Distribuce na $\mathbf{E}^3$

Obecné definice

Připomeňme, že třídimenzionální euklidovský prostor umožňuje definovat vzdálenosti a úhly, skalární násobení (metriku $\mathbf{q}_{ab}$), případně násobení vektorové (Levi-Civitův antisymetrický tensor $\boldsymbol{\varepsilon}_{abc}$). S jejich pomocí lze k libovolné hladké ploše zavést jednotkovou normálu $\mathbf{n}$ a k hladké křivce jednotkový tečný vektor $\mathbf{t}$. Dále máme definované měření objemů, ploch a délek (tj., objemový, plošný a lineární integrační element dV, dS a $d\ell$ a jejich orientované verze $d\boldsymbol{S} = \mathbf{n}\, dS$ a $d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{t}\, d\ell$). Jak je v euklidovském prostoru obvyklé, budeme automaticky zvyšovat a snižovat tenzorové indexy pomocí metriky a nebudeme rozlišovat mezi vektory a s nimi asociovanými 1-formami.

Níže budeme studovat distribuce (zobecněné funkce) právě na euklidovském třídimenzionálním prostoru. Mnohé z uvedených definic a vlastností platí i v obecném n-dimenzionálním prostoru. Některé vlastnosti – zejména ty využívající vektorové násobení – jsou však specifické pro prostor dimenze tři.

Tenzorové distribuce

Tenzorová distribuce $\mathbf{T}$ typu (k,l) (tj. distribuční tenzorové pole $\mathbf{T}^{m_1\dots m_k}_{n_1\dots n_l}$) je lineární spojitý funkcionál na prostoru testovacích tenzorových polí typu (l,k).

$\mathbf{T} : \mathcal{D}^l_k \to \mathbb{R}\,, \quad \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}^l_k \to \big\langle \mathbf{T}\,; \boldsymbol{\varphi} \big\rangle = \big\langle \mathbf{T}^{m\dots}_{n\dots}, \boldsymbol{\varphi}^{n\dots}_{m\dots} \big\rangle \in \mathbb{R}\,.$

Středník v zápisu $\langle \mathbf{T}\,; \boldsymbol{\varphi}\rangle$ naznačuje zúžení přes všechny tenzorové indexy. Prostor distribučních tenzorových polí $\mathcal{D}'^{\,k}_{\,l}$ je tak duálem k prostoru testovacích tenzorů $\mathcal{D}^l_k$. Za testovací pole budeme brát hladká tenzorová pole s kompaktním nosičem a konvergencí definovanou přes konvergenci komponent.

Působení (tenzorové) distribuce na testovací funkci má intuitivní význam integrace jejich (zúženého) součinu přes celý prostor. Pro větší názornost budeme vedle matematicky přesného zápisu $\langle \mathbf{T}\,; \boldsymbol{\varphi}\rangle$ používat i zápis pomocí formálního integrálu

$\big\langle \mathbf{T}\,; \boldsymbol{\varphi} \big\rangle = \big\langle \mathbf{T}^{m\dots}_{n\dots}, \boldsymbol{\varphi}^{n\dots}_{m\dots} \big\rangle = \displaystyle\int \mathbf{T}^{m\dots}_{n\dots}(x)\, \boldsymbol{\varphi}^{n\dots}_{m\dots}(x)\; dV\,.$

Integrál má svůj původní význam pro tzv. regulární distribuce odpovídající lokálně integrovatelným tenzorovým polím.

Distribuční tenzorová pole lze též chápat jako tenzorová pole jejichž souřadnice vůči libovolné hladké bázi jsou dány skalárními distribucemi.

Gradient tenzorového pole $\mathbf{T}$

$$\big\langle \nabla_a \mathbf{T}^{m\dots}_{n\dots}, \boldsymbol{\varphi}^{an\dots}_{m\dots} \big\rangle = -\big\langle \mathbf{T}^{m\dots}_{n\dots}, \nabla_a \boldsymbol{\varphi}^{an\dots}_{m\dots} \big\rangle\,, \qquad \int \nabla_a \mathbf{T}^{m\dots}_{n\dots}\, \boldsymbol{\varphi}^{an\dots}_{m\dots}\; dV = -\int \mathbf{T}^{m\dots}_{n\dots}\, \nabla_a \boldsymbol{\varphi}^{an\dots}_{m\dots}\; dV\,.$$

Tato obecná definice je inspirována její platností pro regulární distribuce, kdy zápis pomocí integrálu není pouze formální. V důkazu je potřeba využít Gaussovy věty a faktu, že testovací pole $\boldsymbol{\varphi}$ má kompaktní nosič a vymizí na okraji vhodně zvolené oblasti.

