Matematický formalismus

Euklidovský prostor, vektory.

Euklidovský prostor, body a vektory, skalární součin, kartézská soustava, ortonormální báze.

Ortogonální souřadnice.

Křivočaré souřadnice, vektory tečné k souřadnicovým čarám, ortogonální souřadnice, normalizovaná báze, Lamého koeficienty, vektor posunu podél souřadnicových čar. Integrování podél křivky, plochy a v objemu. Příklady: kartézské, cylindrické a sférické souřadnice. Elipsoidální souřadnice: obecná diskuze, oblé elipsoidální souřadnice, rovnice souřadnicových čar, Lamého koeficienty.

Vektorové operátory.

Gradient funkce, Newtonův vzorec, přírůstek funkce, složky gradientu v ortogonálních souřadnicích, gradient souřadnice. Divergence vektorového pole, Gaussova věta, zdroj pole, divergence v ortogonálních souřadnicích. Rotace vektorového pole, Stokesova věta, víry pole, rotace v ortogonálních souřadnicích. Vlastnosti ∇ operátoru. Funkce více argumentů.

Operátory 2. řádu.

Podmínky pro potenciály. Laplaceův operátor funkce, Greenova věta, Laplaceův operátor v ortogonálních souřadnicích. Laplaceův operátor vektorového pole, rozklad na kartézské složky.

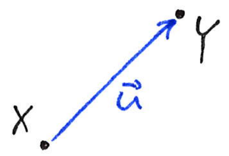
Základy teorie distribucí.

Distribuce – zobecnění funkcí. δ-funkce v 1D, motivace, definice, derivace skokové funkce, derivace δ-funkce. δ-funkce v 3D, distribuční výpočet zdroje coulumbovského pole. Substituce v δ-funkci v 1D. δ-funkce lokalizovaná v bodě, na křivce a na ploše.

Euklidovský prostor, vektory

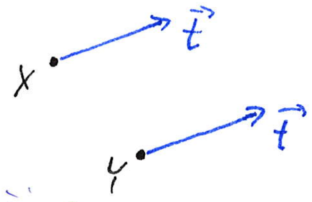
afinní prostor s konstantní metrikou

body a vektory



$\vec{u} = Y - X \qquad Y = X + \vec{u}$

globální rovnoběžnost



$\vec{t}$ v X a Y jsou rovnoběžné

vzdálenost generovaná skalárním součinem

$$r(X,Y) = |Y-X| = \sqrt{(Y-X)\cdot(Y-X)} = |\vec{r}(Y,X)|$$

kde $\vec{r}(Y,X) = Y - X$

konstantnost skalárního součinu

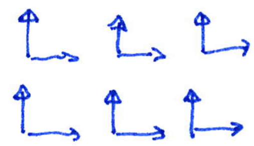
$\vec{a}\cdot\vec{b} = \overset{\leftrightarrow}{g}(\vec{a},\vec{b})$ nezávisí na tom, kde v prostoru skalární součin vyčíslíme

kartézská soustava

P počátek

$\vec{e}_k$ konstantní ortonormální báze

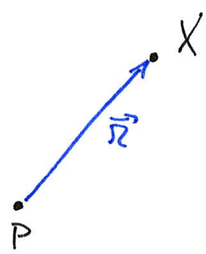
tj. v každém bodě stejná vektorová báze



$$\vec{e}_k\cdot\vec{e}_l = \overset{\leftrightarrow}{g}(\vec{e}_k,\vec{e}_l) = g_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ortonormalita

$\vec{\nabla}\vec{e}_k = 0$ konstantnost

průvodič



$$\vec{r}(X) = \vec{r}(X,P) = X - P$$

$$\vec{r} = \sum_k x^k \vec{e}_k = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$r(X) = r(X,P) = |X-P|$$

kartézské souřadnice

$x^1, x^2, x^3 \qquad x, y, z$

$r(A,B) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

inerciální soustava

P se pohybuje rovnoměrně přímočaře $\quad \frac{dP}{dt} = 0$

$\vec{e}_k$ se nemění $\quad \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial t} = 0$

Vektory a kovektory

$\vec{a} = \sum_r a^r \vec{e}_r$ vektor a jeho komponenty

$\underset{\to}{a} = \sum_r a_r \underset{\to}{e}^r$ kovektor a jeho komponenty

$\underset{\to}{e}^r \cdot \vec{e}_l = \delta^r_l$ podmínka duality bazí

$\underset{\to}{a} \cdot \vec{b} = \sum_r a_r b^r \in \mathbb{R}$ dualita (zúžení) vektoru a kovektoru

$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_l = g_{rl}$ metrické koeficienty

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{r,l} a^r b^l g_{rl}$ skalární součin vektorů

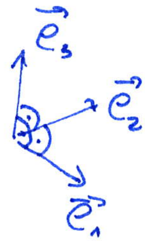
$\underset{\to}{a} \leftrightarrow \vec{a} \iff \underset{\to}{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$ korespondence vektorů a kovektorů

$a_l = \sum_r g_{lr} a^r \quad a^r = \sum_l g^{rl} a_l$ zvedání a snižování indexů

$\sum g^{rm} g_{lm} = \delta^r_l$ g^{rl} je inverzní metrika

ortonormální báze $\vec{e}_r$

$$g_{rl} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad g^{rl} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$\Downarrow$

$a^r = a_r$

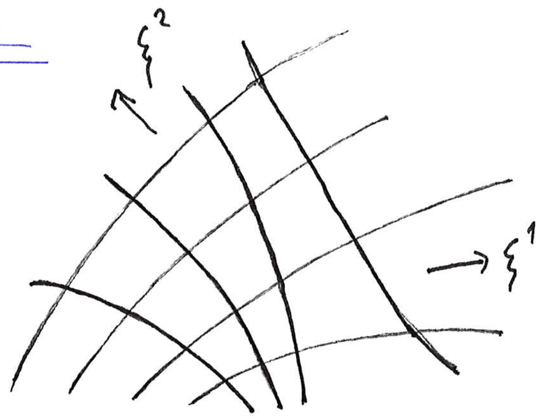
nemusíme rozlišovat polohu indexů

POZOR ne každá ortonormální báze tvoří kartézskou soust.

budeme pracovat s ortonormálními bázemi, které se mění bod od bodu, tj.

$$\vec{\nabla} \vec{e}_r \neq 0$$

Ortogonální souřadnice



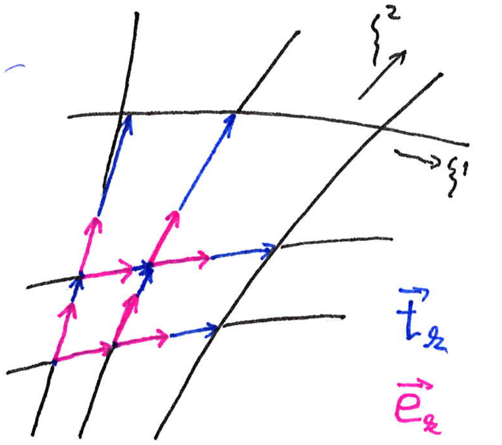
křivočaré souřadnice ξ^1, ξ^2, ξ^3

kartézské souřadnice x^1, x^2, x^3

typicky zadáno vztahy

$$x^l = x^l(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$$

báze vektorů v bodě X



$\vec{t}_k$ tečné vektory k souřadnicové čáře $\xi_k = \xi$ $\xi_l = \text{konst}$ $l \neq k$

