosičem
$\mathcal{D}'$ prostor distribucí s neomezeným růstem

$$\mathcal{D} = \{\varphi : \varphi \in \mathcal{C}^\infty \ \wedge \ \mathrm{supp}\,\varphi \text{ je kompaktní}\}$$

$$\varphi_n \overset{\mathcal{D}}{\to} \varphi \ \equiv \ \exists K \text{ kompaktní} \quad \forall n \ \mathrm{supp}\,\varphi_n \subset K \quad \forall k \ \ \varphi_n^{[k]} \overset{K}{\rightrightarrows} \varphi^{[k]}$$

$\mathcal{S}'$ – temperované distribuce

$\mathcal{S}$ prostor rychle klesajících hladkých funkcí
$\mathcal{S}'$ prostor distribucí s pomalým růstem, tzv. temperované distribuce

$$\mathcal{S} = \{\varphi : \varphi \in \mathcal{C}^\infty \ \wedge \ \forall m \ \ |x|^m \varphi(x) \text{ omezená}\}$$

$$\varphi_n \overset{\mathcal{S}}{\to} \varphi \ \equiv \ \forall k, m \ \ |x|^m\, \varphi_n^{[k]}(x) \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} |x|^m\, \varphi^{[k]}(x)$$

$\mathcal{E}'$ – distribuce s kompaktním nosičem

$\mathcal{E}$ prostor hladkých funkcí bez omezení na růst
$\mathcal{E}'$ prostor distribucí s kompaktním nosičem

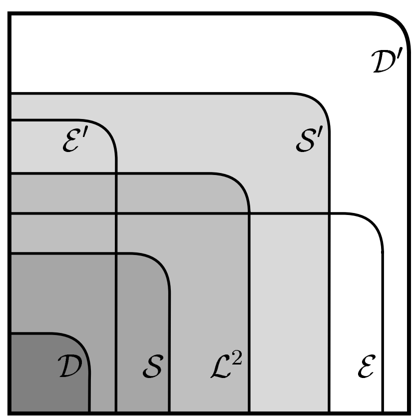
$$\mathcal{E} = \{\varphi : \varphi \in \mathcal{C}^\infty\}$$

$$\varphi_n \overset{\mathcal{E}}{\to} \varphi \ \equiv \ \forall K \text{ kompaktní} \quad \forall k \ \ \varphi_n^{[k]} \overset{K}{\rightrightarrows} \varphi^{[k]}$$

Poznamenejme, že prostor kvadraticky integrovatelných funkcí $\mathcal{L}^2$ tvoří Hilbertův prostor a lze proto ztotožnit se svým vlastním duálem, $\mathcal{L}^{2\prime} = \mathcal{L}^2$.
Tyto prostory jsou v následujícím vztahu:

$$\mathcal{D} \overset{\text{hustě}}{\subset} \mathcal{S} \overset{\text{hustě}}{\subset} \mathcal{E}\,, \qquad \mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'\,,$$

$$\mathcal{D} \overset{\text{hustě}}{\subset} \mathcal{S} \overset{\text{hustě}}{\subset} \mathcal{L}^2 \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'\,.$$



Dále budeme hlavně uvažovat obecné distribuce z $\mathcal{D}'$. Prostor temperovaných distribucí $\mathcal{S}'$ je důležitý v teorii Fourierovy transformace.

Vlastnosti

Rovnost distribucí na oblasti Ω:

$$T_1 \overset{\Omega}{=} T_2 \quad \equiv \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D} \;\; \operatorname{supp}\varphi \subset \Omega \Rightarrow \big\langle T_1, \varphi \big\rangle = \big\langle T_2, \varphi \big\rangle \, .$$

Nosič distribuce T:

$$\operatorname{supp} T \;\equiv\; \mathbb{R} - \bigcup_{\Omega :\, T \overset{\Omega}{=} 0} \Omega \, .$$

Násobení distribuce T hladkou funkcí f:

$$\big\langle f\, T, \varphi \big\rangle \;\equiv\; \big\langle T, f\varphi \big\rangle \, .$$

Konvergence distribucí:

$$T_n \overset{\mathcal{D}'}{\to} T \quad \equiv \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D} \quad \big\langle T_n, \varphi \big\rangle \to \big\langle T, \varphi \big\rangle \, .$$

Derivace distribucí:

$$\big\langle T', \varphi \big\rangle \;\equiv\; -\big\langle T, \varphi' \big\rangle \, .$$

