Magnetostatika

Tok náboje.

Hustota toku a proud, zákon zachování, konvekční proud. Stacionární situace. Singulární zdroje - plošné proudy a tenké vodiče. Rozložení proudů ve vodičích, přesun energie. Ohmické vodiče, Ohmův zákon, odpor prostředí, Jouleovo teplo. Elektrické pole stacionárních proudů ve vodičích, potenciálová úloha, elektromotorická síla.

Formulace magnetostatiky.

Rovnice magnetostatiky, Lorentzova síla. Magnetická indukce, indukční čáry, magnetický tok, Ampérův zákon, bezdivergentní charakter čar. Plošné zdroje. Vektorový potenciál, podmínka existence, nejednoznačnost potenciálu, kalibrační volnost, kalibrační podmínka. Poissonova úloha pro vektorový potenciál, řešení. Biotův-Savartův zákon, varianta pro tenké vodiče.

Systémy smyček.

Pole smyček, skalární magnetický potenciál, Laplaceova úloha pro magnetický potencál, nejednoznačnost potenciálu. Ampérův zákon pro sílu, symetrie působení. Indukčnost, magnetický tok od smyčky, matice indukčnosti, samoindukčnost, aproximace tenkého vodiče.

Multipólový rozvoj.

Multipólový rozvoj vektorového potenciálu. Dipólový člen, pole dipólu, kanonická reprezentace dipólu. Síla a moment síly na magnetický dipól ve vnějším poli. Dipól-dipólová interakce.

Kvazistacionární přiblížení.

Elektromotorická síla, Faradayův zákon I - kvazistacionární přiblížení pro pomalu měnící se magnetická pole, Faradayův zákon II - pohyb smyčky v magnetickém poli. Lenzovo pravidlo. Magnetická síla nekoná práci. Energie magnetického pole smyček. Relaxace náboje ve vodiči, rovnice difuze pro pole a proudy, skin efekt.

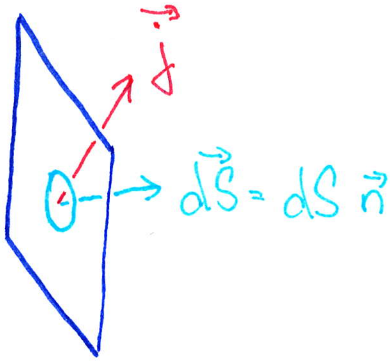
Tok náboje

hustota toku náboje

$\vec{j}$ množství náboje / čas / plochu + směr toku

proud skrze plochu S

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$



zákon zachování náboje

náboj nevzniká a nezaniká
pouze se přemisťuje

oblast V (neměnná v čase) - změna za čas dt

$$\frac{dQ_{uvnitř}}{dt} = -I_{ven}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = -\oint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

⇐ konstantnost V v čase
Gaussova věta

$$\Downarrow$$

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \right) dV = 0$$

⇐ platí pro každou oblast V

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

rovnice kontinuity - diferenciální verze zákona zach.

konvekční proud

$\vec{j} = \rho \vec{v}$ pohyb nabitého média rychlostí $\vec{v}$

vícesložkové médium

$\rho = \sum_j \rho_j$ $\vec{j} = \sum_j \rho_j \vec{v}_j$

může být $\rho = 0$ a $\vec{j} \neq 0$

stacionární situace

žádná veličina $\rho, \vec{j}, \vec{E}, \vec{B}$ nezávisí na čase

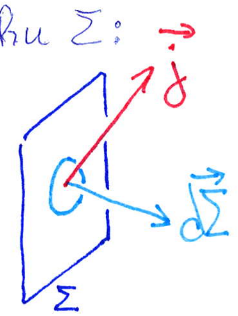
může zahrnovat pohyb náboje – tok – ale konstantní v čase

rovnice kontinuity ⇒

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$

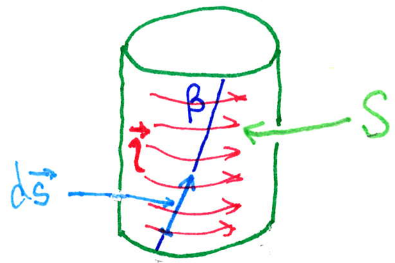
singulární zdroje

regulární proudová hustota → proud přes plochu Σ: $I = \int_\Sigma \vec{j}\cdot d\vec{\Sigma}$