Vektorové operátory

Gradient skalární distribuce T

$\big\langle \nabla T\,; \boldsymbol{\varphi} \big\rangle = -\big\langle T, \nabla\cdot\boldsymbol{\varphi} \big\rangle \qquad \displaystyle\int (\nabla T)\cdot\boldsymbol{\varphi}\; dV = -\int T\,(\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi})\; dV$

Divergence vektorové distribuce $\mathbf{a}$

$\big\langle \nabla\cdot\mathbf{a}, \varphi \big\rangle = -\big\langle \mathbf{a}\,; \nabla\varphi \big\rangle \qquad \displaystyle\int (\nabla\cdot\mathbf{a})\,\varphi\; dV = -\int \mathbf{a}\cdot(\nabla\varphi)\; dV$

Rotace vektorové distribuce $\mathbf{a}$

$\big\langle \nabla\times\mathbf{a}\,; \boldsymbol{\varphi} \big\rangle = \big\langle \mathbf{a}\,; \nabla\times\boldsymbol{\varphi} \big\rangle \qquad \displaystyle\int (\nabla\times\mathbf{a})\cdot\boldsymbol{\varphi}\; dV = \int \mathbf{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\varphi})\; dV$

Singulární zdroje

Charakteristická funkce χ_Ω

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \Omega \\ 0 & \text{pro } x \notin \Omega \end{cases} \qquad \int \chi_\Omega \, \varphi \; dV = \int_\Omega \varphi \; dV$$

Distribuce lokalizované na ploše Σ

Skalární distribuce δ_Σ

$$\langle \delta_\Sigma, \varphi \rangle = \int_\Sigma \varphi \; dS \qquad \int \delta_\Sigma \, \varphi \; dV = \int_\Sigma \varphi \; dS$$

Vektorová distribuce $\boldsymbol{\delta}_\Sigma$

$$\langle \boldsymbol{\delta}_\Sigma \, ; \boldsymbol{\varphi} \rangle = \int_\Sigma \boldsymbol{\varphi} \cdot d\boldsymbol{S} \qquad \int \boldsymbol{\delta}_\Sigma \cdot \boldsymbol{\varphi} \; dV = \int_\Sigma \boldsymbol{\varphi} \cdot d\boldsymbol{S}$$

Ze vztahu plošných elementů $d\boldsymbol{S} = \mathbf{n}\, dS$ plyne

$$\boldsymbol{\delta}_\Sigma = \mathbf{n}\, \delta_\Sigma \;, \qquad \delta_\Sigma = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\delta}_\Sigma \;.$$

Z Gaussovy věty pro libovolnou oblast Ω s hranicí $\partial\Omega$ a vnější normálou $\mathbf{n}$ plyne

$$\boldsymbol{\delta}_{\partial\Omega} = -\nabla \chi_\Omega \;, \qquad \delta_{\partial\Omega} = -\mathbf{n} \cdot \nabla \chi_\Omega \;.$$

Distribuce lokalizované na křivce γ

Skalární distribuce δ_γ

$$\langle \delta_\gamma, \varphi \rangle = \int_\gamma \varphi \; d\ell \qquad \int \delta_\gamma \, \varphi \; dV = \int_\gamma \varphi \; d\ell$$

Vektorová distribuce $\boldsymbol{\delta}_\gamma$

$$\langle \boldsymbol{\delta}_\gamma \, ; \boldsymbol{\varphi} \rangle = \int_\gamma \boldsymbol{\varphi} \cdot d\boldsymbol{\ell} \qquad \int \boldsymbol{\delta}_\gamma \cdot \boldsymbol{\varphi} \; dV = \int_\gamma \boldsymbol{\varphi} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

Ze vztahu lineárních elementů $d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{t}\, d\ell$ plyne

$$\boldsymbol{\delta}_\gamma = \mathbf{t}\, \delta_\gamma \;, \qquad \delta_\gamma = \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\delta}_\gamma \;.$$

