
Elektrostatika – pokročilé metody

Rozklad do systému funkcí.

Báze v prostoru funkcí. Prostor řešení Laplaceovy úlohy, vlastní funkce operátoru, systémy vlastních funkcí, ortonormalita a úplnost, komplexní funkce. Příklad v 1D - Fourierova transformace na intervalu a reálné ose.

Rozklad do vlastních funkcí.

Báze vlastních funkcí, funkce operátoru, integrální jádro Laplaceova operátoru, Greenovy funkce a δ -funkce. Dirichletova Greenova funkce v uzemněném kvádru.

Metoda separace proměnných.

Separace proměnných, multiplikační separabilní ansatz, separační konstanty. Separace v kartézských souřadnicích. Laplaceova úloha v kvádru, nenulový potenciál na jedné stěně, výběr funkcí, koeficienty v rozvoji jako Fourierova transformace potenciálu na okraji. Separace ve sférických souřadnicích, separace radiální a úhlových souřadnic, radiální závislost, separace úhlových proměnných, zobecněná Legendreova rovnice, kulové funkce. Relace ortogonality a úplnosti kulových funkcí. Separace v cylindrických souřadnicích, řešení symetrická vůči posunu podél osy, Laplaceova úloha okolo klínu.

Multipólový rozvoj.

Monopól. Dipól, potenciál, intenzita, nábojová hustota, síla na dipól ve vnějším poli. Vzdálené pole nábojů, monopól, dipól, kvadrupól. Nábojové momenty, tenzorové multipóly, příklady. Rozvoj do Legendreových polynomů a sférických harmonik, sférické multipóly. Axiálně symetrická situace, rozvoj potenciálu podle osy.

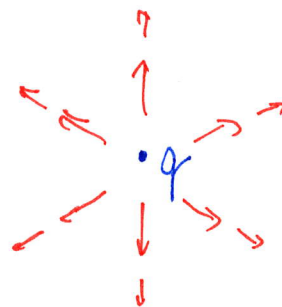
Multipólový rozvoj

Monopól

$$\phi_{\text{mon}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad \vec{E}_{\text{mon}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e} \quad \rho_{\text{mon}} = q\delta$$

Síla na monopól ve vnějším poli

$$\vec{F}_{\text{na mon}} = q\vec{E}$$



Dipól

pole dvou blízkoých opačných nábojů

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{2} \cdot \left(\vec{\nabla}' \frac{1}{r} + \vec{\nabla}' \frac{1}{r} \right)$$

Taylorův rozvoj
absolutně člen serus.

$r(X|X')$

- od náboje

- od členu $-\frac{d}{2}$

$$X_+ = X' + \frac{d}{2} \quad X_- = X' - \frac{d}{2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q d \cdot \frac{\vec{e}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r}$$

zde $\vec{p} = q\vec{d}$ v limitě $d \rightarrow 0$

$$r(X|X') = \sqrt{\Delta x^a \Delta x^b g_{ab}} \quad \Delta x^a = x^a - x'^a \equiv r^a$$

$$\vec{\nabla}' \frac{1}{r} = -\vec{e} \quad \vec{\nabla}' \frac{1}{r} = -\vec{q} \quad \nabla_a r_b = -g_{ab}$$

intenzita

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\vec{\nabla} \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) \cdot \vec{p}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (3\vec{p} \cdot \vec{e} \vec{e} - \vec{p}) - \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{p} \delta_{X'}$$

nábojová hustota

$$\rho_{\text{dip}}(X) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi} \left(\nabla^2 \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) \cdot \vec{p} = \frac{1}{4\pi} \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \left(\Delta \frac{1}{r} \right) = -\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \delta_{X'}(X)$$

lze získat i z definice dipólu $-\frac{1}{4\pi} \delta_{X'}(X)$ jako dvou blízkoých nábojů

$$\rho_{\text{dip}}(X) = \rho_{\text{mon}} X_+(X) - \rho_{\text{mon}} X_-(X) = q(\delta(X|X_+) - \delta(X|X_-)) = q d \cdot \vec{\nabla}' \delta(X|X') = -\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \delta(X|X')$$

$$\text{díky } \vec{\nabla}' \delta(X|X') = -\vec{\nabla} \delta(X|X') \Leftrightarrow \delta(X|X') = \delta(X-X')$$

síla ze dipólu ne umějí - poli

$$\vec{F}_{\text{dip}} = q\vec{E}(X_+) - q\vec{E}(X_-) = \underbrace{q\vec{d}}_{\vec{p}} \cdot \vec{\nabla} \vec{E}(X)$$

$$X_{\pm} = X \pm \frac{d}{2}$$

$$= (\vec{\nabla} \vec{E}) \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot (\vec{\nabla} \vec{E}) - (\vec{\nabla} \vec{E}) \cdot \vec{p} =$$

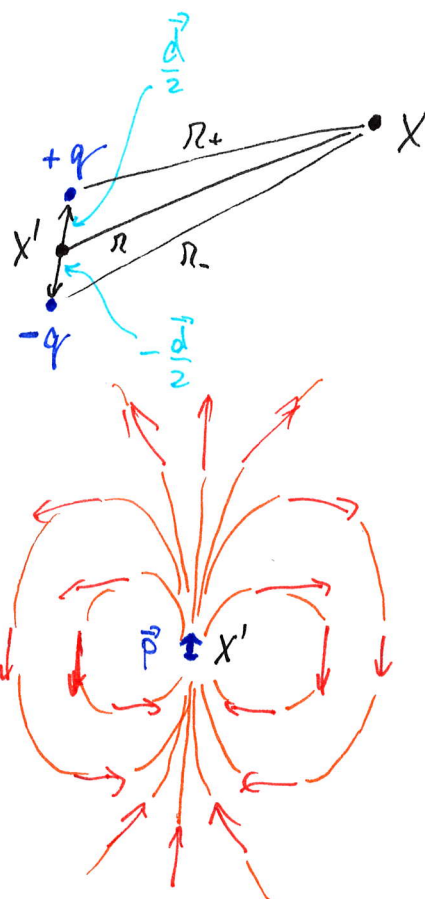
$$= \vec{\nabla}(\vec{E} \cdot \vec{p}) - \underbrace{\vec{p} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})}_0 = \vec{\nabla}(\vec{E} \cdot \vec{p})$$

distribučně

$$\vec{F}_{\text{dip}} = \int \vec{E} \rho_{\text{dip}} dV = - \int \vec{E} \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \delta_X dV \stackrel{\uparrow}{=} \int \vec{p} \cdot (\vec{\nabla} \vec{E}) \delta_X dV = \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \vec{E}$$

per partes + $\vec{p} = \text{const}$

dál už jako výše



Vzdálení pole systému nábojů

předpokládáme lokalizované rozložení náboje

$\rho(P+\vec{r}')$ nenulové jen pro malé $\vec{r}'$

zajímá nás pole daleko od náboje

$\phi(P+\vec{r})$ pro velká r

budeme zkoumat rozvoj

$$\frac{r'}{r} \ll 1$$

potenciál nábojového rozložení

$$\phi(X) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r(X|X')} \rho(X') dV'$$

rozvoj členů $\frac{1}{r(X|X')}$ v argumentu $X' = P + \vec{r}'$

$$\frac{1}{r(X|X')} = \frac{1}{r(X|P)} + r'^a \left(\nabla'_a \frac{1}{r} \right)(X|P) + \frac{1}{2} r'^a r'^b \left(\nabla'_a \nabla'_b \frac{1}{r} \right)(X|P) + \dots$$