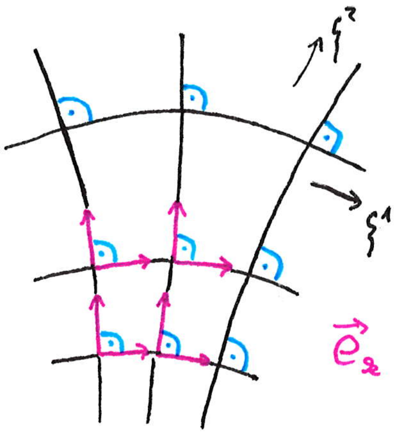
nedegenerace souřadnic

$\Rightarrow$ $\vec{t}_k$ lineárně nezávislé

$\vec{e}_k$ normalizované vektory ve směru $\vec{t}_k$

$\vec{e}_k \propto \vec{t}_k$ $\quad |\vec{e}_k| = 1$

ortogonální souřadnice



$\vec{t}_k \perp \vec{t}_l$ $\quad k \neq l$ $\quad$ souř. čáry jsou na sebe kolmé

$$\vec{e}_k \cdot \vec{e}_l = g_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obecně se báze $\vec{e}_k$ mění v prostoru

$$\nabla \vec{e}_k \neq 0$$

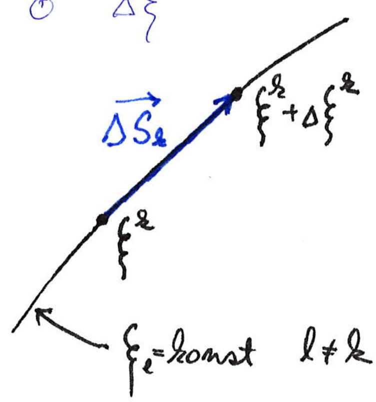
Lamého koeficienty

tečné vektory $\vec{t}_k$ nemusí být normalizované (ani normalizovatelné) ve všech bodech prostoru

$|\vec{t}_k| = h_{(k)}$ $\quad$ tj. $\quad \vec{t}_k = h_{(k)} \vec{e}_k$

$h_{(k)}$ - Lamého koeficienty

posun podél souřadnicové čáry o $\Delta\xi^k$



$\vec{\Delta S}_k$ vektor mezi blízkými body

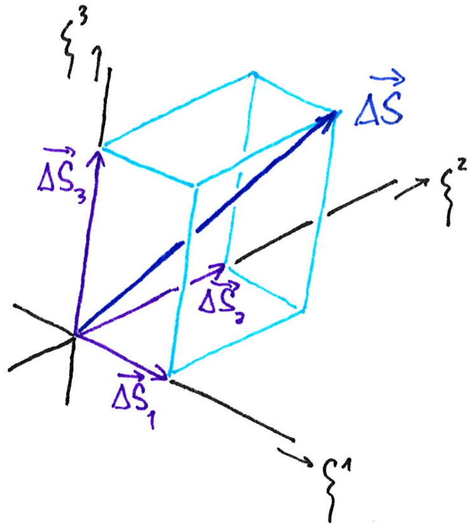
$\Delta S_k = |\vec{\Delta S}_k|$ skutečná vzdálenost

$\vec{t}_k = \dfrac{\vec{\Delta S}_k}{\Delta\xi^k}$ $\quad \vec{e}_k = \dfrac{\vec{\Delta S}_k}{\Delta S_k}$

$\vec{\Delta S}_k = \vec{t}_k\,\Delta\xi^k = \vec{e}_k\,\Delta S_k = \vec{e}_k\,h_{(k)}\Delta\xi^k$

$\Downarrow\ \Delta S_k = h_{(k)}\Delta\xi^k$

posun v obecném směru



$\vec{\Delta S} = \sum_k \Delta S_k\,\vec{e}_k = \sum_k \Delta\xi^k\,\vec{t}_k$

$\Delta S_k = \vec{e}_k\cdot\vec{\Delta S}$

integrování

integrování přes křivku, plochu či oblast je výhodné parametrizovat pomocí ortogonálních souřadnic tak, že

- křivka – je souř. čára, tj. parametrizovaná pomocí ξ^1
- plocha – je souř. plocha, tj. parametrizovaná pomocí ξ^1, ξ^2
- oblast – je jednoduše vyjádřitelná pomocí ξ^1, ξ^2, ξ^3

integrační element

$d\vec{S}_1 = h_{(1)}\,d\xi^1\,\vec{e}_1$ $\quad$ křivka ξ^2, ξ^3 = konst

$d\vec{S}_3 = h_{(1)}h_{(2)}\,d\xi^1 d\xi^2\,\vec{e}_3$ $\quad$ plocha ξ^3 = konst

$dV = h_{(1)}h_{(2)}h_{(3)}\,d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$ $\quad$ objemový element příklady

kartézské souřadnice x, y, z

$x = x$ $\quad h_{(x)} = 1$

$y = y$ $\quad h_{(y)} = 1$ $\quad dV = dx\,dy\,dz$

$z = z$ $\quad h_{(z)} = 1$

cylindrické souřadnice R, φ, z

$x = R\cos\varphi$ $\quad h_{(R)} = 1$

$y = R\sin\varphi$ $\quad h_{(\varphi)} = R$ $\quad dV = R\,dR\,d\varphi\,dz$

$z = z$ $\quad h_{(z)} = 1$

sférické souřadnice r, ϑ, φ

$x = r\sin\vartheta\cos\varphi$ $\quad h_{(r)} = 1$

$y = r\sin\vartheta\sin\varphi$ $\quad h_{(\vartheta)} = r$ $\quad dV = r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi$

$z = r\cos\vartheta$ $\quad h_{(\varphi)} = r\sin\vartheta$

Elipsoidální souřadnice

- rotační symetrie (lze i zobecnit)
- deformované sférické
- ortogonální

$x = \kappa \sin\psi \cos\varphi$

$y = \kappa \sin\psi \sin\varphi$

$z = \lambda \cos\psi$

pro $\kappa = \lambda \equiv r$ sférické souř.

φ standardní rotační úhel

κ, λ fce jedné souřadnice η

$R = \kappa \sin\psi$

tečné vektory

$\vec{t}_\eta = \kappa' \sin\psi \cos\varphi\, \vec{e}_x + \kappa' \sin\psi \sin\varphi\, \vec{e}_y + \lambda' \cos\psi\, \vec{e}_z$

$\vec{t}_\psi = \kappa \cos\psi \cos\varphi\, \vec{e}_x + \kappa \cos\psi \sin\varphi\, \vec{e}_y - \lambda \sin\psi\, \vec{e}_z$

$\vec{t}_\varphi = -\kappa \sin\psi \sin\varphi\, \vec{e}_x + \kappa \sin\psi \cos\varphi\, \vec{e}_y$

ortogonalita

$\vec{t}_\eta \cdot \vec{t}_\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa'\kappa - \lambda\lambda' = 0$

$\vec{t}_\eta \cdot \vec{t}_\varphi = 0 \quad \vec{t}_\psi \cdot \vec{t}_\varphi = 0$ splněno

$\Rightarrow (\kappa^2 - \lambda^2)' = 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa^2 - \lambda^2 =$ konst