Ze Stokesovy věty pro libovolnou plochu Σ s hranicí $\partial\Sigma$ orientovanou tečným vektorem $\mathbf{t}$ plyne

$$\boldsymbol{\delta}_{\partial\Sigma} = \nabla \times \boldsymbol{\delta}_\Sigma \;, \qquad \delta_{\partial\Sigma} = \mathbf{t} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\delta}_\Sigma) \;.$$

Distribuce lokalizované v bodě x

Skalární distribuce δ_x

$$\langle \delta_x, \varphi \rangle = \varphi(x) \qquad \int \delta_x \, \varphi \; dV = \varphi(x)$$

Z Newtonova vzorce pro integrování podél křivky γ s krajními body $\partial\gamma = \{x_{\mathrm{Z}}, x_{\mathrm{K}}\}$ plyne

$$\delta_{x_{\mathrm{K}}} - \delta_{x_{\mathrm{Z}}} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\delta}_\gamma \;.$$

Hranice hranice

Operátory $-\nabla$, $\nabla\times$ a $-\nabla\cdot$ odpovídají na distribuční úrovni postupnému ‘vzetí hranice’ tří-dimenzionální oblasti, plochy a křivky. Stejně jako pro operaci hranice ∂ platí i pro uvedené operátory pravidlo “hranice nemá hranici”, tj.

$$\partial\partial\Omega = \emptyset \;: \quad -\nabla \times \nabla \chi_\Omega = 0 \;, \qquad \partial\partial\Sigma = \emptyset \;: \quad -\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{\delta}_\Sigma = 0 \;.$$

Souřadnicová reprezentace δ-distribucí

Plošná δ-funkce

Nechť je oblast Ω vymezena podmínkou $y(x) > 0$, kde $y(x)$ je funkce hladká a s nenulovou normálovou derivací $\partial y/\partial n$ na hranici $\partial\Omega$. Pak aplikováním operátoru 'hranice' dostaneme reprezentaci distribuce $\delta_{\partial\Omega}$ pomocí δ-funkce $\delta(y)$ v souřadnici y:

$$\chi_\Omega = \theta(y)\ , \qquad \boldsymbol{\delta}_{\partial\Omega} = -(\nabla y)\, \delta(y)\ , \qquad \delta_{\partial\Omega} = -(\mathbf{n}\cdot\nabla y)\, \delta(y) = -\frac{\partial y}{\partial n}\, \delta(y)\ .$$

Rozklad objemového elementu $dV = (\partial y/\partial n)^{-1} dy\; dS$ ukazuje konzistenci této reprezentace

$$\int \delta_{\partial\Omega}\, \varphi\; dV = \int_{\partial\Omega}\int_y \delta(y)\, \varphi\; dy\; dS = \int_{\partial\Omega} \varphi\; dS\ .$$

Lineární δ-funkce

Nechť je plocha Σ vymezena jako ta část hranice $\partial\Omega_1$ oblasti Ω_1, která leží zároveň v oblasti Ω_2. Pak je hranice plochy Σ dána průnikem hranic $\partial\Omega_1$ a $\partial\Omega_2$

$$\Sigma = \Omega_2 \cap \partial\Omega_1\ , \qquad \partial\Sigma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2\ .$$

Zde předpokládáme, že hranice $\partial\Omega_1$ a $\partial\Omega_2$ mají na $\partial\Sigma$ různé normály, $\mathbf{n}_1 \neq \mathbf{n}_2$. Distribuční vyjádření uvedených vztahů jsou

$$\boldsymbol{\delta}_\Sigma = \chi_{\Omega_2}\, \boldsymbol{\delta}_{\partial\Omega_1}\ ,$$

$$\boldsymbol{\delta}_{\partial\Sigma} = \nabla \times \big(\chi_{\Omega_2}\, \boldsymbol{\delta}_{\partial\Omega_1}\big) = \boldsymbol{\delta}_{\partial\Omega_1} \times \boldsymbol{\delta}_{\partial\Omega_2} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2\; \delta_{\partial\Omega_1}\delta_{\partial\Omega_2}\ ,$$

$$\delta_{\partial\Sigma} = \mathbf{t}\cdot(\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2)\; \delta_{\partial\Omega_1}\, \delta_{\partial\Omega_2}\ .$$