nýpočet:

$$\nabla'_a r = -\frac{r_a}{r} = -e_a \quad \nabla'_a r_b = -q_{ab} \quad \Leftrightarrow \quad r^a(X|X') = x^a - x'^a \quad r(X|X') = |X - X'| = |\vec{r}(X|X')|$$

$$\Downarrow$$

$$l=0 \quad \frac{1}{r}$$

$$\vec{\nabla}' \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \vec{\nabla}' r = -\frac{1}{r^3} \vec{r}$$

$$l=1 \quad \nabla'_a \frac{1}{r} = \frac{1}{r^3} r_a = \frac{1}{r^2} e_a$$

$$\vec{\nabla}' \vec{\nabla}' \frac{1}{r} = \vec{\nabla}' \frac{\vec{r}}{r^3} = -3 \frac{1}{r^4} (\vec{\nabla}' r) \vec{r} + \frac{1}{r^3} \vec{\nabla}' \vec{r} = \frac{3}{r^5} \vec{r} \vec{r} - \frac{1}{r^3} \vec{q}$$

$$l=2 \quad \nabla'_a \nabla'_b \frac{1}{r} = \frac{3}{r^5} (r_a r_b - \frac{1}{3} r^2 q_{ab}) = \frac{3}{r^3} (e_a e_b - \frac{1}{3} q_{ab})$$

provozování:

$$e_a e_b - \frac{1}{3} q_{ab} \quad \text{symetrické bezstopé} \quad q^{ab} (e_a e_b - \frac{1}{3} q_{ab}) = 0$$

bezstopová část

bez indexů budeme značit $\langle T \rangle$

$$T_{ab} = T_{\langle ab \rangle} + \frac{1}{3} T q_{ab}$$

$\uparrow$ stopa T q_{ab} - triviální (jednotkový) tenzor
bezstopá část T $q^{ab} T_{\langle ab \rangle} = 0$

$$e_a e_b - \frac{1}{3} q_{ab} = e_{\langle a} e_{b \rangle}$$

$$\vec{\nabla}' \vec{\nabla}' \frac{1}{r} = \frac{3}{r^3} \langle \vec{e} \vec{e} \rangle$$

$$\text{obecně} \quad \underbrace{\vec{\nabla}' \dots \vec{\nabla}'}_l \frac{1}{r} = \frac{(2l-1)!!}{r^{2l+1}} \langle \underbrace{\vec{e} \dots \vec{e}}_l \rangle$$

projektor na bezstopou část symetr. tenz.

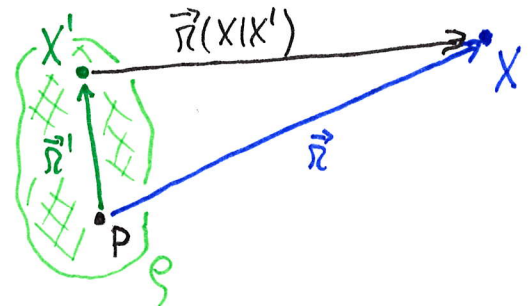
$$T_{\langle ab \rangle} = T_{[k\ell]} P_{ab}^{k\ell}$$

$$P_{ab}^{k\ell} = \delta_a^k \delta_b^\ell - \frac{1}{3} q^{k\ell} q_{ab}$$

$$\Downarrow \quad r'^a r'^b e_{\langle a} e_{b \rangle} = r'^a r'^b P_{ab}^{k\ell} e_k e_\ell = r'^{\langle a} r'^{b \rangle} e_a e_b$$

rozvoj

$$\frac{1}{r(X|X')} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} e^a r'_a + \frac{3}{2} \frac{1}{r^3} e^a e^b r'_{\langle a} r'_{b \rangle} + \dots$$



Tenzorové multipóly

dosazení rozvoje $\frac{1}{r(x|x')}$ do potenciálu

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\underbrace{\frac{1}{r} \int \rho(x') dV'}_{Q \text{ monopól}} + \frac{1}{r^2} e^a \underbrace{\int r'_a \rho(x') dV'}_{p_a \text{ dipól}} + \frac{1}{2} \frac{1}{r^3} e^a e^b \underbrace{3 \int r'_a r'_b \rho(x') dV'}_{K_{ab} \text{ kvadrupól}} + \dots \right]$$

l -tý moment rozložení náboje

$$Q_{(l) a_1 \dots a_l} = \int r'_{a_1} \dots r'_{a_l} \rho(x') dV'$$

l -tý multipól = 2^l -pól

$$M_{(l) a_1 \dots a_l} = (2l-1)!! Q_{(l) \langle a_1 \dots a_l \rangle}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{1}{r^{l+1}} e^{a_1} \dots e^{a_l} M_{(l) a_1 \dots a_l}$$

Závislost multipólů na volbě počátku

obecně multipóly závisí na volbě P

nejnižší nenulový moment nezávisí na volbě počátku

$$\text{necht' } Q_{(l)} = 0 \quad l=0, 1, \dots, k-1 \quad Q_{(k)} \neq 0$$

posun počátku

$$\tilde{P} = P + d \quad X = P + \vec{r} = \tilde{P} + \tilde{\vec{r}} \quad \tilde{\vec{r}} = \vec{r} - d$$

moment vůči $\tilde{P}$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{(k) a_1 \dots a_k} &= \int \tilde{r}^{a_1} \dots \tilde{r}^{a_k} \rho(x) dV = \int (r^{a_1} - d^{a_1}) \dots (r^{a_k} - d^{a_k}) \rho dV \\ &= \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (-1)^m d^{a_1} \dots d^{a_m} \underbrace{\int r^{a_{m+1}} \dots r^{a_k} \rho dV}_{Q_{(k-m)} = 0 \text{ pro } m > 0} \\ &= Q_{(k) a_1 \dots a_k} \end{aligned}$$

↓

nejnižší nenulový multipól nezávisí na volbě počátku
- charakterizuje dominantní chování vzdáleného pole

Monoŝŝol $l=0$

$$Q \equiv M_{(0)} = Q_{(0)} = \int \rho \, dV$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}$$

Dipol $l=1$

$$p^a = M_{(1)}^a = Q_{(1)}^a = \int r^a \rho \, dV$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} e^a p_a$$

$$E^a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (3e^a e^b p_b - p^a)$$

(mimo samostoj dipol)

Kvadrupol $l=2$

$$K^{ab} = M_{(2)}^{ab} = 3 Q_{(2)}^{ab} = \int (3r^a r^b - r^2 \delta^{ab}) \rho \, dV$$

$$Q_{(2)}^{ab} = \int r^a r^b \rho \, dV$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \frac{1}{2} e^a e^b K_{ab} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \frac{1}{2} r^a r^b K_{ab}$$

$$E^a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{5}{r^6} \frac{1}{r} \frac{1}{2} r^b r^c K_{bc} - \frac{1}{r^5} r^b K_{ab}^a \right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^4} \left[\frac{5}{2} e^a e^b e^c K_{bc} - K_{ab}^a e^b \right]$$