Platí

$$(T_1 + T_2)' = T_1' + T_2' \, , \qquad (f\, T)' = f'\, T + f\, T' \, .$$

Derivace nehladké funkce

Funkci f hladká mimo bod $x = 0$ lze vyjádřit jako kombinace dvou hladkých funkcí f_- a f_+

$$f(x) = f_-(x)\theta(-x) + f_+(x)\theta(x) \, .$$

Označme $[f]$ skok v $x = 0$ a $f^{[\prime]}$ nedistribuční derivaci funkce f:

$$[f] = f_+(0) - f_-(0) \, , \qquad f^{[\prime]}(x) = f_-'(x)\,\theta(-x) + f_+'(x)\,\theta(x) \, .$$

Pak pro distribuční derivace funkce f platí

$$\begin{aligned}
&f' = f^{[\prime]} + [f]\,\delta \, , \\
&f'' = f^{[\prime\prime]} + [f]\,\delta' + [f^{[\prime]}]\,\delta \, , \\
&\vdots \\
&f^{(n)} = f^{[n]} + [f]\,\delta^{(n-1)} + [f^{[1]}]\,\delta^{(n-2)} + \cdots + [f^{[n-1]}]\,\delta \, .
\end{aligned}$$

Zde $\theta(x)$ a $\delta(x)$ jsou Heavisideova skoková funkce a Diracova δ-funkce – viz příklady distribucí.

Substituce v distribuci

Mějme transformaci souřadnic danou hladkými prostými funkcemi $\boldsymbol{y}$, resp. $\boldsymbol{x}$:

$$y = \boldsymbol{y}(x) \, , \quad x = \boldsymbol{x}(y) \, , \qquad \text{kde funkce } \boldsymbol{y} \text{ a } \boldsymbol{x} \text{ jsou navzájem inverzní}$$

Distribuce $T \circ \boldsymbol{y}$ získaná substitucí funkce $\boldsymbol{y}$ do distribuce T je pak definována

$$\big\langle T \circ \boldsymbol{y}, \varphi \big\rangle = \big\langle T, |\boldsymbol{x}'| \;\varphi \circ \boldsymbol{x} \big\rangle = \left\langle T, \frac{\varphi}{|\boldsymbol{y}'|} \circ \boldsymbol{x} \right\rangle$$

Poslední dva výrazy jsou totožné, jak plyne z věty o derivaci inverzní funkce.

Fourierova transformace

Definice

Fourierova transformace na prostoru rychle klesajících testovacích funkcí $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{F} \,:\, \mathcal{S} \to \mathcal{S}\,, \qquad \big(\mathcal{F}\,\varphi\big)(k) \;= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(i\,xk)\,\varphi(x)\,dx\,,$$

$$\mathcal{F}^{*} \,:\, \mathcal{S} \to \mathcal{S}\,, \qquad \big(\mathcal{F}^{*}\varphi\big)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-i\,xk)\,\varphi(x)\,dx\,.$$

Fourierova transformace na prostoru temperovaných distribucí $\mathcal{S}'$:

$$\mathcal{F} \,:\, \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'\,, \qquad \big\langle \mathcal{F}\,T, \varphi \big\rangle \;= \big\langle T, \mathcal{F}\,\varphi \big\rangle\,,$$

$$\mathcal{F}^{*} \,:\, \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'\,, \qquad \big\langle \mathcal{F}^{*}T, \varphi \big\rangle = \big\langle T, \mathcal{F}^{*}\varphi \big\rangle\,.$$

Formálně tyto vztahy vedou na stejné výrazy jako pro testovací funkce.

Vlastnosti

$\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^{*}$ jsou inverzní:

$$\mathcal{F}\,\mathcal{F}^{*} = \mathcal{F}^{*}\mathcal{F} = \mathrm{id}\,, \qquad\qquad \mathcal{F}^{*}f = \mathcal{F}\,f^{-} = \big(\mathcal{F}\,f\big)^{-} \qquad \text{kde } f^{-}(x) = f(-x)\,.$$