Jsou-li oblasti Ω_1 a Ω_2 vymezeny souřadnicovými funkcemi $y_1(x)$ a $y_2(x)$ způsobem popsaným v předchozím odstavci, dostáváme vyjádření δ_Σ pomocí δ-funkcí v souřadnicích y_1 a y_2:

$$\boldsymbol{\delta}_{\partial\Sigma} = (\nabla y_1)\times(\nabla y_2)\;\; \delta(y_1)\, \delta(y_2) = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2\, \frac{\partial y_1}{\partial n_1}\frac{\partial y_2}{\partial n_2}\, \delta(y_1)\, \delta(y_2)\ ,$$

$$\delta_{\partial\Sigma} = \mathbf{t}\cdot(\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2)\, \frac{\partial y_1}{\partial n_1}\frac{\partial y_2}{\partial n_2}\, \delta(y_1)\, \delta(y_2)\ .$$

Rozklad elementu $dV = \big(\mathbf{t}\cdot(\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2)\, \tfrac{\partial y_1}{\partial n_1}\tfrac{\partial y_2}{\partial n_2}\big)^{-1} dy_1\, dy_2\, d\ell$ ukazuje konzistenci této reprezentace

$$\int \delta_{\partial\Sigma}\, \varphi\; dV = \int_{\partial\Sigma}\int_{y_2}\int_{y_1} \delta(y_1)\, \delta(y_2)\, \varphi\; dy_1\, dy_2\; d\ell = \int_{\partial\Sigma} \varphi\; d\ell\ .$$

Bodová δ-funkce

Nechť je křivka γ vymezena jako ta část hranice plochy Σ, která leží zároveň v oblasti Ω_1. Nechť je dále $\partial\Sigma = \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega_3$. Pak jsou koncové body křivky γ dány průnikem hranic oblastí Ω_k

$$\gamma = \Omega_1 \cap \partial\Sigma = \Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega_3\ , \qquad \partial\gamma = \{x_{\mathrm{Z}}, x_{\mathrm{K}}\} = \partial\Omega_1 \cap \partial\Sigma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega_3\ .$$

Zde předpokládáme, že křivka γ není tečná k hranici $\partial\Omega_1$, tj. $\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}_1 \neq 0$, a že žádné z normál $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ a $\mathbf{n}_3$ nejsou korelované. Distribučně dostáváme

$$\boldsymbol{\delta}_\gamma = \chi_{\Omega_1}\, \boldsymbol{\delta}_{\partial\Sigma}\ ,$$

$$\delta_{x_{\mathrm{K}}} - \delta_{x_{\mathrm{Z}}} = -\nabla\cdot\big(\chi_{\Omega_1}\, \boldsymbol{\delta}_{\partial\Sigma}\big) = \boldsymbol{\delta}_{\partial\Omega_1}\cdot\boldsymbol{\delta}_{\partial\Sigma} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{t}\; \delta_{\partial\Omega_1}\, \delta_{\partial\Sigma}\ ,$$

$$\delta_{x_{\mathrm{K}}} - \delta_{x_{\mathrm{Z}}} = -\nabla\cdot\big(\chi_{\Omega_1}\; \boldsymbol{\delta}_{\partial\Omega_2}\times\boldsymbol{\delta}_{\partial\Omega_3}\big) = \boldsymbol{\delta}_{\partial\Omega_1}\cdot(\boldsymbol{\delta}_{\partial\Omega_2}\times\boldsymbol{\delta}_{\partial\Omega_3}) = \mathbf{n}_1\cdot(\mathbf{n}_2\times\mathbf{n}_3)\; \delta_{\partial\Omega_1}\, \delta_{\partial\Omega_2}\, \delta_{\partial\Omega_3}\ ,$$

$$\delta_{x_{\mathrm{K}}} + \delta_{x_{\mathrm{Z}}} = |\mathbf{n}_1\cdot(\mathbf{n}_2\times\mathbf{n}_3)|\;\; \delta_{\partial\Omega_1}\, \delta_{\partial\Omega_2}\, \delta_{\partial\Omega_3}\ .$$