Průhledy

$$1) \quad Q = M_{(0)} = Q_{(0)} = \int \rho \, dV = q - q = 0$$

$$\vec{P} = \vec{M}_{(1)} = \vec{Q}_{(1)} = \int \vec{r} \rho \, dV = q \frac{\vec{u}}{2} - q \left(-\frac{\vec{u}}{2} \right) = q \vec{u}$$

$$2) \quad Q = q + q - q - q = 0$$

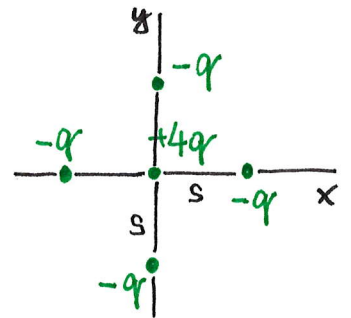
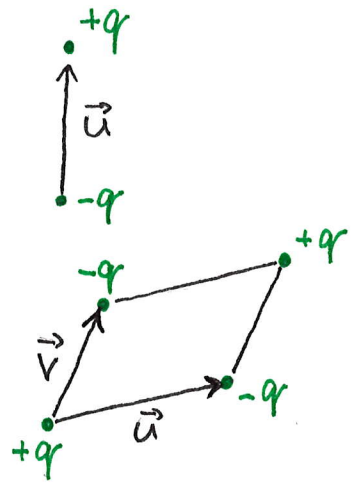
$$\vec{P} = q \left(-\frac{\vec{u}}{2} - \frac{\vec{v}}{2} \right) + q \left(\frac{\vec{u}}{2} + \frac{\vec{v}}{2} \right) - q \left(\frac{\vec{u}}{2} - \frac{\vec{v}}{2} \right) - q \left(\frac{\vec{u}}{2} + \frac{\vec{v}}{2} \right) = 0$$

$$Q^{ab} = \frac{q}{4} \left[(-u-v)^a (-u-v)^b + (u+v)^a (u+v)^b - (u-v)^a (u-v)^b - (-u+v)^a (-u+v)^b \right]$$

$$= q \left[u^a v^b + v^a u^b \right] = 2q u^{(a} v^{b)}$$

$$K^{ab} = M_{(2)}^{ab} = 3Q_{(2)}^{ab} = 6q u^{(a} v^{b)} = 6q \left(u^{(a} v^{b)} - \frac{1}{3} Q^{ab} u^m v_m \right)$$

$$\vec{K} = 6q \langle \vec{u} \vec{v} \rangle = 6q \left(\frac{1}{2} (\vec{u} \vec{v} + \vec{v} \vec{u}) - \frac{1}{3} \vec{u} \cdot \vec{v} \right)$$



$$3) \quad Q = 4q - q - q - q - q = 0$$

$$\vec{P} = -q s \vec{e}_x - q(-s \vec{e}_x) - q s \vec{e}_y - q(-s \vec{e}_y) = 0$$

$$Q_{(2)} = -q s^2 \left[\vec{e}_x \vec{e}_x + (-\vec{e}_x)(-\vec{e}_x) + \vec{e}_y \vec{e}_y + (-\vec{e}_y)(-\vec{e}_y) \right]$$

$$= -2q s^2 (\vec{e}_x \vec{e}_x + \vec{e}_y \vec{e}_y) = 2q s^2 (\vec{e}_z \vec{e}_z - \vec{q})$$

$$K^{ab} = M_{(2)}^{ab} = 3Q_{(2)}^{ab} = 6q s^2 e_z^{(a} e_z^{b)} = 2q s^2 (2e_z^a e_z^b - e_x^a e_x^b - e_y^a e_y^b)$$

výpočet vzhledem k $\vec{P} = P - s \vec{e}_x$

$$Q_{(2)}^{ab} = q s^2 \left(4 \vec{e}_x \vec{e}_x - (2 \vec{e}_x)(2 \vec{e}_x) - (\vec{e}_x + \vec{e}_y)(\vec{e}_x + \vec{e}_y) - (\vec{e}_x - \vec{e}_y)(\vec{e}_x - \vec{e}_y) \right)$$

$$= -2q s^2 (\vec{e}_x \vec{e}_x + \vec{e}_y \vec{e}_y) \leftarrow \text{stejně jako uvaž P}$$

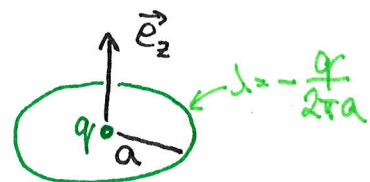
$$4) \quad Q = q + \int \lambda \, ds = q - q = 0$$

$$\vec{P} = \int \vec{r} \lambda \, ds = 0$$

$$Q_{(2)}^{ab} = \int r^a r^b \lambda \, ds = \frac{2\pi a}{3} \lambda a^2 q_{\perp}^{ab} \Leftrightarrow \int e^a e^b d\varphi = \frac{2\pi}{3} q^{ab} \Leftrightarrow \text{symetrie stoja}$$

$$= -\frac{1}{3} q a^2 (e_x^a e_x^b + e_y^a e_y^b) = \frac{1}{3} q a^2 (e_z^a e_z^b - q^{ab})$$

$$K^{ab} = M_{(2)}^{ab} = 3Q_{(2)}^{ab} = q a^2 e_z^{(a} e_z^{b)} = \frac{1}{3} q a^2 (2e_z^a e_z^b - e_x^a e_x^b - e_y^a e_y^b)$$

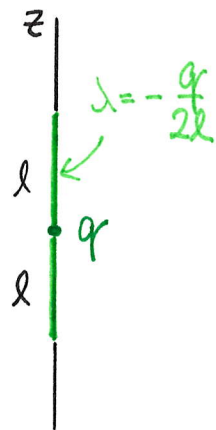


$$5) Q = q + \int \lambda ds = q - q = 0$$

$$\vec{p} = \int \vec{r} \lambda ds = 0$$

$$\vec{Q}_{(2)} = \lambda \vec{e}_z \vec{e}_z \int_{-l}^l z^2 dz = -\frac{q}{2l} \frac{2}{3} l^3 \vec{e}_z \vec{e}_z = -\frac{1}{3} q l^2 \vec{e}_z \vec{e}_z$$

$$K^{ab} = M_{(2)}^{ab} = 3 Q_{(2)}^{ab} = -q l^2 e_z^a e_z^b \\ = -\frac{1}{3} q l^2 (2 e_z^a e_z^b - e_x^a e_x^b - e_y^a e_y^b)$$

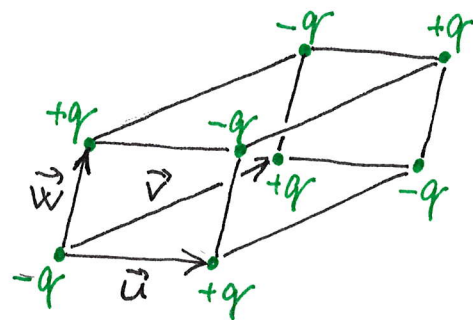


$$6) Q = 0$$

$$\vec{p} = \vec{M}_{(1)} = \vec{Q}_{(1)} = \frac{1}{2} q [(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) - (-\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}) \\ - (\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) + (-\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}) \\ - (\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}) + (-\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) \\ - (-\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) + (\vec{u} - \vec{v} - \vec{w})] = 0$$

$$Q_{(2)}^{ab} = \frac{q}{4} [(u+v+w)^a (u+v+w)^b - (-u-v-w)^a (-u-v-w)^b \\ - (u+v-w)^a (u+v-w)^b + (-u-v+w)^a (-u-v+w)^b \\ - (u-v+w)^a (u-v+w)^b + (-u+v-w)^a (-u+v-w)^b \\ - (-u+v+w)^a (-u+v+w)^b + (u-v-w)^a (u-v-w)^b] = 0$$

$$K^{ab} = M_{(2)}^{ab} = 3 Q_{(2)}^{ab} = 0$$



Rozklad faktoru $1/r$ do sférických harmonik

coulombový faktor $1/r$ můžeme napsat

$$\frac{1}{r(X|X')} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \gamma}} = \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{R'}{R} \cos \gamma + (\frac{R'}{R})^2}}$$

vytvářející funkce Legendreových pol.