$\vec{j}$ hladké vektorové pole

plošné proudy



$$\vec{j}(X) = \vec{\imath}(X)\,\delta_S(X)$$

S plocha $\quad \vec{\imath}$ tečné k S

distribuce δ_S lokalizuje integraci na 2D plochu S

$$\int \varphi\,\vec{j}\,dV = \int_S \varphi\,\vec{\imath}\,dS$$

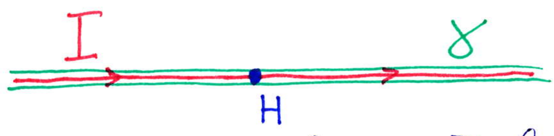
φ testovací fce

krátce:

$$\vec{j}\,dV \to \vec{\imath}\,dS$$

proud přes křivku β: $I = \int_\beta |\vec{\imath}\times d\vec{s}|$

tenké vodiče



$$\vec{j}(X) = I\,\vec{e}_\gamma\,\delta_\gamma(X)$$

distribuce lokalizující na křivku γ

jednotkový tečný vektor

proud ve vodiči

$$\int \varphi\,\vec{j}\,dV = \int_\gamma \varphi\, I\, d\vec{s}$$

$d\vec{s} = \vec{e}_\gamma\, ds$

proud přes bod H: I

krátce

$$\vec{j}\,dV \to I\,d\vec{s}$$

zákon zachování + stacionarita ⇒ $\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$

$$0 = \int \varphi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{j}\,dV = -\int (\vec{\nabla}\varphi)\cdot\vec{j}\,dV = -\int I(\vec{\nabla}\varphi)\cdot d\vec{s} = \int \varphi(\vec{\nabla} I)\cdot d\vec{s}$$

⇒ $\vec{e}_\gamma\cdot\vec{\nabla} I \equiv \frac{d}{ds} I = 0$ ⇒ I konstantní podél γ

Rozložení proudů ve vodičích

jaké je konkrétní rozložení toku náboje ve vodiči?
obecně složitá materiálová fyzika
závisí i na nestacionárních jevech (způsob přípravy)
standardní speciální případy

- volný pohyb nabitých částic v mag. poli
  řešíme pohybovou rovnici částic pod vlivem EM pole
  např. spirálový pohyb nabité částice v homog. mag. poli
  vede např. k řešení pohybu plazmatu v EM poli
- supravodiče
  pohyb nosičů náboje bez odporu v prostředí
  ve stacionárním přiblížení volné náboje v supravodiči vždy stihnou vyrovnat jakékoli elektrické pole
  tj $\vec{E}=0$ v supravodiči - nekonečná vodivost (viz dále)
- ohmické vodiče
  nosiče nábojů se pohybují s odporem v prostředí vodiče

Přesun energie mezi EM polem a nosiči náboje

EM pole koná práci na nosičích náboje
- dodává se energie nosičům
- odebírá se energie EM poli

vícesložkový proud $\vec{j} = \sum_k \varrho_k \vec{v}_k$

ϱ_k a $\vec{v}_k$ hustota a rychlost k-té složky

objemová hustota práce na nosičích za čas dt

$$dW = \sum_k \vec{f}_k \cdot d\vec{s}_k = \sum_k \varrho_k (\vec{E} + \vec{v}_k \times \vec{B}) \cdot \vec{v}_k \, dt = \Big(\sum_k \varrho_k \vec{v}_k\Big) \cdot \vec{E} \, dt = \vec{j} \cdot \vec{E} \, dt$$

rychlost přesunu energie (obj. hustota) $w = \frac{dW}{dt}$

$$w = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

= obj. hustota výkonu EM pole na nosičích náboje
= obj. hustota rychlosti úbytku EM energie

Ohmické vodiče

volné nosiče náboje (elektrony) v prostředí působícím odpor
(kovy: nepohyblivé ionty, plazma: těžké pomalé ionty, ...)

na volné nosiče náboje působí
- EM síla
- odpor prostředí
- restrikce materiálu (hranice vodiče)

Lokální Ohmův zákon
v ohmických vodičích se ustálí stacionární rovnováha kdy proud je korelován s intenzitou elektrického pole
$\vec{j} = \gamma \vec{E}$ γ vodivost $\varkappa = \frac{1}{\gamma}$ měrný odpor
typicky způsobené vyrovnáním elektr. a odporové síly