Jsou-li jednotlivé oblasti Ω_k vymezeny souřadnicovými funkcemi $y_k(x)$ způsobem popsaným výše, dostáváme vyjádření δ_x pomocí δ-funkcí v souřadnicích y_1, y_2 a y_3:

$$\delta_{x_\mathrm{Z}} - \delta_{x_\mathrm{K}} = \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3)\ \frac{\partial y_1}{\partial n_1} \frac{\partial y_2}{\partial n_2} \frac{\partial y_3}{\partial n_3}\ \delta(y_1)\,\delta(y_2)\,\delta(y_3)\ ,$$

$$\delta_{x_\mathrm{Z}} + \delta_{x_\mathrm{K}} = |\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3)|\ \left|\frac{\partial y_1}{\partial n_1} \frac{\partial y_2}{\partial n_2} \frac{\partial y_3}{\partial n_3}\right|\ \delta(y_1)\,\delta(y_2)\,\delta(y_3)\ .$$

Rozklad elementu $dV = \left|\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3)\ \frac{\partial y_1}{\partial n_1} \frac{\partial y_2}{\partial n_2} \frac{\partial y_3}{\partial n_3}\right|^{-1} dy_1 dy_2 dy_3$ ukazuje konzistenci této reprezentace

$$\int \big(\delta_{x_\mathrm{Z}} + \delta_{x_\mathrm{K}}\big)\,\varphi\ dV = \int_{y_3}\int_{y_2}\int_{y_1} \delta(y_1)\,\delta(y_2)\,\delta(y_3)\,\varphi\ dy_1 dy_2 dy_3 = \varphi(x_\mathrm{Z}) + \varphi(x_\mathrm{K})\ .$$

Vlastnosti δ-distribucí

Integrální reprezentace

Plošné a lineární δ-distribuce lze "poskládat" z bodových δ-funkcí

$$\delta_\Sigma = \int_{z\in\Sigma} \delta_z\ dS\ , \qquad \boldsymbol{\delta}_\Sigma = \int_{z\in\Sigma} \delta_z\ d\boldsymbol{S}\ ,$$

$$\delta_\gamma = \int_{z\in\gamma} \delta_z\ d\ell\ , \qquad \boldsymbol{\delta}_\gamma = \int_{z\in\gamma} \delta_z\ d\boldsymbol{\ell}\ .$$

Povšimněme si, že se zde jedná o integraci přes "lokalizaci" δ-funkce (integrace přes parametr z), ne o formální integraci testovací funkce (integrace přes argument x).

Derivace funkce nehladké na ploše Σ

Rozdělme prostor $\mathbf{E}^3$ na dvě části Ω_- a Ω_+ se společnou hranicí Σ orientovanou z Ω_- do Ω_+

$$\mathbf{E}^3 = \Omega_+ \cup \Omega_- \cup \Sigma\ , \qquad \Omega_+ \cap \Omega_- = \emptyset\ , \qquad \Sigma = \partial\Omega_- = -\partial\Omega_+\ , \qquad \mathbf{n} = \mathbf{n}_- = -\mathbf{n}_+\ .$$

Funkce $f(x)$, respektive vektorové pole $\mathbf{F}(x)$, hladké všude mimo Σ lze zapsat

$$f = \chi_- f_- + \chi_+ f_+\ , \qquad \mathbf{F} = \chi_-\,\mathbf{F}_- + \chi_+\,\mathbf{F}_+\ ,$$

kde $\chi_\pm = \chi_{\Omega_\pm}$ a funkce $f_-(x)$ a $f_+(x)$ jsou hladké na okolí Ω_-, respektive Ω_+. Označme $[f] = (f_+ - f_-)|_\Sigma$ skok funkce f na ploše Σ. Obdobně zavedeme $\mathbf{F}_-$, $\mathbf{F}_+$ a $[\mathbf{F}]$. Pak

$$\nabla f = \chi_-\,\nabla f_- + \chi_+\,\nabla f_+ + [f]\ \boldsymbol{\delta}_\Sigma\ ,$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \chi_-\,\nabla\cdot\mathbf{F}_- + \chi_+\,\nabla\cdot\mathbf{F}_+ + [\mathbf{F}]\cdot\boldsymbol{\delta}_\Sigma\ ,$$

$$\nabla\times\mathbf{F} = \chi_-\,\nabla\times\mathbf{F}_- + \chi_+\,\nabla\times\mathbf{F}_+ + \boldsymbol{\delta}_\Sigma\times[\mathbf{F}]\ .$$