$\mathcal{F}$ transformuje na sebe následující prostory:

$$\mathcal{F} \,:\, \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'\,, \qquad \mathcal{F} \,:\, \mathcal{L}^2 \to \mathcal{L}^2\,, \qquad \mathcal{F} \,:\, \mathcal{S} \to \mathcal{S}\,,$$

$$\mathcal{F} \,:\, \mathcal{L}^q \to \mathcal{L}^p \qquad \text{pro } \; 1 < q \leq 2 \; \text{ a } \; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,,$$

$$\mathcal{F} \,:\, \mathcal{L}^1 \to \{\varphi \,:\, \varphi \in \mathcal{C}^{\infty} \,\wedge\, \lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0\}\,.$$

$$T \in \mathcal{E}' \quad \Leftrightarrow \quad \big(\mathcal{F}\,T\big)(k) \quad \text{je celá analytická funkce} \quad \wedge$$
$$\exists\, C, N, R \quad \forall\, k \qquad \big|\big(\mathcal{F}\,T\big)(k)\big| \leq C(1 + |k|)^N \exp(R\,\mathrm{Im}\,k)\,,$$

$$\text{pak} \quad \big(\mathcal{F}\,T\big)(k) = \Big\langle T, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(i\,kx) \Big\rangle\,.$$

Chování $\mathcal{F}$ vůči derivaci:

$$\mathcal{F}\,T' = -ik\,\mathcal{F}\,T\,, \qquad \big(\mathcal{F}\,T\big)' = \mathcal{F}\big(i\,x\,T\big)\,.$$

Konvoluce

Operace konvoluce '$*$' lze za jistých podmínek definovat obecně pro dvě distribuce. Zde uvedeme pouze definici ve speciálních případech:

$$f,\, g \in \mathcal{S} \;\to\; f * g \in \mathcal{S} \;: \quad (f * g)(x) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,dy\,,$$

$$T \in \mathcal{S}',\, f \in \mathcal{S} \;\to\; T * f \;:\; \big\langle T * f, \varphi \big\rangle \;\equiv\; \big\langle T, f^{-} * \varphi \big\rangle\,, \qquad \text{kde} \quad f^{-}(x) = f(-x)\,.$$

Následující výrazy platí, pokud mají pro distribuce f, g, h smysl

$$(f * g) * h = f * (g * h)\,, \quad f * g = g * f\,,$$
$$(f * g)' = f' * g = f * g'\,,$$
$$\delta * f = f\,, \quad \delta' * f = f'\,.$$

Konvoluce úzce souvisí s Fourierovou transformací součinu:

$$\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathcal{F}(T * f) = \big(\mathcal{F}\,T\big)\,\big(\mathcal{F}\,f\big)\,, \qquad \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}(f\,T) = \big(\mathcal{F}\,T\big) * \big(\mathcal{F}\,f\big)\,.$$

Příklady

$$\mathcal{F}\,\delta(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\mathcal{F}\,1 = \sqrt{2\pi}\,\delta(k)$$

$$\mathcal{F}\,\delta(x-y) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\exp(i\,yk)$$

$$\mathcal{F}\exp(-i\,xl) = \sqrt{2\pi}\,\delta(k-l)$$

$$\mathcal{F}\,\delta'(x) = -\tfrac{i}{\sqrt{2\pi}}\,k$$

$$\mathcal{F}\,x = -i\sqrt{2\pi}\,\delta'(k)$$

$$\mathcal{F}\,\delta^{[n]}(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(-ik)^n$$

$$\mathcal{F}\,x^n = \sqrt{2\pi}\,(-i)^n\,\delta^{[n]}(k)$$

$$\mathcal{F}\exp\Bigl(-\frac{1}{2}\,a\,x^2\Bigr) = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\exp\Bigl(-\frac{1}{2}\frac{k^2}{a}\Bigr)$$

$$\mathcal{F}\exp\Bigl(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{a}\Bigr) = \sqrt{a}\,\exp\Bigl(-\frac{1}{2}\,a\,k^2\Bigr)$$

$$\mathcal{F}\exp\bigl(-a\,|x|\bigr) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{2\,a}{a^2+k^2}$$

$$\mathcal{F}\,\frac{2\,a}{a^2+x^2} = \sqrt{2\pi}\,\exp\bigl(-a\,|k|\bigr)$$

$$\mathcal{F}\biggl(\theta(x)\,\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\exp\bigl(-a\,x\bigr)\biggr) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\Bigl(\frac{1}{a-i\,k}\Bigr)^{\alpha}$$

$$\mathcal{F}(a+i\,x)^{-\alpha} = \sqrt{2\pi}\,\theta(k)\,\frac{k^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\exp\bigl(-a\,k\bigr)$$

$$\mathcal{F}\,\theta(x) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{k+i0}$$

$$\mathcal{F}\,\frac{1}{x-i\,0} = i\sqrt{2\pi}\,\theta(k)$$

$$\mathcal{F}\,\theta(-x) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{k-i0}$$