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\eta+\eta^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \eta^l P_l(\eta)$$

zde $P_l(\eta)$ jsou Legendreovy polynomy

• polynomy stupně l s mocninami $l, l-2, l-4, \dots$

$$P_l(\eta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\eta^l} (\eta^2 - 1)^l$$

více viz tabulka

dostáváme

$$\frac{1}{r(X|X')} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R'^l}{R^{l+1}} P_l(\cos \gamma) \quad \cos \gamma = \vec{e} \cdot \vec{e}'$$

existuje rozklad do sférických harmonik

$$P_l(\vec{e} \cdot \vec{e}') = \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} Y_l^m(\vec{e}) Y_l^m(\vec{e}')^*$$

zde $Y_l^m(\vec{e})$ jsou kulové funkce (sférické harmoniky)

• komplexní funkce na jednotkové sféře

$$Y_l^m(\vec{e}) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) \exp(im\varphi)$$

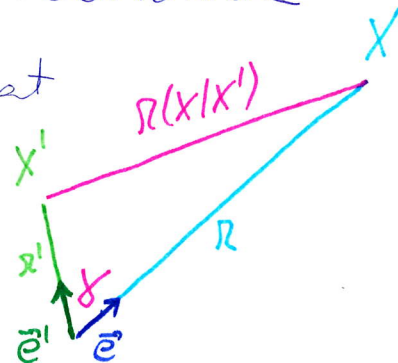
zde $P_l^m(\eta)$ jsou přidružené Legendreovy "polynomy"

$$P_l^m(\eta) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-\eta^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{d\eta^{l+m}} (\eta^2 - 1)^l$$

více viz tabulka

dostáváme

$$\frac{1}{r(X|X')} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{R'^l}{R^{l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} Y_l^m(\vec{e}) Y_l^m(\vec{e}')^*$$



Legendreovy polynomy

Polynomy $P_l(\zeta)$ stupně $l \in \mathbb{N}_0$ definované na intervalu $\zeta \in (-1, 1)$.

Explicitní vyjádření:

$$P_l(\zeta) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}_0 \\ n \leq l}} \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{(2l-n)!}{n!(l-n)!(l-2n)!} \zeta^{l-2n}$$

Rodriguesova formule:

$$P_l(\zeta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\zeta^l} (\zeta^2 - 1)^l$$

Legendreova rovnice:

$$(1 - \zeta^2) \frac{d^2 P_l}{d\zeta^2}(\zeta) - 2\zeta \frac{dP_l}{d\zeta}(\zeta) + l(l+1)P_l(\zeta) = 0$$

Legendreovy polynomy jako vlastní funkce operátoru:

$$-\frac{d}{d\zeta} \left[(1 - \zeta^2) \frac{d}{d\zeta} \right] P_l(\zeta) = l(l+1) P_l(\zeta)$$

Rekurentní vztah:

$$P_l(\zeta) = \frac{2l-1}{l} \zeta P_{l-1}(\zeta) - \frac{l-1}{l} P_{l-2}(\zeta) \quad P_0(\zeta) = 1 \quad P_1(\zeta) = \zeta$$

Generující funkce:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta t + t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\zeta) t^l$$

Krajní hodnoty:

$$P_l(\pm 1) = (\pm 1)^l$$

Relace ortogonality:

$$\int_{-1}^1 P_l(\zeta) P_{l'}(\zeta) d\zeta = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \quad \int_0^\pi P_l(\cos \vartheta) P_{l'}(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

Relace úplnosti:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\zeta) P_l(\zeta') = \delta(\zeta - \zeta') \quad \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\cos \vartheta) P_l(\cos \vartheta') = \frac{1}{\sin \vartheta} \delta(\vartheta - \vartheta')$$

Separace úhlu:

$$\int P_l(\vec{e} \cdot \vec{e}_1) P_l(\vec{e} \cdot \vec{e}_2) d\Omega = \frac{4\pi}{2l+1} P_l(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2)$$

Legendreovy polynomy pro $l \leq 4$:

$$P_0(\zeta) = 1$$

$$P_1(\zeta) = \zeta$$

$$P_2(\zeta) = \frac{3}{2}\zeta^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_3(\zeta) = \frac{5}{2}\zeta^3 - \frac{3}{2}\zeta$$

$$P_4(\zeta) = \frac{35}{8}\zeta^4 - \frac{15}{4}\zeta^2 + \frac{3}{8}$$

Přidružené Legendreovy polynomy

Obecná Legendreova rovnice pro přidružené Legendreovy funkce:

$$\frac{d}{d\zeta} \left((1 - \zeta^2) \frac{dP_l^m}{d\zeta}(\zeta) \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1 - \zeta^2} \right) P_l^m(\zeta) = 0$$

Přidružené Legendreovy "polynomy" – celočíselné parametry $l = 0, 1, \dots$, $m = -l, \dots, l$:

$$P_l^m(\zeta) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1 - \zeta^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{d\zeta^{l+m}} (\zeta^2 - 1)^l$$

Vztah k Legendreovým polynomům:

$$P_l^m(\zeta) = (-1)^m (1 - \zeta^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d\zeta^m} P_l(\zeta) \quad m \geq 0 \quad P_l^0(\zeta) = P_l(\zeta)$$

Vztah pro opačné m :

$$P_l^{-m}(\zeta) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\zeta)$$

Relace ortogonality:

$$\int_{-1}^1 P_l^m(\zeta) P_{l'}^m(\zeta) d\zeta = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} \quad \int_{-1}^1 P_l^m(\zeta) P_{l'}^{m'}(\zeta) \frac{d\zeta}{1 - \zeta^2} = \frac{1}{m} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{mm'}$$

Kulové funkce (sférické harmoniky)

Parametrizace jednotkového vektoru $\vec{e}$ pomocí sférických úhlů:

$$\vec{e} = \cos \vartheta \vec{e}_z + \sin \vartheta (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y)$$

Integrační element na jednotkové sféře:

$$d\Omega \equiv d\vec{e} = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = d\zeta d\varphi \quad \zeta = \cos \vartheta$$

2D δ -funkce na jednotkové sféře:

$$\delta^{(2)}(\vec{e} | \vec{e}') = \frac{1}{\sin \vartheta} \delta(\vartheta - \vartheta') \delta(\varphi - \varphi') = \delta(\zeta - \zeta') \delta(\varphi - \varphi')$$

$$f(\vec{e}) = \int \delta^{(2)}(\vec{e} | \vec{e}') f(\vec{e}') d\Omega' = \int \delta(\vartheta - \vartheta') \delta(\varphi - \varphi') f(\vartheta', \varphi') d\vartheta' d\varphi'$$