Greenova funkce Laplaceova operátoru

Laplaceova rovnice v $\mathbf{E}^n$

$$\nabla^2 \phi = \delta_z$$

Řešení $\phi(x) = G(x|z)$ této rovnice se nazývá *Greenova funkce* operátoru ∇^2. Platí

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\, r \qquad \text{pro} \quad n = 1\,,$$

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi}\, \ln \frac{1}{r} \qquad \text{pro} \quad n = 2\,,$$

$$\phi(x) = -\frac{1}{4\pi}\, \frac{1}{r} \qquad \text{pro} \quad n = 3\,,$$

$$\phi(x) = -\frac{1}{(n-2)S_n}\, \frac{1}{r^{n-2}} \qquad \text{pro} \quad n > 2\,.$$

Zde r je vzdálenost bodů x a z a $S_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ je plocha n-dimenzionální sféry. Připomeňme, že pro $k \in \mathbb{N}$ platí $\Gamma(k) = (k-1)!$ a $\Gamma\big(k + \frac{1}{2}\big) = \sqrt{\pi}\, \frac{(2k)!}{2^{2k} k!}$.

Aplikace v elektrostatice a magnetostatice

Níže projdeme některá speciální řešení základních rovnic elektrostatiky a magnetostatiky

$$\nabla^2\phi = -\frac{1}{\varepsilon_\mathrm{o}}\,\rho\ , \qquad \nabla^2\mathbf{A} = -\mu_\mathrm{o}\,\mathbf{j}\ .$$

Bodový náboj

Objemová hustota bodového náboje q v bodě z je

$\rho_\mathrm{mon} = q\,\delta_z\ .$

Skalární potenciál je dán Greenovou funkcí Laplaceova operátoru násobenou faktorem $-\varepsilon_\mathrm{o}^{-1}q$

$$\phi_\mathrm{mon} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\mathrm{o}}\,\frac{1}{r}\ .$$

Lineární náboj

Objemová hustota náboje rozloženého podél křivky γ s lineární hustotou λ je

$\rho_\mathrm{1D} = \lambda\,\delta_\gamma\ .$

V případě homogenního rozložení náboje (λ = konstanta) podél nekonečné přímky je skalární potenciál dán dvoudimenzionální Greenovou funkcí násobenou faktorem $-\varepsilon_\mathrm{o}^{-1}\lambda$

$$\phi_\mathrm{1D} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_\mathrm{o}}\,\ln\rho\ ,$$

kde ρ je vzdálenost od přímky.

Lineární proud

Objemová hustota proudu velikosti I tekoucího podél křivky γ je

$\mathbf{j}_\mathrm{1D} = I\,\boldsymbol{\delta}_\gamma\ .$

V případě homogenního proudu podél nekonečné přímky je vektorový potenciál dán dvoudimenzionální Greenovou funkcí násobenou faktorem $-\mu_\mathrm{o}I\,\mathbf{t}$

$$\mathbf{A}_\mathrm{1D} = \frac{\mu_\mathrm{o}\,I}{2\pi}\Big(\ln\rho\Big)\,\mathbf{t}\ ,$$

kde ρ je vzdálenost od přímky.

Elektrický dipól

Objemová hustota elektrického dipólu $\mathbf{p}$ v bodě z je

$\rho_{\mathrm{dip}} = -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta_z$.

Skalární potenciál dipólu je tak dán působením operace $\varepsilon_{\mathrm{o}}^{-1} \mathbf{p} \cdot \nabla$ na Greenovu funkci

$$\phi_{\mathrm{dip}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\mathrm{o}}} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \ .$$

Elektrický dipól $\mathbf{p}$ lze realizovat jako systém dvou nekonečně velkých nábojů q a $-q$ umístěných nekonečně blízko s relativní polohou $\mathbf{d}$ tak, že $\mathbf{p} = q\,\mathbf{d} = \mathrm{konstanta}$. Pro objemovou nábojovou hustotu dostáváme $\rho_{\mathrm{dip}} = \lim_{q\to\infty}(q\,\delta_{z+\mathbf{p}/2q} - q\,\delta_{z-\mathbf{p}/2q})$. Aplikací na testovací funkci φ nalezneme $\int \rho_{\mathrm{dip}}\,\varphi\,dV = \lim_{q\to\infty}\big(q\,\varphi(z+\mathbf{p}/2q) - q\,\varphi(z-\mathbf{p}/2q)\big) = \mathbf{p}\cdot\nabla\varphi(z) = \int(-\mathbf{p}\cdot\nabla\delta_z)\,\varphi\,dV$.