> 0 oblé elipsoidální

$= 0$ sférické

< 0 protáhlé elipsoidální – viz cvičení

oblé elipsoidální

$\kappa^2 = \lambda^2 + a^2$

1) λ jako souřadnic

2) $\kappa = a \operatorname{ch}\eta \quad \lambda = a \operatorname{sh}\eta$

$x = a \operatorname{ch}\eta \sin\psi \cos\varphi \quad = \sqrt{\lambda^2 + a^2} \sin\psi \cos\varphi$

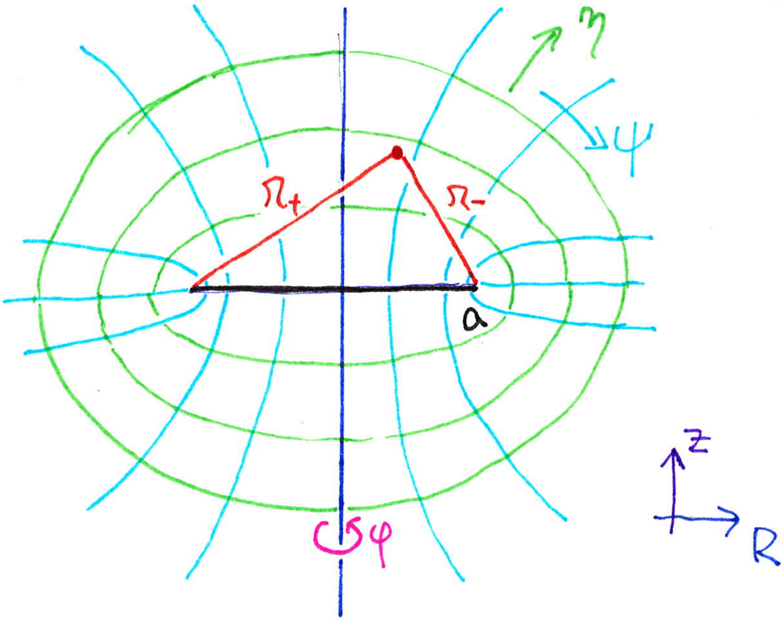
$y = a \operatorname{ch}\eta \sin\psi \sin\varphi \quad = \sqrt{\lambda^2 + a^2} \sin\psi \sin\varphi$

$z = a \operatorname{sh}\eta \cos\psi \quad = \lambda \cos\psi$

$R = a \operatorname{ch}\eta \sin\psi \quad = \sqrt{\lambda^2 + a^2} \sin\psi$

$$\frac{R^2}{a^2 \operatorname{ch}^2\eta} + \frac{z^2}{a^2 \operatorname{sh}^2\eta} = 1$$ rovnice elipsy

$$\frac{R^2}{a^2 \sin^2\psi} - \frac{z^2}{a^2 \cos^2\psi} = 1$$ rovnice hyperboly



$$r_\pm = \sqrt{(R\pm a)^2 + z^2} =$$
$$= a(\operatorname{ch}\eta \pm \sin\psi)$$

$\Downarrow$

$$\operatorname{ch}\eta = \frac{1}{2a}(r_+ + r_-)$$
rovnice elipsy

$$\sin\psi = \frac{1}{2a}(r_+ - r_-)$$
rovnice hyperboly

$$\psi \in (0,\pi)$$
$$\eta \in (0,\infty)$$

Lameho koeficienty

$$h_x = |\vec{t}_x|$$

$$\left.\begin{aligned} h_\eta = h_\psi &= a\sqrt{\operatorname{ch}^2\eta - \sin^2\psi} = a\sqrt{\operatorname{sh}^2\eta + \cos^2\psi} \\ h_\varphi = R &= a \operatorname{ch}\eta \sin\psi \end{aligned}\right\} \eta, \psi, \varphi$$

$$\left.\begin{aligned} h_\lambda &= \sqrt{\frac{\lambda^2 + a^2\cos^2\psi}{\lambda^2 + a^2}} \qquad h_\psi = \sqrt{\lambda^2 + a^2\cos^2\psi} \\ h_\varphi &= \sqrt{\lambda^2 + a^2}\,\sin\psi \end{aligned}\right\} \lambda, \psi, \varphi$$

$$h_\eta^2 = |\vec{t}_\eta|^2 = a^2\left(\mathrm{sh}^2\eta\,\sin^2\psi + \mathrm{ch}^2\eta\,\cos^2\psi\right)$$
$$= a^2\left(\mathrm{sh}^2\eta + \cos^2\psi\right) = a^2\left(\mathrm{ch}^2\eta - \sin^2\psi\right) \equiv \sigma^2$$

$$h_\psi^2 = |\vec{t}_\psi|^2 = a^2\left(\mathrm{ch}^2\eta\,\cos^2\psi + \mathrm{sh}^2\eta\,\sin^2\psi\right)$$
$$= a^2\left(\mathrm{ch}^2\eta - \sin^2\psi\right) = a^2\left(\mathrm{sh}^2\eta + \cos^2\psi\right) \equiv \sigma^2$$

$$h_\varphi^2 = |\vec{t}_\varphi|^2 = a^2\,\mathrm{ch}^2\eta\,\sin^2\psi = R^2$$

$$h_\lambda^2 = |\vec{t}_\lambda|^2 = \frac{\lambda^2 + a^2\cos^2\psi}{\lambda^2 + a^2}$$

$$h_\psi^2 = |\vec{t}_\psi|^2 = \lambda^2 + a^2\cos^2\psi$$

$$h_\varphi^2 = |\vec{t}_\varphi|^2 = (\lambda^2 + a^2)\sin^2\psi$$

$$r^2 = R^2 + z^2 = a^2\left(\mathrm{sh}^2\eta\,\cos^2\psi + \mathrm{ch}^2\eta\,\sin^2\psi\right)$$
$$= a^2\left(\mathrm{sh}^2\eta + \sin^2\psi\right) = a^2\left(\mathrm{ch}^2\eta - \cos^2\psi\right)$$
$$\sigma^2 = a^2\left(\mathrm{sh}^2\eta + \cos^2\psi\right) = a^2\left(\mathrm{ch}^2\eta - \sin^2\psi\right)$$

$$r_\pm = \sqrt{(R\pm a)^2 + z^2} = a\left[\left(\mathrm{ch}\eta\,\sin\psi \pm 1\right)^2 + \mathrm{sh}^2\eta\,\cos^2\psi\right]^{\frac{1}{2}} = a\left(\mathrm{ch}\eta \pm \sin\psi\right)$$

$$\Downarrow$$

$$a\,\mathrm{ch}\eta = \frac{1}{2}\left(r_+ + r_-\right)$$
$$a\sin\psi = \frac{1}{2}\left(r_+ - r_-\right)$$