$$\mathcal{F}\,\frac{1}{x+i\,0} = -i\sqrt{2\pi}\,\theta(-k)$$

$$\mathcal{F}\,\mathrm{sign}(x) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathcal{P}\frac{1}{k}$$

$$\mathcal{F}\Bigl(\mathcal{P}\frac{1}{x}\Bigr) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{sign}(k)$$

$$\mathcal{F}\,|x| = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathcal{R}\frac{1}{k^2}$$

$$\mathcal{F}\Bigl(\mathcal{R}\frac{1}{x^2}\Bigr) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,|k|$$

$$\mathcal{F}\,\chi_{\langle -a,a\rangle}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(ak)}{k}$$

$$\mathcal{F}\,\frac{\sin(ax)}{x} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\chi_{\langle -a,a\rangle}(k)$$

$$\mathcal{F}\log|x| = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathcal{R}\frac{1}{|k|} - \sqrt{2\pi}\,C\,\delta(k)$$

$$\mathcal{F}\Bigl(\mathcal{R}\frac{1}{|x|}\Bigr) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\bigl(\log|k| + C\bigr)$$

kde C je Eulerova konstanta

Příklady distribucí

Heavisideova skoková funkce, charakteristická funkce a Diracova δ-funkce

Heavisideova skoková funkce $\theta(x)$ a charakteristická funkce $\chi_I(x)$

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R}^- \\ 1 & \text{pro } x \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \qquad \theta = \chi_{\mathbb{R}^+} \qquad \chi_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in I \\ 0 & \text{pro } x \notin I \end{cases}$$

$$\langle \theta, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^+} \varphi(x)\, dx \qquad \langle \chi_I, \varphi \rangle = \int_I \varphi(x)\, dx$$

Diracova funkce $\delta(x)$ a její derivace $\delta^{(n)}(x)$

$$\delta(x) = \theta'(x)$$

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

$$\langle \delta^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n\, \varphi^{(n)}(0)$$

platí:

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$$

$$f(x)\delta'(x) = f(0)\,\delta'(x) - f'(0)\,\delta(x)$$

$$f(x)\delta''(x) = f(0)\,\delta''(x) - 2f'(0)\,\delta'(x) + f''(0)\,\delta(x)$$

δ-funkce složená s hladkou funkcí f dává:

$$\delta\big(f(x)\big) = \sum_{x_\mathrm{o}\,:\, f(x_\mathrm{o})=0} |f'(x_\mathrm{o})|^{-1}\, \delta(x - x_\mathrm{o})$$

δ-funkce a její derivace jsou homogenní vůči přeškálování argumentu:

$$\delta(a\,x) = a^{-1}\,\delta(x) \qquad \delta^{(n)}(a\,x) = a^{-n-1}\,\delta^{(n)}(x) \qquad a \in \mathbb{R}^+$$

δ-funkce je obecné řešení rovnice $x\,T = 0$:

$$x\,T = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T = c\,\delta\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

Distribuční logaritmus

$\log|x|$ – logaritmus absolutní hodnoty

$\log|x|$ je lokálně integrovatelná funkce

$$\langle \log|x|, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \log|x|\, \varphi(x)\, dx$$

$\log(x \pm i0)$ – logaritmus analyticky prodloužený na $\mathbb{R}^-$

$\log(x \pm i0) = \log|x| \pm i\pi\,\theta(-x)$ integrování nad/pod řezem na $\mathbb{R}^-$

$$\langle \log(x \pm i0), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \log|x|\, \varphi(x)\, dx \pm i\pi \int_{\mathbb{R}^-} \varphi(x)\, dx$$

Distribuční $\frac{1}{x}$

Hlavní hodnota $\mathcal{P}\frac{1}{x}$

$$\mathcal{P}\frac{1}{x} = \big(\log|x|\big)' = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\theta(-x-\varepsilon)+\theta(x-\varepsilon)}{x}$$

$$\Big\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi \Big\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus\langle -\varepsilon,\varepsilon\rangle} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

$\frac{1}{x\pm i0}$ – analytické prodloužení pod/nad pólem

$$\frac{1}{x\pm i0} = \big(\log(x\pm i0)\big)' = \mathcal{P}\frac{1}{x} \mp i\pi\,\delta(x)$$

$$\Big\langle \frac{1}{x\pm i0}, \varphi \Big\rangle = \mp i\pi\,\varphi(0) + \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus\langle -\varepsilon,\varepsilon\rangle} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