Kulové funkce – komplexní funkce na jednotkové sféře ($l = 0, 1, \dots$, $m = -l, \dots, l$):

$$Y_l^m(\vec{e}) \equiv Y_l^m(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) \exp(im\varphi)$$

Komplexně sdružené funkce:

$$Y_l^m(\vec{e})^* = (-1)^m Y_l^{-m}(\vec{e})$$

Kulové funkce jako vlastní funkce operátoru:

$$-\left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right] + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y_l^m(\vartheta, \varphi) = l(l+1) Y_l^m \quad -i \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_l^m = m Y_l^m$$

Relace ortogonality a úplnosti:

$$\int Y_l^m(\vec{e}) Y_{l'}^{m'}(\vec{e})^* d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\vec{e}) Y_l^m(\vec{e}')^* = \delta^{(2)}(\vec{e} | \vec{e}')$$

Rozklad Legendreova polynomu:

$$\sum_{m=-l}^l Y_l^m(\vec{e}) Y_l^m(\vec{e}')^* = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\vec{e} \cdot \vec{e}')$$

Multipólový rozvoj ve sférických harmonických
dosazením rozkladu $1/r$ do potenciálu

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{1}{r^{l+1}} Y_l^m(\vec{e}) \underbrace{\left(\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int r'^l Y_l^{m*}(\vec{e}') \varphi(x') dV' \right)}_{\text{sférický multipól } M_l^m}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_l^m(\vec{e}) M_l^m$$

zde sférický multipól je

$$M_l^m = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int r^l Y_l^{m*}(\vec{e}) \varphi(x) dV$$

Axiálně symetrické pole

necht' nábojové rozložení závisí na φ
(axiálně symetrické rozložení)

$$\varrho(X) = \varrho(r, \vartheta)$$

pro sférický multipól dostáváme

$$M_l^m = \boxed{l, m} \int r^{l+2} P_l^m(\cos \vartheta) \exp(-im\varphi) \varrho(r, \vartheta) \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

můžeme vytknout integrál přes φ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-im\varphi) d\varphi = \begin{cases} m \neq 0 & \left[\frac{i}{m} \exp(-im\varphi) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ m = 0 & [\varphi]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$M_l^m = 0 \quad \text{pro } m \neq 0$$

$$\begin{aligned} M_l^0 &= \int r^l P_l(\cos \vartheta) \varrho(r, \vartheta) \overbrace{r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi}^{dV} \\ &= 2\pi \int r^{l+2} P_l(\zeta) \varrho(r, \zeta) dr d\zeta \quad \zeta = \cos \vartheta \end{aligned}$$

potenciál

$$\phi(X) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \vartheta) M_l^0$$

rozvoj potenciálu podél osy pro velič $z = \frac{1}{r}$

$$\phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{z^{l+1}} M_l^0 \quad \text{na ose}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left. \frac{d^l \phi}{dz^l} \right|_{z=0} \frac{1}{z^l} \stackrel{l \rightarrow l+1}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+1)!} \left. \frac{d^{l+1} \phi}{dz^{l+1}} \right|_{z=0} \frac{1}{z^{l+1}}$$

porovnáním dostaneme multipóly reálnosti:
potenciálu na ose

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} M_l^0 = \left. \frac{1}{(l+1)!} \frac{d^{l+1} \phi}{dz^{l+1}} \right|_{z=0} \quad \zeta = \frac{1}{z}$$

Rozklad do systému funkcí

Báze v prostoru funkcí

Práce s lineárním prostorem funkcí je často výhodné zvolit v daném prostoru bázi funkcí

$f_j(x)$ $\rightarrow$ index číslující bázevé funkce

úplnost báze - každá funkce lze rozložit do báze

$$\phi(x) = \sum_j c_j f_j(x) \quad c_j \text{ komponenty fce } \phi$$

ortonormalita báze

Když máme v prostoru funkcí skalární součin $(,)$ je výhodné volit ortonormální bázi

$$(f_j, f_{j'}) = \int f_j(x) f_{j'}(x) dV = \delta_{jj'}$$

$\uparrow$ δ index

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Kroneckerovo } \delta \text{ na diskrétních indexech} \\ \delta\text{-fce na spojitých indexech} \end{array} \right.$

každá komponenta c_j lze vyjádřit

$$c_j = (f_j, \phi) = \int f_j(x) \phi(x) dV$$

ve skutečnosti díky ortonormalitě máme

$$(f_j, \phi) = (f_j, \sum_{j'} c_{j'} f_{j'}) = \sum_{j'} (f_j, f_{j'}) c_{j'} = \sum_{j'} \delta_{jj'} c_{j'} = c_j$$

relace úplnosti

úplnost báze lze charakterizovat rozkladem δ -funkce $\delta(x|x')$ (tj. rozkladem jednotkové matice ve zvolené bázi)

$$\delta(x|x') = \sum_j f_j(x) f_j(x')$$

ve skutečnosti aplikací δ -funkce na ϕ dostaneme rozklad ϕ

$$\phi(x) = \int \delta(x|x') \phi(x') dV' = \sum_j f_j(x) \int f_j(x') \phi(x') dV' = \sum_j c_j f_j(x)$$

prostor řešení Laplaceovy úlohy
řešíme

$\Delta \phi = 0$ + okrajové podmínky
nalezneme-li bázi řešení

$$\Delta f_j = 0$$

každé řešení bude tvaru

$$\phi = \sum_j c_j f_j$$

okrajové podmínky nemusí být příliš restriktivní
např. Dirichletovy podmínky $\Rightarrow \phi = 0$ triviální
uvážujeme např. f ce na oblasti s definovanou normou
(tj. ne diverguje na okraji)
nebo funkce splňující Dirichletovy podm. jsou řešde (viz příkl.)
ukázat, že jsme našli již úplnou bázi nemusí
být snadné - záleží na „funkcionálních technicitách“

systémů vlastních funkcí symetrického operátoru
vlastní funkce operátoru

$$L f_j(x) = \lambda_j f_j(x)$$

$$\text{např. } L = -\Delta$$

f_j vlastní funkce

λ_j vlastní číslo

j index číslování vlastních funkcí

systémů vlastních funkcí tvoří úplnou
ortonormální (při vhodné normalizaci) bázi

$$(f_j, f_{j'}) = \delta_{jj'}$$

$$\sum_j f_j(x) f_j(x') = \delta(x|x')$$

příměrka: komplexní funkce

často je výhodnější pracovat s prostory komplexních f ce
obecně lepší vlastnosti

nutno mírně modifikovat vzorce - přidání komplexního sdružení

$$(f, \psi) = \int f^*(x) \psi(x) dV$$

$$(f_j, f_{j'}) = \int f_j^*(x) f_{j'}(x) dV = \delta_{jj'}$$

$$c_j = (f_j, \phi) = \int f_j^*(x) \phi(x) dV$$

$$\sum_j f_j(x) f_j^*(x') = \delta(x|x')$$

Příklad: Laplaceův operátor v 1D

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} \quad \text{operátor}$$

$$L\phi(x) = \lambda\phi(x) \quad \text{rovnice pro vlastní funkce}$$

bez specifikace okrajových podmínek řeší

$$\sin(kx) \quad \cos(kx) \quad \exp(ikx) \quad \lambda = k^2$$

$$\operatorname{sh}(kx) \quad \operatorname{ch}(kx) \quad \exp(\pm kx) \quad \lambda = -k^2$$

$$a + bx \quad \lambda = 0$$

pozn: bez okrajových podmínek nemáme pozitivitu L
tj. vlastní číslo λ může být i nekladné