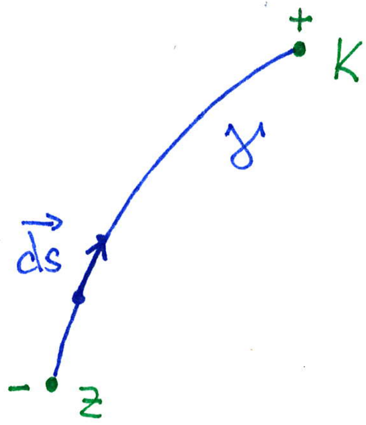
Vektorové operátory a integrální věty

Gradient funkce

$\vec{\nabla} f = \text{grad}\, f$

Newtonův vzorec

$$\int_\gamma \vec{\nabla} f \cdot d\vec{s} = f|_K - f|_Z$$



přírůstek f

$\vec{\nabla} f \cdot \Delta\vec{s} = \Delta f$ = přírůstek f na úseku $d\vec{s}$

$$\Delta f = \sum_r \frac{\partial f}{\partial \xi^r} \Delta \xi^r = \Delta\vec{s} \cdot \vec{\nabla} f = \sum_r \Delta s_r \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{\nabla} f}_{\nabla_r f} = \sum_r h_{(r)} \nabla_r f \, \Delta \xi^r \Downarrow$$

složky gradientu

$$\nabla_r f = \frac{1}{h_{(r)}} \frac{\partial f}{\partial \xi^r}$$

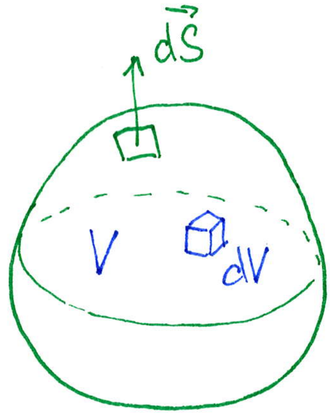
gradient v ortogonálních souřadnicích

$$\vec{\nabla} f = \frac{1}{h_{(1)}} \frac{\partial f}{\partial \xi^1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_{(2)}} \frac{\partial f}{\partial \xi^2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_{(3)}} \frac{\partial f}{\partial \xi^3} \vec{e}_3$$

gradient souřadnice

$$\vec{\nabla} \xi^r = \frac{1}{h_{(r)}} \vec{e}_r$$

Divergence vektorového pole

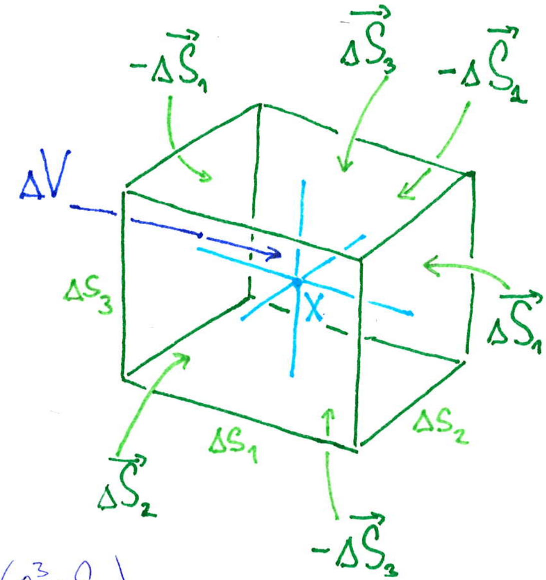


$$\vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \operatorname{div}\vec{a}$$

Gaussova věta

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{a}\, dV = \int_{\partial V} \vec{a}\cdot d\vec{S}$$

zdroj $\vec{a}$



$$\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\ \Delta V = \text{zdroj } \vec{a} \text{ v } \Delta V$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\ \Delta s_1 \Delta s_2 \Delta s_3 = (\vec{\nabla}\cdot\vec{a})\, h_{(1)} h_{(2)} h_{(3)} \Delta\xi^1 \Delta\xi^2 \Delta\xi^3$$

$$= \vec{a}\cdot\Delta\vec{S}_1\Big|_{X+\frac{\Delta\vec{s}_1}{2}} - \vec{a}\cdot\Delta\vec{S}_1\Big|_{X-\frac{\Delta\vec{s}_1}{2}}$$

$$+ \vec{a}\cdot\Delta\vec{S}_2\Big|_{X+\frac{\Delta\vec{s}_2}{2}} - \vec{a}\cdot\Delta\vec{S}_2\Big|_{X-\frac{\Delta\vec{s}_2}{2}}$$

$$+ \vec{a}\cdot\Delta\vec{S}_3\Big|_{X+\frac{\Delta\vec{s}_3}{2}} - \vec{a}\cdot\Delta\vec{S}_3\Big|_{X-\frac{\Delta\vec{s}_3}{2}}$$

$$= \Delta\vec{s}_1\cdot\vec{\nabla}(a^1\Delta S_1) + \Delta\vec{s}_2\cdot\vec{\nabla}(a^2\Delta S_2) + \Delta\vec{s}_3\cdot\vec{\nabla}(a^3\Delta S_3)$$

$$= h_{(1)}\Delta\xi^1 \frac{1}{h_{(1)}}\frac{\partial}{\partial\xi^1}\left(a^1 h_{(2)} h_{(3)} \Delta\xi^2\Delta\xi^3\right) + \dots$$

$$= \Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3\left(\frac{\partial}{\partial\xi^1}(a^1 h_{(2)} h_{(3)}) + \frac{\partial}{\partial\xi^2}(a^2 h_{(1)} h_{(3)}) + \frac{\partial}{\partial\xi^3}(a^3 h_{(1)} h_{(2)})\right) \quad \Downarrow$$

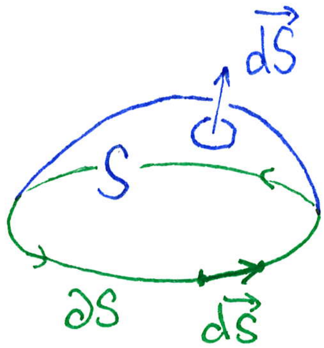
divergence v ortogonálních souřadnicích

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \frac{1}{h_{(1)} h_{(2)} h_{(3)}}\left(\frac{\partial}{\partial\xi^1}(a^1 h_{(2)} h_{(3)}) + \frac{\partial}{\partial\xi^2}(a^2 h_{(1)} h_{(3)}) + \frac{\partial}{\partial\xi^3}(a^3 h_{(1)} h_{(2)})\right)$$

Rotace vektorového pole

$\vec\nabla\times\vec a = \mathrm{rot}\,\vec a$

Stokesova věta

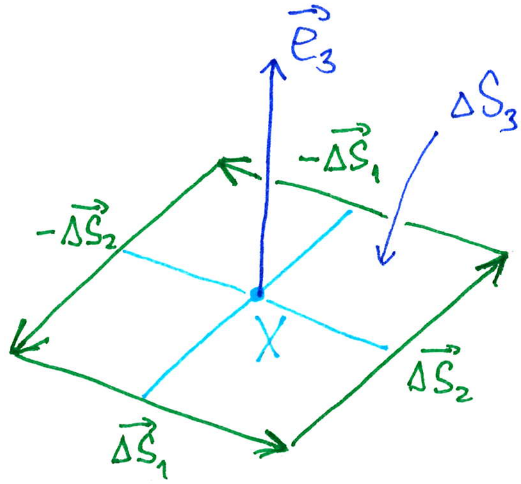


$$\int_S \vec\nabla\times\vec a\cdot d\vec S = \int_{\partial S}\vec a\cdot d\vec s$$

vír $\vec a$

$\vec\nabla\times\vec a\cdot\Delta\vec S$ = vír okolo $\Delta\vec S$

např. $\Delta\vec S = \Delta\vec S_3 = \Delta\vec S_1\times\Delta\vec S_2 = \Delta S_1\Delta S_2\,\vec e_3$



$$\vec\nabla\times\vec a\cdot\Delta\vec S_3 = (\vec\nabla\times\vec a)^3\, h_{(1)}h_{(2)}\,\Delta\xi^1\Delta\xi^2$$

$$= \vec a\cdot\Delta\vec S_1\Big|_{X-\frac{\Delta\vec S_2}{2}} - \vec a\cdot\Delta\vec S_1\Big|_{X+\frac{\Delta\vec S_2}{2}}$$

$$+ \vec a\cdot\Delta\vec S_2\Big|_{X+\frac{\Delta\vec S_1}{2}} - \vec a\cdot\Delta\vec S_2\Big|_{X-\frac{\Delta\vec S_1}{2}}$$

$$= -\Delta\vec S_2\cdot\vec\nabla(a^1\Delta S_1) + \Delta\vec S_1\cdot\vec\nabla(a^2\Delta S_2)$$

$$= \Delta\xi^1\Delta\xi^2\left(-\frac{\partial}{\partial\xi^2}(a^1h_{(1)}) + \frac{\partial}{\partial\xi^1}(a^2h_{(2)})\right)$$

složky rotace

$$(\vec\nabla\times\vec a)^3 = \frac{1}{h_{(1)}h_{(2)}}\left(\frac{\partial}{\partial\xi^1}(a^2h_{(2)}) - \frac{\partial}{\partial\xi^2}(a^1h_{(1)})\right)$$