$\mathcal{R}\frac{\theta(\pm x)}{x}$ – regularizace na $\mathbb{R}^{\pm}$

$$\mathcal{R}\frac{\theta(\pm x)}{x} = \big(\theta(\pm x)\log|x|\big)' = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{\theta(\pm x-\varepsilon)}{x} + (\log\varepsilon)\,\delta(x)\right)$$

$$\Big\langle \mathcal{R}\frac{\theta(\pm x)}{x}, \varphi \Big\rangle = \pm \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{\pm\varepsilon}^{\pm\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + (\log\varepsilon)\,\varphi(0)\right)$$

$\mathcal{R}\frac{1}{|x|}$ – regularizace převrácené absolutní hodnoty

$$\mathcal{R}\frac{1}{|x|} = \big(\mathrm{sign}(x)\log|x|\big)' = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{\theta(-x-\varepsilon)+\theta(x-\varepsilon)}{|x|} + 2(\log\varepsilon)\,\delta(x)\right)$$

$$\Big\langle \mathcal{R}\frac{1}{|x|}, \varphi \Big\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{\mathbb{R}\setminus\langle -\varepsilon,\varepsilon\rangle} \frac{\varphi(x)}{|x|}\, dx + 2(\log\varepsilon)\,\varphi(0)\right)$$

Vztahy mezi různými distribučními tvary $1/x$ jsou:

$$\frac{1}{x+i0} = \mathcal{P}\frac{1}{x} - i\pi\delta(x) \qquad \mathcal{P}\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+i0} + \frac{1}{x-i0}\right)$$

$$\frac{1}{x-i0} = \mathcal{P}\frac{1}{x} + i\pi\delta(x) \qquad \delta(x) = \frac{i}{2\pi}\left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0}\right)$$

$$\mathcal{R}\frac{\theta(x)}{x} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{P}\frac{1}{x} + \mathcal{R}\frac{1}{|x|}\right) \qquad \mathcal{P}\frac{1}{x} = \mathcal{R}\frac{\theta(-x)}{x} + \mathcal{R}\frac{\theta(x)}{x}$$

$$\mathcal{R}\frac{\theta(-x)}{x} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{P}\frac{1}{x} - \mathcal{R}\frac{1}{|x|}\right) \qquad \mathcal{R}\frac{1}{|x|} = -\mathcal{R}\frac{\theta(-x)}{x} + \mathcal{R}\frac{\theta(x)}{x}$$

Distribuce $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ a $\frac{1}{x\pm i0}$ jsou homogenní vůči přeškálování argumentu:

$$\mathcal{P}\frac{1}{ax} = \frac{1}{a}\mathcal{P}\frac{1}{x}\,, \qquad \frac{1}{ax\pm i0} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{x\pm i0}\,, \qquad a\in\mathbb{R}^+\,,$$

Distribuce $\mathcal{R}\frac{\theta(\pm x)}{x}$ a $\mathcal{R}\frac{1}{|x|}$ homogenní nejsou:

$$\mathcal{R}\frac{\theta(\pm x)}{ax} = \frac{1}{a}\mathcal{R}\frac{\theta(\pm x)}{x} \pm \frac{\log a}{a}\,\delta(x)\,, \qquad \mathcal{R}\frac{1}{|ax|} = \frac{1}{a}\mathcal{R}\frac{1}{|x|} + \frac{2\log a}{a}\,\delta(x)\,, \qquad a\in\mathbb{R}^+\,.$$

Distribuční zobecnění $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ a $\frac{1}{x\pm i0}$ funkce $\frac{1}{x}$ splňují rovnici $x\,T=1$:

$$x\,T = 1 \quad\Leftrightarrow\quad T = \mathcal{P}\frac{1}{x} + c\,\delta\,, \quad c \text{ konstanta}\,.$$

Distribuční $\frac{1}{x^2}$

Regularizace $\mathcal{R}\frac{1}{x^2}$

$$\mathcal{R}\frac{1}{x^2} = -\Big(\mathcal{P}\frac{1}{x}\Big)' = \lim_{\varepsilon\to 0+}\bigg(\frac{\theta(-x-\varepsilon)+\theta(x-\varepsilon)}{x^2} - \frac{2}{\varepsilon}\,\delta(x)\bigg)$$

$$\Big\langle\mathcal{R}\frac{1}{x^2},\varphi\Big\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+}\bigg(\int_{\mathbb{R}\setminus\langle-\varepsilon,\varepsilon\rangle}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \frac{2}{\varepsilon}\,\varphi(0)\bigg)$$