1) funkce na $\langle 0, a \rangle$ splňující Dirichletovy podmínky

$$\phi(0) = \phi(a) = 0$$

normalizovaná báze vlastních funkcí

$$\psi_m(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad m \in \mathbb{N} \quad \lambda = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$$

úplnost

$$\sum_m \frac{2}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x'}{a} = \delta(x-x')$$

ortonormalita

$$\int_0^a \frac{2}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m'\pi x}{a} dx = \delta_{mm'}$$

rozklad do Fourierovy řady

$$\phi(x) = \sum_m \tilde{\phi}_m \psi_m(x) \quad \tilde{\phi}_m = \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{m\pi x}{a} \phi(x) dx$$

2) funkce na $\mathbb{R}$ omezené v $\pm\infty$

normalizovaná báze (volíme komplexní místo $\sin, \cos$)

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ikx) \quad k \in \mathbb{R} \quad \lambda = k^2$$

úplnost

$$\int \psi_k(x) \psi_k^*(x') dk = \frac{1}{2\pi} \int \exp(ik(x-x')) dk = \delta(x-x')$$

ortonormalita

$$\int \psi_k^*(x) \psi_{k'}(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int \exp(i(k'-k)x) dx = \delta(k-k')$$

Fourierova transformace

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{\phi}(k) \exp(ikx) dk \quad \tilde{\phi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp(-ikx) \phi(x) dx$$

Metoda separace proměnných

Separace proměnných

řešení Laplaceovy úlohy je obecně složitý problém PDE
někdy lze zredukovat na problém s menším počtem proměnných
separace proměnných - oddělení proměnných na nezávislé problémy
funguje pro základní systémy ortogonálních souřadnic

dvě skupiny proměnných

$$\xi = \{\xi^i\} \quad \eta = \{\eta^k\}$$

multiplicativní separabilní ansatz

$$\phi(\xi, \eta) = A(\xi) B(\eta)$$

z této separaci dochází, pokud

$$f \Delta \phi = (K_\xi A)(\xi) B(\eta) + A(\xi) (L_\eta B)(\eta)$$

kde K_ξ diferenciální operátor v proměnných ξ
 L_η diferenciální operátor v proměnných η
 f nějaká vhodná funkce

$$\Downarrow \quad \frac{f}{\phi} \Delta \phi = \left(\frac{1}{A} K_\xi A \right)(\xi) + \left(\frac{1}{B} L_\eta B \right)(\eta) = 0$$

↑
průměrné hodnoty proměnných
nemohou se netriviálně vyrovnat
musí být rovně konstante

↑ řešíme Laplaceovu úlohu
 $\Delta \phi = 0$

↓

$$K_\xi A(\xi) = \kappa A(\xi) \quad L_\eta B(\eta) = \lambda B(\eta)$$

κ, λ se nazývají separační konstanty
musí splňovat $\kappa + \lambda = 0$

cílem je touto metodou dojít až k 1-dimenzionálnímu
problému, kdy rovnice, pro A či B jsou
obvyklé diferenciální rovnice

někdy lze dělat separaci více proměnných najednou

Separace proměnných pro vlastní fci

viz separaci pro $\Delta\phi = 0$

$$\Delta\phi = \mu\phi$$

$$\phi(\xi, \eta) = A(\xi) B(\eta)$$

necht' pro $f = k(\xi) + l(\eta)$ platí (včetně $f = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$)

$$f \Delta\phi = (K_\xi A)(\xi) B(\eta) + A(\xi) (L_\eta B)(\eta)$$

pro dif. oper K_ξ a L_η

$\Downarrow$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{A} K_\xi A - \mu k\right)(\xi)}_{=K} + \underbrace{\left(\frac{1}{B} L_\eta B - \mu l\right)}_{=\lambda} = 0$$

$$K + \lambda = 0$$

separace $\Rightarrow K, \lambda$ konst.

$\Downarrow$

$$\left[K_\xi - \mu k(\xi)\right] A(\xi) = K A(\xi) \quad \left[L_\eta - \mu l(\eta)\right] B(\eta) = \lambda B(\eta)$$

kde $K + \lambda = 0$

pro $K, \lambda = \text{konst}$ $K \leftarrow K + \mu k$ $\lambda \leftarrow \lambda + \mu l$

$$K_\xi A(\xi) = K A(\xi)$$

$$L_\eta B(\eta) = \lambda B(\eta)$$

kde $K + \lambda = \mu$

Kartézské souřadnice

$$\phi(x, y, z) = V(x, y) \neq 0$$

řešme

$$-\Delta \phi = 0$$

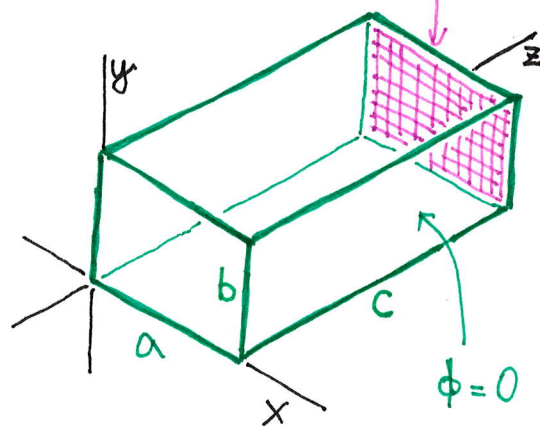
v kvádru $a \times b \times c$ podél souř. os

s Dirichletovými podmínkami

na všech stěnách mimo $z=c$

žde je potenciál zadán funkcí

$$\phi(x, y, z) = V(x, y)$$



Laplaciov operátor v kartézských souřadnicích

$$\Delta = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]$$

multiplicativní separabilní Ansatz

$$\phi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$$

$$-\frac{1}{\phi} \Delta \phi = -\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}$$

pro řešení $\Delta \phi = 0$ se máme členy separují a musí se rovnat konstantám $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ splňující

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

$$-\frac{d^2 X}{dx^2} = \alpha^2 X \quad -\frac{d^2 Y}{dy^2} = \beta^2 Y \quad -\frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2 Z$$

zřejmě, $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ nemohou být všechny kladné

Dirichletovy podmínky implikují pozitivitu

proto v jednom směru nemůžeme fixovat

Dirichletovy podmínky na obou stranách

směry x a y - Dirichletovy podmínky

$$X(0) = X(a) = 0 \Rightarrow X_m = \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right)$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$$

$$Y(0) = Y(b) = 0 \Rightarrow Y_n = \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

$$\beta_n = \frac{n\pi}{b}$$

$$\gamma_{m,n}^2 = -\alpha_m^2 - \beta_n^2 = -\frac{m^2 \pi^2}{a^2} - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} < 0$$

směr z

$$Z(0) = 0 \quad Z(c) \text{ neurčeno}$$

 $\gamma_{m,n}$ odpovídá vlastnímu číslu $\gamma_{m,n}^2 = -\alpha_m^2 - \beta_n^2$

$$\Downarrow \gamma_{m,n} = \text{sh}\left(\sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} z\right)$$

separované řešení (nenormované)

$$\psi_{m,n} \propto \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \text{sh}\left(\sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} z\right)$$

rozklad obecného řešení

$$\phi = \sum_{m,n} \frac{1}{\sqrt{ab}} \frac{c_{m,n}}{\text{sh}\left(\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2} c\right)} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \text{sh}\left(\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2} z\right)$$