+ cyklické záměna $1\to2\to3$

rotace v ortogonálních souřadnicích

$$\vec\nabla\times\vec a = \frac{1}{h_{(2)}h_{(3)}}\left(\frac{\partial a^3h_{(3)}}{\partial\xi^2} - \frac{\partial a^2h_{(2)}}{\partial\xi^3}\right)\vec e_1$$

$$+ \frac{1}{h_{(3)}h_{(1)}}\left(\frac{\partial a^1h_{(1)}}{\partial\xi^3} - \frac{\partial a^3h_{(3)}}{\partial\xi^1}\right)\vec e_2$$

$$+ \frac{1}{h_{(1)}h_{(2)}}\left(\frac{\partial a^2h_{(2)}}{\partial\xi^1} - \frac{\partial a^1h_{(1)}}{\partial\xi^2}\right)\vec e_3$$

Vlastnosti $\vec{\nabla}$ operátoru

$$\vec{\nabla} F(f) = F'(f)\,\vec{\nabla} f$$

$$\vec{\nabla} F(f_1, f_2, \dots) = \sum_i \frac{\partial F}{\partial f_i} \vec{\nabla} f_i$$

$$\vec{\nabla}(fg) = (\vec{\nabla} f) g + f(\vec{\nabla} g)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{a}) = (\vec{\nabla} f)\cdot\vec{a} + f(\vec{\nabla}\cdot\vec{a})$$

$$\vec{\nabla}\times(f\vec{a}) = (\vec{\nabla} f)\times\vec{a} + f(\vec{\nabla}\times\vec{a})$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a}) - \vec{a}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{b})$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{b}) &= (\vec{\nabla}\vec{a})\cdot\vec{b} + (\vec{\nabla}\vec{b})\cdot\vec{a} \\ \vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{b}) &= \vec{b}\cdot(\vec{\nabla}\vec{a}) - \vec{a}\cdot(\vec{\nabla}\vec{b}) \\ &\quad + (\vec{\nabla}\cdot\vec{b})\vec{a} - (\vec{\nabla}\cdot\vec{a})\vec{b} \end{aligned}\right\}$$

obsahuje gradient vektorového pole
$\vec{\nabla}\vec{a}$ $\vec{\nabla}\vec{b}$
tenzor 2. řádu

gradient funkce dvou argumentů

$f(X|Y)$ fce závisející na 2 bodech

např. $r(X|Y) = |X-Y|$

$\vec{\nabla} f(X|X')$ gradient v prvním argumentu X

$\vec{\nabla}' f(X|X')$ gradient v druhém argumentu X'

pokud $f(X|Y) = F(X-Y)$ pak

$$\vec{\nabla} f(X|X') = -\vec{\nabla}' f(X|X')$$

Operátory 2. řádu

$\vec{\nabla}$, $\vec{\nabla}\cdot$, $\vec{\nabla}\times$ umožňují následující kombinace:

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} f) = \nabla^2 f$ → Laplaceův operátor funkce

$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) - \nabla^2\vec{a}$ → Laplaceův operátor vekt. pole

$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla} f) = 0$ → podmínka existence sk. potenc.

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a}) = 0$ → podmínka existence vekt. potenc.

Laplaceův operátor funkce

$$\nabla^2 f = \Delta f = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f$$

Greenova věta

$$\int_V \left(g\nabla^2 f - f\nabla^2 g\right) dV = \int_{\partial V} \left(g\vec{\nabla} f - f\vec{\nabla} g\right)\cdot d\vec{S}$$

$\vec{n}$ vnější normála V

$$= \int_{\partial V} \left(\frac{\partial f}{\partial n} g - f\frac{\partial g}{\partial n}\right) dS \qquad \frac{\partial f}{\partial n} = \vec{n}\cdot\vec{\nabla} f$$

důkaz:

$$\int_V \left(g\nabla^2 f - f\nabla^2 g\right) dV = \int_V \left(\vec{\nabla}\cdot(g\vec{\nabla} f) - \cancel{(\vec{\nabla} g)\cdot(\vec{\nabla} f)} - \vec{\nabla}\cdot(f\vec{\nabla} g) + \cancel{(\vec{\nabla} f)\cdot(\vec{\nabla} g)}\right) dV$$

$$= \int_{\partial V} \left(g\vec{\nabla} f - f\vec{\nabla} g\right)\cdot d\vec{S} = \int_{\partial V} \left(\frac{\partial f}{\partial n} g - f\frac{\partial g}{\partial n}\right) dS$$

Laplaceův oper. v ortogonálních souřadnicích

$$\nabla^2 f = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f = \frac{1}{h_{(1)}h_{(2)}h_{(3)}}\left(\frac{\partial}{\partial\xi^1}\left(\nabla_1 f\, h_{(2)}h_{(3)}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi^2}\left(\nabla_2 f\, h_{(1)}h_{(3)}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi^3}\left(\nabla_3 f\, h_{(1)}h_{(2)}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{h_{(1)}h_{(2)}h_{(3)}}\left(\frac{\partial}{\partial\xi^1}\left(\frac{h_{(2)}h_{(3)}}{h_{(1)}}\frac{\partial f}{\partial\xi^1}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi^2}\left(\frac{h_{(1)}h_{(3)}}{h_{(2)}}\frac{\partial f}{\partial\xi^2}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi^3}\left(\frac{h_{(1)}h_{(2)}}{h_{(3)}}\frac{\partial f}{\partial\xi^3}\right)\right)$$

Laplaceův operátor vektorového pole

$$\nabla^2 \vec{a} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) - \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a})$$

rozklad na kartézské složky

$$\vec{a} = a^x \vec{e}_x + a^y \vec{e}_y + a^z \vec{e}_z$$

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ konstantní

$\Downarrow$

$$\nabla^2 \vec{a} = (\nabla^2 a^x)\vec{e}_x + (\nabla^2 a^y)\vec{e}_y + (\nabla^2 a^z)\vec{e}_z$$

složky $\nabla^2 a^x, \ldots$ můžeme vyjádřit v libovolných ortog. souř.

$$\nabla^2 a^x = \frac{1}{h_{(1)}h_{(2)}h_{(3)}}\left(\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left(\frac{h_{(2)}h_{(3)}}{h_{(1)}}\frac{\partial a^x}{\partial \xi^1}\right) + \ldots\right)$$

rozklad na ortogonální složky

$$\vec{a} = \sum_k a^k \vec{e}_k$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ proměnné