$\mathcal{R}\frac{\theta(\pm x)}{x^2}$ – regularizace na $\mathbb{R}^\pm$

$$\mathcal{R}\frac{\theta(\pm x)}{x^2} = -\Big(\mathcal{R}\frac{\theta(\pm x)}{x}\Big)' = \lim_{\varepsilon\to 0+}\bigg(\frac{\theta(\pm x-\varepsilon)}{x} - \frac{1}{\varepsilon}\,\delta(x) \pm \big(1-\log\varepsilon\big)\,\delta'(x)\bigg)$$

$$\Big\langle\mathcal{R}\frac{\theta(\pm x)}{x^2},\varphi\Big\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+}\bigg(\pm\int_{\pm\varepsilon}^{\pm\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx - \frac{1}{\varepsilon}\,\varphi(0) \pm \big(\log\varepsilon - 1\big)\,\varphi'(0)\bigg)$$

$\mathcal{R}\frac{\operatorname{sign}(x)}{x^2}$

$$\mathcal{R}\frac{\operatorname{sign}(x)}{x^2} = -\Big(\mathcal{R}\frac{1}{|x|}\Big)' = \lim_{\varepsilon\to 0+}\bigg(\frac{-\theta(-x-\varepsilon)+\theta(x-\varepsilon)}{x^2} + 2\big(1-\log\varepsilon\big)\,\delta'(x)\bigg)$$

$$\Big\langle\mathcal{R}\frac{\operatorname{sign}(x)}{x^2},\varphi\Big\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+}\bigg(\int_{\mathbb{R}\setminus\langle-\varepsilon,\varepsilon\rangle}\operatorname{sign}(x)\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx + 2\big(\log\varepsilon - 1\big)\,\varphi'(0)\bigg)$$

Vztahy mezi různými distribučními tvary $1/x^2$ jsou:

$$\mathcal{R}\frac{\theta(x)}{x^2} = \frac{1}{2}\Big(\mathcal{R}\frac{1}{x^2} + \mathcal{R}\frac{\operatorname{sign}(x)}{x^2}\Big) \qquad \mathcal{R}\frac{1}{x^2} = \mathcal{R}\frac{\theta(-x)}{x^2} + \mathcal{R}\frac{\theta(x)}{x^2}$$

$$\mathcal{R}\frac{\theta(-x)}{x^2} = \frac{1}{2}\Big(\mathcal{R}\frac{1}{x^2} - \mathcal{R}\frac{\operatorname{sign}(x)}{x^2}\Big) \qquad \mathcal{R}\frac{\operatorname{sign}(x)}{x^2} = -\mathcal{R}\frac{\theta(-x)}{x^2} + \mathcal{R}\frac{\theta(x)}{x^2}$$

Na rozdíl od $\mathcal{R}\frac{1}{x^2}$, distribuce $\mathcal{R}\frac{\theta(\pm x)}{x^2}$ a $\mathcal{R}\frac{\operatorname{sign}(x)}{x^2}$ nejsou homogenní:

$$\mathcal{R}\frac{\theta(\pm x)}{(ax)^2} = \frac{1}{a^2}\,\mathcal{R}\frac{\theta(\pm x)}{x^2} \mp \frac{1}{a^2}\log a\,\delta'(x)\ , \quad \mathcal{R}\frac{\operatorname{sign}(x)}{(ax)^2} = \frac{1}{a^2}\,\mathcal{R}\frac{\operatorname{sign}(x)}{x^2} - \frac{2}{a^2}\log a\,\delta'(x)\ .$$

Obecné řešení rovnice $x^2\,T = 1$ má tvar

$$x^2\,T = 1 \quad \Leftrightarrow \quad T = \mathcal{R}\frac{1}{x^2} + a\,\delta + b\,\delta'\ , \quad a,\, b \text{ konstanty}\ .$$

Distribuční limity

$$\lim_{a\to 0}\frac{\sin(a\,x)}{x} = \pi\,\delta(x) \qquad \lim_{a\to 0}\mathcal{P}\frac{\cos(a\,x)}{x} = 0$$

$$\lim_{a\to 0}\frac{a}{x^2+a^2} = \pi\,\delta(x) \qquad \lim_{a\to 0}\frac{x}{x^2+a^2} = \mathcal{P}\frac{1}{x}$$