↑ vhodné zvolené konstanty

podmínky na $z=c$

$$V(x,y) = \sum_{m,n} c_{m,n} \frac{2}{ab} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

z ortonormality fci $\sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right)$ resp. $\sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \Rightarrow$

$$c_{m,n} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \int_0^a \int_0^b V(x,y) \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) dy dx$$

memulový potenciál na všech stěnách

- superpozice předchozí úlohy s potenciálem
zadaným na jednotlivých stěnách

$$\phi = \text{[box 1]} + \text{[box 2]} + \text{[box 3]} + \text{[box 4]} + \text{[box 5]} + \text{[box 6]}$$

Sférické souřadnice

$$\Delta \phi = 0$$

regularita v úhlových směrech

libovolné chování pro $\pi \rightarrow 0$ a $\pi \rightarrow \infty$

Laplaceův operátor $\Delta_S \phi$ - Laplace na sféře S_2

$$\Delta \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right]$$

separace radiální a úhlových souřadnic

$$\phi = R(r) Y(\vartheta, \varphi)$$

$$\Downarrow \frac{r^2}{\phi} \Delta \phi = \underbrace{\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right)}_{\text{závisí pouze na } r} + \underbrace{\frac{1}{Y} \Delta_{S_2} Y}_{\text{závisí na } \vartheta, \varphi} = 0$$

$\uparrow$ - Laplaceova úloha
 $\leftarrow$ separační konstanty

$$\Downarrow \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = c R \quad -\Delta_{S_2} Y = c Y$$

radiální rovnice $\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = c R$

řeší obecně mocnina r^l

r^l a $r^{-(l+1)}$ dává stejné vlastní číslo $c = l(l+1)$

tj. řešení pro $c = l(l+1)$

$$R = r^l \quad R = r^{-(l+1)}$$

má regularita v $r=0$ a $r \rightarrow \infty$

úhlová rovnice $-\Delta_{S_2} Y = c Y$

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + l(l+1) Y = 0$$

separace proměnných ϑ a φ

$$Y(\vartheta, \varphi) = P(\vartheta) E(\varphi)$$

$$\Downarrow \frac{\sin^2 \vartheta}{Y} [\dots] = \underbrace{\frac{1}{P} \left(\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) + l(l+1) \sin^2 \vartheta P \right)}_{\text{závisí pouze na } \vartheta} + \underbrace{\frac{1}{E} \frac{d^2 E}{d\varphi^2}}_{-m^2} = 0$$

m^2

$$\Downarrow \sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} P \right) + l(l+1) \sin^2 \vartheta P = m^2 P$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \mathcal{E} = -m^2 \mathcal{E}$$

rovnice ve směru φ

$\Downarrow$ periodicita pro $\varphi = 0, 2\pi$

$$\mathcal{E} = \exp(im\varphi) \quad m \in \mathbb{Z}$$

rovnice ve směru ϑ

$$\xi = \cos \vartheta \quad \frac{d}{d\vartheta} = \frac{d\xi}{d\vartheta} \frac{d}{d\xi} = -\sin \vartheta \frac{d}{d\xi} \quad \sin^2 \vartheta = 1 - \xi^2$$

$$\Downarrow \frac{d}{d\xi} \left((1 - \xi^2) \frac{d}{d\xi} P \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right) P = 0$$

zobecněná Legendreova rovnice

řešení: přidružené Legendreovy funkce $P_l^m(\xi)$

regularita pro $\vartheta = 0, \pi$ a $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$$l = 0, 1, 2, \dots \quad l \geq |m|$$

regulární řešení - přidružené Legendreovy "polynomy"

$$P_l^m(\cos \vartheta) \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad m = -l, \dots, l$$

řešení v úhlovém sektoru ϑ, φ resp. $\vec{e}$

kulové funkce, též sférické harmoniky

$$Y_l^m(\vec{e}) \equiv Y_l^m(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) \exp(im\varphi)$$

jsou to vlastní funkce operátorů $-\Delta_{S_2}$ a $-\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$

$$-\Delta_{S_2} Y_l^m = l(l+1) Y_l^m$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} Y_l^m = m^2 Y_l^m$$

tvorí ortonormální bázi funkcí na S_2

funkce na S_2

funkce úhlu ϑ, φ

funkce smírového vektoru $\vec{e}$

$$\vec{e} = \sin\vartheta \cos\varphi \vec{e}_x + \sin\vartheta \sin\varphi \vec{e}_y + \cos\vartheta \vec{e}_z$$

skalární součin

$$(f, g) = \int_{S_2} f(\vec{e})^* g(\vec{e}) d\Omega = \int_{\substack{\vartheta \in (0, \pi) \\ \varphi \in (0, 2\pi)}} f(\vartheta, \varphi)^* g(\vartheta, \varphi) \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

ortonormalita kulových fun

$$\int Y_l^m(\vec{e})^* Y_{l'}^{m'}(\vec{e}) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

relace úplnosti

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\vec{e}) Y_l^m(\vec{e}')^* = \delta^{(2)}(\vec{e}|\vec{e}')$$

zde $\delta^{(2)}(\vec{e}|\vec{e}')$ je δ -fce na S_2 , tj.

$$\int \delta^{(2)}(\vec{e}|\vec{e}') f(\vec{e}') d\Omega' = f(\vec{e})$$

$$\delta^{(2)}(\vec{e}|\vec{e}') = \frac{1}{\sin\vartheta} \delta(\vartheta - \vartheta') \delta(\varphi - \varphi')$$

Řešení Laplaceovy úlohy v 3D $\begin{matrix} l=0, 1, \dots \\ m=-l, \dots, l \end{matrix}$

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^{l+1}} Y_l^m(\vartheta, \varphi) \quad \text{člen multipólového rozvoje}$$

regulární (klesající) v $r = \infty$

neregulární v $r = 0$ - zde očekáváme zdroje
tj. zde nebude platit $\Delta\phi = 0$

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = r^l Y_l^m(\vartheta, \varphi) \quad \text{člen tzv. vnitřního multipólového rozvoje}$$

regulární v $r = 0$

neregulární (rostoucí) v $r = \infty$

vhodné pro popis pole kolem $r = 0$ od vzdálených zdrojů

Cylindrické souřadnice

$$\Delta \phi = 0$$

regularita v úhlovém směru φ

omezenost podél osy z

libovolné chování pro $R \rightarrow 0$ $R \rightarrow \infty$

Laplaciov operátor

$$\Delta \phi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

separace souřadnice z a polárních souřadnic R, φ

$$\phi = \psi(R, \varphi) Z(z)$$

$$\Downarrow \frac{1}{\phi} \Delta \phi = \frac{1}{\psi} \left(\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d\psi}{dR} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2} \right) + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} \stackrel{\text{Laplacova úloha}}{=} 0$$

$$\Downarrow \underbrace{\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d\psi}{dR} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2}}_{\text{závisí pouze na } R, \varphi \rightarrow -k^2} = \underbrace{-\frac{d^2 Z}{dz^2}}_{\text{závisí na } z \rightarrow k^2} \quad \text{separační konst.}$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = k^2 Z$$