Dipólový řetízek

Dipólový řetízek nazveme systém eletrických dipólů $d\mathbf{p}$ rozložených podél křivky γ vedoucí z bodu x_{Z} do x_{K}. Dipóly mají velikost $q\,d\ell$ a jsou orientované podél křivky, $d\mathbf{p} = q\,d\boldsymbol{\ell}$. Platí

$$\rho_{\text{řetízek}} = -\int_{z\in\gamma} \nabla\delta_z \cdot d\mathbf{p} = -q\,\nabla\cdot\int_{z\in\gamma} \delta_z\, d\boldsymbol{\ell} = -q\,\nabla\cdot\boldsymbol{\delta}_\gamma = q\,\delta_{x_{\mathrm{K}}} - q\,\delta_{x_{\mathrm{Z}}} \ .$$

Zde jsme užili integrální reprezentaci funkce $\boldsymbol{\delta}_\gamma$ a Newtonův vzorec. Dipólový řetízek je tak ekvivalentní dvěma nábojům q a $-q$ umístěným na koncích řetízku.

Magnetický dipól

Objemová hustota toku pro magnetický dipól $\mathbf{m}$ v bodě z je

$\mathbf{j}_{\mathrm{dip}} = -\mathbf{m} \times \nabla\delta_z$.

Vektorový potenciál dipólu je tak dán působením operace $\mu_{\mathrm{o}}\,\mathbf{m}\times\nabla$ na Greenovu funkci

$$\mathbf{A}_{\mathrm{dip}} = \frac{\mu_{\mathrm{o}}}{4\pi} \frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3} \ .$$

Magnetický dipól $\mathbf{m}$ lze realizovat jako proudovou smyčku $\partial\Sigma$ obepínající plošku Σ nekonečně malé velikosti S s normálou $\mathbf{n}$, ve které teče nekonečný proud I tak, že $\mathbf{m} = I\,S\,\mathbf{n} = \mathrm{konstanta}$. Pro objemovou nábojovou hustotu dostáváme $\mathbf{j}_{\mathrm{dip}} = \lim_{I\to\infty} I\,\boldsymbol{\delta}_{\partial\Sigma} = \lim_{I\to\infty} I\,\nabla\times\boldsymbol{\delta}_\Sigma$. Pro malou smyčku můžeme použít přiblížení $\boldsymbol{\delta}_\Sigma \approx S\,\mathbf{n}\,\delta_z$ a dostaneme $\mathbf{j}_{\mathrm{dip}} = \lim_{I\to\infty} IS\,\nabla\times(\mathbf{n}\,\delta_z) = -\mathbf{m}\times\nabla\delta_z$.

Dipólová vrstva

Dipólová vrstva nazýváme systém magnetických dipólů $d\mathbf{m}$ rozložených na ploše Σ. Dipóly mají velikost $I\,dS$ a jsou orientované kolmo na plochu, $d\mathbf{m} = I\,d\boldsymbol{S}$. Platí

$$\mathbf{j}_{\mathrm{vrstva}} = \int_{z\in\Sigma} \nabla\delta_z \times d\mathbf{m} = I\,\nabla\times\int_{z\in\Sigma} \delta_z\, d\boldsymbol{S} = I\,\nabla\times\boldsymbol{\delta}_\Sigma = I\,\boldsymbol{\delta}_{\partial\Sigma} \ .$$

Zde jsme užili integrální reprezentaci funkce $\boldsymbol{\delta}_\Sigma$ a Stokesovu větu. Dipólová vrstva je tak ekvivalentní proudové smyčce vedoucí po hranici $\partial\Sigma$, ve které teče proud I.