$\rightarrow$ velký problém

lze využít přepis $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) - \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a})$ a dosazením dostat vyjádření $(\nabla^2\vec{a})^k$ pomocí a^l, $h_{(l)}$ a derivací $\frac{\partial}{\partial \xi^l}$

velmi složité!

pozor, $(\nabla^2\vec{a})^k$ závisí i na a^l $l \neq k$

Vektorová varianta Greenovy věty

$$\int_V \left[\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{b}) - \vec{b}\cdot\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a})\right] dV = \int_{\partial V} \left[\vec{b}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a}) - \vec{a}\times(\vec{\nabla}\times\vec{b})\right]\cdot d\vec{S}$$

Základy teorie distribucí

Co je objemová hustota singulárních zdrojů?
Hustota bodového náboje

$\varrho_{\text{bodový náboj } q \text{ v } P}(X) = ?$

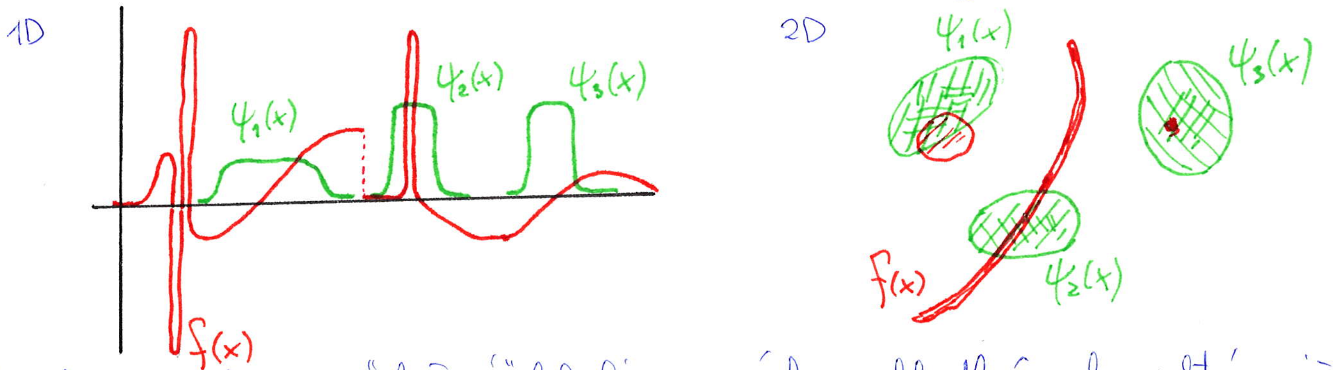
$\int \varrho_P \, dV = q \qquad \varrho_P(X) = 0 \quad X \neq P$

nelze popsat obyčejnou funkcí
zobecněný pojem funkce - distribuce
integrální charakteristika "divokých" funkcí
"samplování" pomocí testovacích fcí

znalost funkce f $\Leftrightarrow$ znalost jejích integrálů vážených testovací fcí

$f(X) \Leftrightarrow \int f(X)\,\varphi(X)\,dV \quad \forall$ testovací φ

testovací fce - způsob omezení se na vybranou oblast



testovací fce - "slušná" lokalizovaná fce = hladká s kompaktním nosičem
"bodový" zdroj v P

$$\int \varphi(X)\,\varrho_P(X)\,dV = \underset{\uparrow}{q}\;\varphi(P) \qquad \begin{cases} \varphi(P) & \text{pokud } \varphi \text{ "pokrývá" } P \\ 0 & \text{pokud } \varphi \text{ "nepokrývá" } P \end{cases}$$

velikost zdroje

pro jednotkovou velikost zdroje označujeme δ

$$\delta_P(X) \equiv \delta(X|P)$$

$$\int \varphi(X)\,\delta_P(X)\,dV = \varphi(P)$$

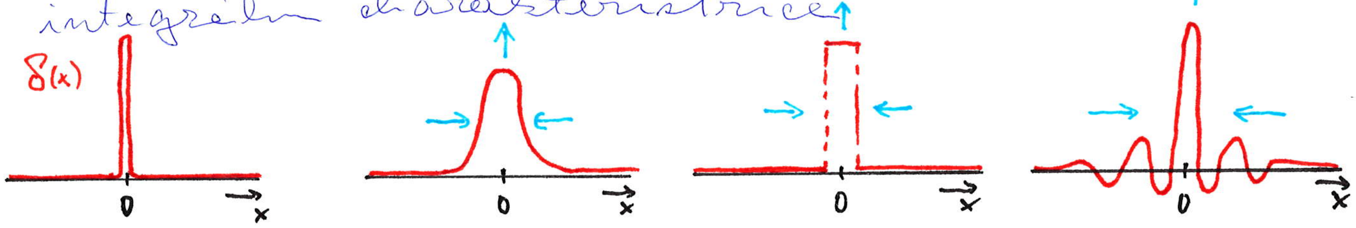
δ-funkce v 1D

$$\delta(x) \equiv \delta_0(x) \equiv \delta(x|0) \quad \text{- δ-funkce lokalizovaná v 0}$$

$$\int \varphi(x)\,\delta(x)\,dx = \varphi(0)$$

idealizace "velkého impulzu" v 0

nezáleží přesně na profilu impulzu, pouze na integrální charakteristice



- celkový integrál 1 — $\int \delta(x)\,dx = 1$
- integrál "mimo" 0 vymizí — $\int_I \delta(x)\,dx = 0$ I interval mimo 0
- žádná "důležitá" vnitřní struktura — $\int \varphi(x)\delta(x) = \varphi(0)$ ← pouze hodnota φ nic složitějšího

Derivace distribucí

motivace z chování integrovatelných fcí

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,dx + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} (f(x)\varphi(x))'\,dx}_{=[f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{\infty}=0}$$

díky chování test fce $\varphi(\pm\infty)=0$

⇓

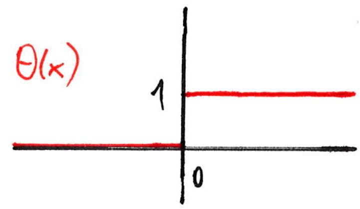
pro obecnou distribuci T

$$\int T'(x)\varphi(x)\,dx \overset{def}{=} -\int T(x)\varphi'(x)\,dx$$

Derivace skokové funkce

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$$

(nezáleží na hodnotě v 0)



distribuční derivace Θ(x)

- určená integrálním chováním

$$\int_{\mathbb{R}} \Theta'(x)\underset{\text{testovací funkce}}{\varphi(x)}\,dx \underset{\text{per partes}}{=} -\int_{\mathbb{R}} \Theta(x)\varphi'(x)\,dx + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} (\Theta(x)\varphi(x))'\,dx}_{=[\Theta(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{\infty}=0} =$$

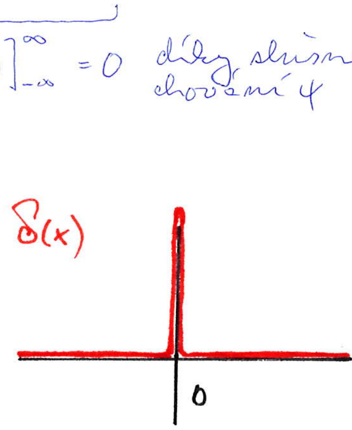
díky slušnému chování φ $\varphi(\pm\infty)=0$