separace R a φ

$$\psi = R(R) E(\varphi)$$

$$\Downarrow \frac{R^2}{\psi} [\dots] = \underbrace{\frac{1}{R} \left(R \frac{d}{dR} \left(R \frac{dR}{dR} \right) + k^2 R^2 R \right)}_{\text{závisí pouze na } R} + \underbrace{\frac{1}{E} \frac{d^2 E}{d\varphi^2}}_{\text{závisí pouze na } \varphi} \stackrel{\text{separační konst.}}{=} 0$$

$$\Downarrow -\frac{d^2 E}{d\varphi^2} = m^2 E$$

$$R \frac{d}{dR} \left(R \frac{dR}{dR} \right) + (k^2 R^2 - m^2) R = 0$$

Besselova rovnice

separované funkce

$$Z \rightarrow \exp(\pm kz)$$

$$E \rightarrow \exp(im\varphi)$$

$$R \rightarrow \text{Besselovy funkce}$$

translační symetrie podél osy z

omezíme se pouze na speciální případ, kdy nic
nezávisí na souřadnici z
odpovídá volbě $k=0$ $Z=1$

radiální rovnice

$$R \frac{d}{dR} \left(R \frac{dR}{dR} \right) = m^2 R$$

řešení

$$R = \begin{cases} R^{\pm m} & m \neq 0 \\ 1, \ln R & m = 0 \end{cases}$$

úloha uvnitř uzemněného vodivého klínu

$$\phi(R, \varphi) = R(R) \mathcal{E}(\varphi)$$

okrajové podmínky

$$\mathcal{E}(0) = \mathcal{E}(\alpha) = 0$$

$$\mathcal{E}(\varphi) = \sin\left(\frac{m\pi}{\alpha} \varphi\right) \quad m = \frac{m\pi}{\alpha} \quad m \in \mathbb{N}$$

regularita pro $R=0$

$$R = R^m = R^{\frac{m\pi}{\alpha}} \quad (R^{-m} \text{ diverguje u } R=0)$$

obecné řešení

$$\phi = \sum_n c_n R^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha} \varphi\right)$$

dominantní chování

blízko osy je dominantní člen $n=1$

$$\phi \approx c_1 R^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right)$$

$$\vec{E} \approx -\frac{\pi}{\alpha} c_1 R^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \left(\sin \frac{\pi \varphi}{\alpha} \vec{e}_R + \cos \frac{\pi \varphi}{\alpha} \vec{e}_\varphi \right)$$

$$= -\frac{\pi}{\alpha} c_1 R^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \left(\sin\left(\left(\frac{\pi}{\alpha}-1\right)\varphi\right) \vec{e}_x + \cos\left(\left(\frac{\pi}{\alpha}-1\right)\varphi\right) \vec{e}_y \right)$$

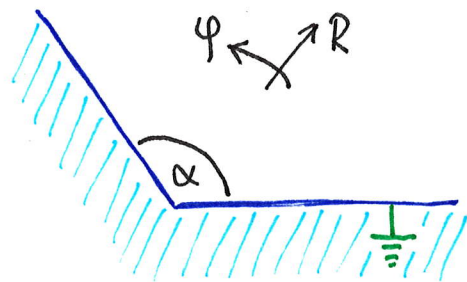
ostrý úhel $\alpha < \pi$ $R^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \approx 0$ pro $R \rightarrow 0$

tupý úhel $\alpha > \pi$ $R^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \rightarrow \infty$ pro $R \rightarrow 0$

$\Rightarrow$ silné pole u "špičatého" útvaru

obecné chování

c_n závisí na rozložení zdrojů daleko od osy (viz příkl.)



Rozklad do vlastních funkcí

Báze vlastních funkcí

mějme bázi vlastních funkcí Laplaceova oper.
na nějaké oblasti s Dirichletovými podmínkami

$$-\Delta \psi_j(x) = \lambda_j \psi_j(x)$$

ψ_j úplný ortonormální systém
 λ_j kladné vlastní čísla

Funkce Laplaceova operátoru $F[-\Delta]$ lze definovat

$$F[-\Delta] \psi_j(x) = F(\lambda_j) \psi_j(x)$$

↑ funkce aplikované na vlastní číslo
↑ funkce aplikovaná na Laplaceův operátor
na obecnou funkci ϕ

$$\phi(x) = \sum_j c_j \psi_j(x) \quad c_j = \int \psi_j^*(x') \phi(x') dV'$$

lze působení $F[-\Delta]$ zapsat

$$F[-\Delta] \phi(x) = \sum_j c_j F[-\Delta] \psi_j(x) = \sum_j c_j F(\lambda_j) \psi_j(x) =$$

$$= \int \sum_j \psi_j(x) F(\lambda_j) \psi_j^*(x') \phi(x') dV'$$

integrální jádro operátoru $F[-\Delta]$ tedy je

$$F[-\Delta](x|x') = \sum_j \psi_j(x) F(\lambda_j) \psi_j^*(x')$$

připomínka: integrální jádro $L(x|x')$ operátoru L splňuje

$$(L\phi)(x) = \int L(x|x') \phi(x') dV'$$

Laplaceův operátor (tj. $F(\lambda) = \lambda$ $F[-\Delta] = -\Delta$)

$$-\Delta(x|x') = \sum_j \psi_j(x) \lambda_j \psi_j^*(x')$$

Greenova funkce Laplaceova operátoru (tj. $F(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ $F[-\Delta] = (-\Delta)^{-1} = G$)

$$G(x|x') = \sum_j \psi_j(x) \frac{1}{\lambda_j} \psi_j^*(x')$$

jednotkový operátor (tj. $F(\lambda) = 1$ $F[-\Delta] = \delta$)

$$\delta(x|x') = \sum_j \psi_j(x) \psi_j^*(x')^* \quad \text{relace úplnosti}$$

Príklad: Greenova funkcia v uzamknutom kvádri
vlastní funkcie

$$-\Delta \psi = k^2 \psi$$

separace proměnných - viz řešení $\Delta \phi = 0$ dříve

$$\psi = X(x) Y(y) Z(z)$$

$$\Downarrow \quad -\frac{d^2 X}{dx^2} = \alpha^2 X \quad -\frac{d^2 Y}{dy^2} = \beta^2 Y \quad -\frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2 Z$$

kde separační konstanty tentokrát splňují

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = k^2$$

Dirichletovy okrajové podmínky $\Rightarrow$

$$X(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \quad \alpha = \frac{\pi m}{a} \quad m \in \mathbb{N}$$

$$Y(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad \beta = \frac{\pi n}{b} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$Z(z) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sin\left(\frac{l\pi}{c} z\right) \quad \gamma = \frac{\pi l}{c} \quad l \in \mathbb{N}$$

vlastní funkcie Laplaceova operátoru

$$\psi_{m,n,l} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{abc}} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{l\pi}{c} z\right)$$

vlastní číslo

$$k^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{c}\right)^2$$

ortonormalita

$$\int \psi_{m,n,l}^*(X) \psi_{m',n',l'}(X) dV = \delta_{mm'} \delta_{nn'} \delta_{ll'}$$

úplnost

$$\sum_{m,n,l} \psi_{m,n,l}(X) \psi_{m,n,l}^*(X') = \delta(X|X')$$

Greenova funkcie

$$G(X|X') = \sum_{m,n,l} \frac{1}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{c}\right)^2} \psi_{m,n,l}(X) \psi_{m,n,l}^*(X')$$