Plošné rozložení náboje a hraniční podmínky

Mějme prostor rozdělený plochou Σ na oblasti Ω_- a Ω_+, s normálou $\mathbf{n}$ k ploše Σ orientovanou z Ω_- do Ω_+. Objemová hustota náboje rozloženého podél Σ s plošnou hustotou σ je

$$\rho_{\scriptscriptstyle 2D} = \sigma\,\delta_\Sigma\,.$$

Eletrická intenzita $\mathbf{E}$ náboje rozloženého podél plochy Σ bude nespojitá na Σ

$$\mathbf{E} = \chi_-\,\mathbf{E}_- + \chi_+\,\mathbf{E}_+ \qquad\Rightarrow\qquad \nabla\mathbf{E} = \chi_-\,\nabla\mathbf{E}_- + \chi_+\,\nabla\mathbf{E}_+ + \boldsymbol{\delta}_\Sigma\,[\mathbf{E}]\,,$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_{\rm o}}\big(\rho_{\scriptscriptstyle 3D} + \rho_{\scriptscriptstyle 2D}\big) \qquad\Rightarrow\qquad \frac{1}{\varepsilon_{\rm o}}\,\rho_{\scriptscriptstyle 3D} = \chi_-\,\nabla\cdot\mathbf{E}_- + \chi_+\,\nabla\cdot\mathbf{E}_+\,, \qquad \frac{1}{\varepsilon_{\rm o}}\,\rho_{\scriptscriptstyle 2D} = [\mathbf{E}]\cdot\boldsymbol{\delta}_\Sigma\,,$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = 0 \qquad\Rightarrow\qquad \chi_-\,\nabla\times\mathbf{E}_- + \chi_+\,\nabla\times\mathbf{E}_+ = 0\,, \qquad \mathbf{n}\times[\mathbf{E}] = 0\,.$$

Zde $\mathbf{E}_\pm$ jsou hladká vektorová pole na okolí oblastí $\Omega_\pm$, $[\mathbf{E}] = (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-)|_\Sigma$ je skok $\mathbf{E}$ na Σ, a $\chi_\pm = \chi_{\Omega_\pm}$ jsou charakteristické funkce oblastí $\Omega_\pm$. Na ploše Σ tak dostáváme hraniční podmínky

$$[\mathbf{E}]\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{\varepsilon_{\rm o}}\,\sigma\,, \qquad [\mathbf{E}]\times\mathbf{n} = 0\,.$$

Plošný proud a hraniční podmínky

Mějme prostor opět rozdělený plochou Σ. Objemová hustota proudu rozloženého na Σ s plošnou hustotou $\boldsymbol{\iota}$ tečnou k Σ je

$$\mathbf{j}_{\scriptscriptstyle 2D} = \boldsymbol{\iota}\,\delta_\Sigma\,.$$

Odpovídající magnetická indukce $\mathbf{B}$ bude nespojitá na Σ

$$\mathbf{B} = \chi_-\,\mathbf{B}_- + \chi_+\,\mathbf{B}_+ \qquad\Rightarrow\qquad \nabla\mathbf{B} = \chi_-\,\nabla\mathbf{B}_- + \chi_+\,\nabla\mathbf{B}_+ + \boldsymbol{\delta}_\Sigma\,[\mathbf{B}]\,,$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \qquad\Rightarrow\qquad \chi_-\,\nabla\cdot\mathbf{B}_- + \chi_+\,\nabla\cdot\mathbf{B}_+ = 0\,, \qquad [\mathbf{B}]\cdot\boldsymbol{\delta}_\Sigma = 0\,,$$

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_{\rm o}\big(\mathbf{j}_{\scriptscriptstyle 3D} + \mathbf{j}_{\scriptscriptstyle 2D}\big) \qquad\Rightarrow\qquad \mu_{\rm o}\,\mathbf{j}_{\scriptscriptstyle 3D} = \chi_-\,\nabla\times\mathbf{B}_- + \chi_+\,\nabla\times\mathbf{B}_+\,, \qquad \mu_{\rm o}\,\mathbf{j}_{\scriptscriptstyle 2D} = \boldsymbol{\delta}_\Sigma\times[\mathbf{B}]\,.$$

Zde $\mathbf{B}_\pm$ jsou hladká vektorová pole na okolí oblastí $\Omega_\pm$, $[\mathbf{B}] = (\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-)|_\Sigma$ je skok $\mathbf{B}$ na Σ, a $\chi_\pm = \chi_{\Omega_\pm}$. Na ploše Σ tak dostáváme hraniční podmínky

$$[\mathbf{B}]\cdot\mathbf{n} = 0\,, \qquad \mathbf{n}\times[\mathbf{B}] = \mu_{\rm o}\,\boldsymbol{\iota}\,.$$