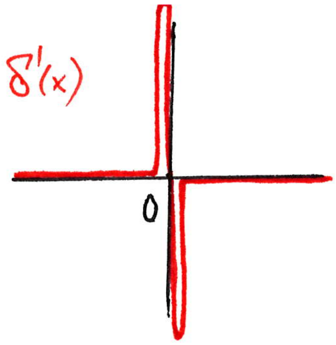
$$= -\int_0^{\infty} \varphi'(x)\,dx = -[\varphi]_0^{\infty} = \varphi(0)$$

$$= \int \delta(x)\varphi(x)\,dx$$

⇓

$$\Theta'(x) = \delta(x)$$





Derivace δ-funkce

distribuční derivace $\delta(x)$

- určená integrálním chováním

$$\int_{\mathbb{R}} \delta'(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\,\varphi'(x)\,dx + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \big(\delta(x)\varphi(x)\big)'dx}_{\left[\delta(x)\varphi(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0 \Leftarrow \text{ díky } \varphi(\pm\infty)=0} = -\varphi'(0)$$

testovací fce ↑ per partes ↑ definice δ-fce ↑

- lokalizované též kolem $x=0$

$$\int \varphi(x)\,\delta'(x)\,dx = 0 \qquad \text{pro } \varphi \text{ lokalizované mimo } 0$$

- citlivé na "vnitřní strukturu" kolem $x=0$

$$\int \varphi(x)\,\delta'(x)\,dx = -\varphi'(0) \quad \leftarrow \text{informace o derivaci } \varphi$$

podobně lze definovat další derivace

$$\delta''(x) \; : \; \int \delta''(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi''(0) \qquad \text{atd.}$$

Vlastnosti δ-funkce

$\delta(x)$ je sudá funkce

$$f(x)\,\delta(x) = f(0)\,\delta(x)$$

$$\int \delta(x)\,dx = 1$$

$\delta'(x)$ je lichá funkce

$$f(x)\,\delta'(x) = f(0)\,\delta'(x) - f'(0)\,\delta(x)$$

$$\int \delta'(x)\,dx = 0$$

cvičení:

$$f(x)\,\delta'(x) = \frac{d}{dx}\big(f(x)\delta(x)\big) - f'(x)\delta(x) = \frac{d}{dx}\big(f(0)\delta(x)\big) - f'(0)\delta(x) = f(0)\,\delta'(x) - f'(0)\,\delta(x)$$

Vlastnosti distribucí

distribuce tvoří lineární funkcionální prostor
(uzavřené vůči sčítání a násobení čísly)

uzavřené vůči operaci derivování (lze vždy derivovat)

uzavřené vůči násobení hladkou funkcí

problémy s definicí obecného násobení distribucí

δ-funkce ve 3D

$\delta_P(X) \equiv \delta(X|P)$ δ-funkce lokalizovaná v P

$\int \psi(X)\, \delta_P(X)\, dV = \psi(P)$

v distribučním smyslu platí

$$-\Delta \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} = \delta_P \qquad \text{tj.} \quad -\underset{\substack{\uparrow \\ \text{laplace působící v } X}}{\Delta} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r(X|P)} = \delta(X|P)$$

běžný výpočet pro $r \neq 0$ (cvičení)

$$-\Delta \frac{1}{r} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r} = \vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{e}_r}{r^2} = -\frac{2}{r^3}\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r + \frac{2}{r^3} = 0 \qquad \Leftarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{e}_r = \frac{2}{r} \quad \vec{\nabla} r = \vec{e}_r$$

distribuční výpočet - integrál s testovací fcí ψ

$$-\int_X \psi\, \Delta\frac{1}{r}\, dV \overset{①}{=} -\int_{X \in \text{malá koule kolo P poloměru } r_0} \psi\, \Delta\frac{1}{r}\, dV =$$

① - díky $\Delta\frac{1}{r} = 0$ mimo $r = 0$

② - Greenova věta

③ - $dV = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$

$\frac{\partial}{\partial n} \equiv \frac{\partial}{\partial r}$ na ∂K

$dS = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$

$$\overset{②}{=} -\int_K \frac{1}{r}\Delta\psi\, dV + \int_{\partial K}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial 1/r}{\partial n}\right) dS$$

$$\overset{③}{=} -\int_K \underbrace{\frac{1}{r}(\Delta\psi)\, r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi}_{\substack{\text{regulární pro } r<r_0 \\ \text{malé pro } r_0 \to 0}} + \int_{\partial K}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \psi\frac{1}{r^2}\right) r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$= \underbrace{r_0 \int_{\partial K} \frac{\partial\psi}{\partial r}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}_{\text{malé pro } r_0 \to 0} + \underbrace{\int_{\partial K} \psi \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}_{\substack{\text{průměrná hodnota } \psi \\ \text{na povrchu } \partial K \,\times\, 4\pi \\ \text{pro } r_0 \to 0 \text{ se blíží k } \psi(P)}}$$

$$\underset{r_0 \to 0}{=} 4\pi\,\psi(P) = \int \psi\, 4\pi\,\delta_P\, dV \quad \Rightarrow \quad -\Delta\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r} = \delta_P$$

obecně lze ukázat (opakované použití Gaussovy věty)

$$\vec{\nabla}\vec{\nabla}\frac{1}{r} = \frac{1}{r^5}\left(3\vec{r}\,\vec{r} - r^2 \overset{\leftrightarrow}{q}\right) - \frac{4\pi}{3}\overset{\leftrightarrow}{q}\,\delta_P$$

Substituce v δ-funkci

δ-funkce $\delta(X|X')$ má charakter jednotkové matice působící na "funkcionálních vektorech" = funkcích $\psi(X)$

$$\psi(X) = \int \psi(X')\, \delta(X'|X)\, dV' = \int \psi(X')\, \tilde{\delta}(X'|X)$$

viz výraz v konečné dimenzi

$$\psi^k = \sum_l \delta^k_l\, \psi^l$$

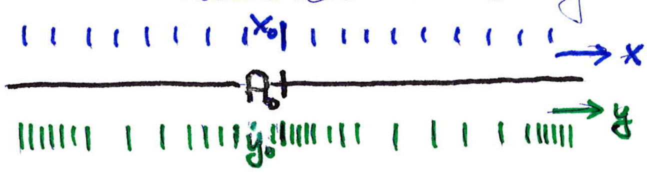
pozor na "normalizaci" delta fce

$\tilde{\delta}(X'|X)$ = jedn. matice $\qquad \tilde{\delta}(X'|X) = \delta(X'|X)\, dV'$

$\delta(X'|X)$ = bi-funkce závislé na volbě dV

aplikace v 1D

přímka bodů se souřadnicí x či y



$$\psi(A_0) = \int_{A'} \psi(A')\, \tilde{\delta}(A'|A_0) = \int \psi(x)\, \delta(x-x_0)\, dx = \int \psi(y)\, \delta(y-y_0)\, dy$$

vyjádření v souř. x $\qquad$ vyjádření v souř. y

$\Downarrow$

$$\underbrace{\delta(x-x_0)\, dx}_{\text{proměnná } x} = \underbrace{\delta(y-y_0)\, dy}_{\text{proměnná } y} = \underbrace{\delta(y(x)-y_0)\, \frac{dy}{dx}\, dx}_{\text{proměnná } x}$$

$y = y(x) \qquad y_0 = y(x_0) \qquad y$ monotónní fce – převod souř.

$\Downarrow$

$$\delta(y(x)-y_0) = \frac{1}{\left|\frac{dy}{dx}\right|}\, \delta(x-x_0)$$

abs. hodn. řeší změnu integr. pro klesající fci $y(x)$

Substituce v δ-funkci

δ-funkce $\delta(X|X')$ má charakter jednotkové matice působící na "funkcionálních vektorech" = funkcích $\psi(X)$

$$\psi(X) = \int_{X'} \delta(X|X')\,\psi(X')\,dV'$$

podobně vztahu pro "normální" vektory ψ^k

$$\psi^k = \sum_l \delta^k_l\,\psi^l$$

Skrytý problém s integrační mírou
jednotkové matice odpovídá kombinaci

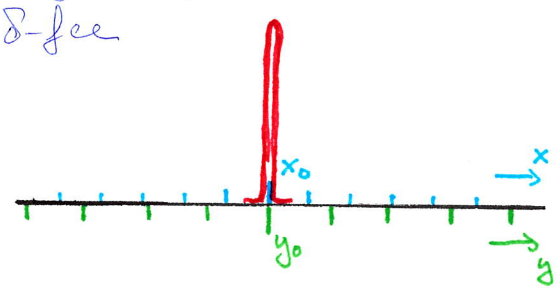
3D: $\underset{\text{nezávislé na } dV}{\tilde\delta(X|X')} = \underset{\text{závislé na } dV}{\delta(X|X')}\,dV$ tj. $\delta(X|X') = \frac{1}{dV}\tilde\delta(X|X')$

1D: $\underset{\text{nezávislé na } dx}{\tilde\delta(x|x')} = \underset{\text{závislé na } dx}{\delta(x-x_0)}\,dx$ tj. $\delta(x-x_0) = \frac{1}{dx}\tilde\delta(x|x_0)$

Důležité při změně proměnných

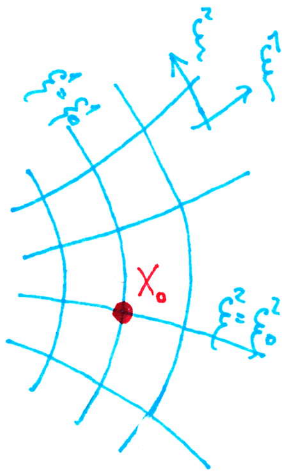
změna $x \to y = y(x)$ prostá, vzájemně jednoznačné
$y_0 = y(x_0)$ poloha δ-fce

$$\tilde\delta = \delta(x-x_0)\,dx = \delta(y-y_0)\,dy$$



$$\Downarrow\quad \delta(y(x)-y_0) = \frac{1}{\left|\frac{dy}{dx}(x_0)\right|}\,\delta(x-x_0)$$

(absolutní hodnota řeší problém se směrem integrování pokud je $y(x)$ klesající)



3D situace

nechť $X = X_0$ pro $\xi^1=\xi^1_0,\ \xi^2=\xi^2_0,\ \xi^3=\xi^3_0$

$$\tilde\delta = \delta(X|X_0)\underset{\substack{\uparrow \\ h_1h_2h_3\,d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3}}{dV} = \delta(\xi^1-\xi^1_0)\,\delta(\xi^2-\xi^2_0)\,\delta(\xi^3-\xi^3_0)\,d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$$

$$\Downarrow\quad \delta(X|X_0) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\,\delta(\xi^1-\xi^1_0)\,\delta(\xi^2-\xi^2_0)\,\delta(\xi^3-\xi^3_0)$$

δ-funkce lokalizované na bodech, křivkách a plochách

0D: $\int \psi(X)\, \delta_{X_0}(X)\, dV \overset{\text{def}}{=} \psi(X_0)$ bod X_0

1D: $\int \psi(X)\, \delta_{\gamma}(X)\, dV \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{X\in\gamma} \psi(X)\, ds$ křivka γ

2D: $\int \psi(X)\, \delta_{S}(X)\, dV \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{X\in S} \psi(X)\, dS$ plocha S

vyjádření v souřadnicích

0D: nechť $\xi^k(X_0) = \xi^k_0 \quad k = 1,2,3$

$$\int \psi(X)\, \delta_{X_0}(X) \underset{\substack{\uparrow \\ h_1 h_2 h_3\, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3}}{dV} = \psi(X_0) = \int \psi(\xi^1,\xi^2,\xi^3)\, \delta(\xi^1-\xi^1_0)\,\delta(\xi^2-\xi^2_0)\,\delta(\xi^3-\xi^3_0)\, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$$

$\Downarrow$

$$\delta_{X_0}(X) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\, \delta(\xi^1-\xi^1_0)\,\delta(\xi^2-\xi^2_0)\,\delta(\xi^3-\xi^3_0)$$

1D: nechť γ je souřadnicová čára ξ^1, tj. $\xi^2 = \xi^2_0$ $\xi^3 = \xi^3_0$

$$\int \psi(X)\, \delta_{\gamma}(X) \underset{\substack{\uparrow \\ ds_1\, h_2 d\xi^2\, h_3 d\xi^3}}{dV} = \int\limits_{\gamma} \psi(X)\, ds = \int\limits_{\xi^2,\xi^3} \int\limits_{\gamma} \psi(\xi^1,\xi^2,\xi^3)\, ds_1\, \delta(\xi^2-\xi^2_0)\,\delta(\xi^3-\xi^3_0)\, d\xi^2 d\xi^3$$

$\Downarrow$

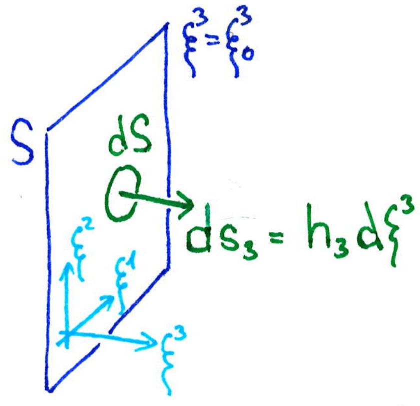
$$\delta_{\gamma}(X) = \frac{1}{h_2 h_3}\, \delta(\xi^2-\xi^2_0)\,\delta(\xi^3-\xi^3_0)$$

2D: nechť S je souřadnicová plocha $\xi^3 = \xi^3_0$ parametr. ξ^1, ξ^2

$$\int \psi(X)\, \delta_{S}(X) \underset{\substack{\uparrow \\ dS\ h_3 d\xi^3}}{dV} = \int\limits_{S} \psi(X)\, dS = \int\limits_{\xi^3} \int\limits_{S} \psi(\xi^1,\xi^2,\xi^3)\, dS\ \delta(\xi^3-\xi^3_0)\, d\xi^3$$

$\Downarrow$

$$\delta_{S}(X) = \frac{1}{h_3}\, \delta(\xi^3-\xi^3_0)$$



Upozornění na komplikace

- distribuce nelze obecně násobit
  problém s násobením singulárních částí
  např. nelze definovat
  $\delta^2(x) \qquad \delta(x)\,\theta(x) \qquad \delta'(x)\,\delta(x)$ atd.

- komplikace nastávají při definici distribucí
  na oblastech s okrajem
  je nutno vyjasnit chování na okraji

- komplikace se substitucí v δ-funkci
  pokud není lokálně prostá
  $y = y(x) \qquad y'(x_0) = 0$

- problém s násobením δ-fcí lokalizovaných
  na 0D, 1D, 2D útvarech
  lze definovat pouze, pokud je průnik slušný

- problém se souřadnicovým vyjádřením
  δ-fcí na hranici definice souřadnic
  např.: v počátku sférických souřadnic
  na ose cylindrických souřadnic