Drudeův model
klasický model vysvětlující odporovou sílu jako srážky nosičů náboje s prostředím
pohybová rovnice:
$$\frac{d}{dt}\Delta\vec{p} = \Delta\vec{f}_E + \Delta\vec{f}_{odpor}$$
stacionarita: $\frac{d}{dt}\Delta\vec{p} = 0$
elektrické působení je dominantní $\Delta\vec{f}_E = \Delta Q \vec{E}$
odporová síla úměrná rychlosti $\Delta\vec{f}_{odpor} = -\frac{1}{\tau}\Delta\vec{p}$
τ je charakteristická doba mezi srážkami
daná tepelným pohybem nosičů náboje $v_{term} \gg v_{proud}$
vyjádřeno pomocí hustot na částici $m = \frac{\Delta M}{\Delta N}$ $q = \frac{\Delta Q}{\Delta N}$ a hust. část. $\nu = \frac{\Delta N}{\Delta V}$
hybnost $\Delta\vec{p} = \Delta M \vec{v} = m \Delta N \vec{v}$
proud $\Delta\vec{J} = \vec{j}\Delta V = \Delta Q \vec{v} = q \Delta N \vec{v} = \nu q \vec{v} \Delta V$
$\Downarrow$
$$0 = \Delta Q \vec{E} - \frac{1}{\tau}\Delta\vec{p}$$
$\Downarrow$
$$\vec{E} = \frac{m\Delta N}{\tau}\frac{1}{q\Delta N}\vec{v} = \frac{m}{\nu q^2 \tau}\vec{j} \Rightarrow \vec{j} = \gamma\vec{E} \qquad \gamma = \frac{\nu q^2 \tau}{m}$$
$$\frac{\Delta\vec{f}_{odpor}}{\Delta Q} = -\frac{1}{\tau}\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta Q} = -\frac{m}{\nu q^2 \tau}\vec{j} = -\varkappa\vec{j}$$

Jouleovo teplo
odporová síla přeměňuje energii dodanou EM polem nosičům náboje na termální energii vodiče
$$w_{Joule} = \vec{j}\cdot\vec{E}$$

Elektrické pole pro stacionární proudy ve vodičích

Maxwellovy rovnice

$\vec\nabla\cdot\vec E = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho \qquad \vec\nabla\times\vec E = 0$

materiálové vztahy

$\vec j = \gamma\vec E$ uvnitř ohmického vodiče

$\vec\nabla\cdot\vec j = 0$ stacionarita

$\gamma = \text{konst}$ homogenní ohmický vodič

uvnitř vodiče

$0=\vec\nabla\cdot\vec j = \gamma\,\vec\nabla\cdot\vec E = \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\varrho \Rightarrow \varrho=0$ uvnitř homog. vodiče

propustná hranice mezi dvěma vodiči s vodiv. γ_+ a γ_-

$\vec\nabla\cdot\vec j=0 \Rightarrow \vec n\cdot(\vec j_+-\vec j_-)=0 \Rightarrow \gamma_+\vec n\cdot\vec E_+ = \gamma_-\vec n\cdot\vec E_-$

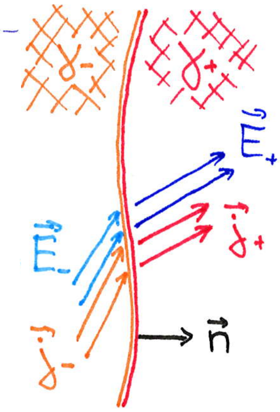
$\vec\nabla\cdot\vec E = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho \Rightarrow \vec n\cdot(\vec E_+-\vec E_-)=\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma$

obecně nenulová hustota náboje na rozhraní odpovídající "nehomogennosti" vodivosti

$\vec\nabla\times\vec E=0 \Rightarrow \vec n\times(\vec E_+-\vec E_-)=0 \Rightarrow \frac{1}{\gamma_+}\vec n\times\vec j_+ = \frac{1}{\gamma_-}\vec n\times\vec j_-$

spojitost tangenciálních složek intenzity

nespojitost proudů podél hranice



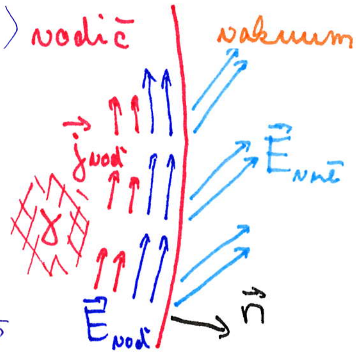
nepropustná hranice vodiče (hranice s vakuem)

$\vec n\cdot\vec j_{vod}=0 \Rightarrow \vec n\cdot\vec E_{vod}=0$

$\vec\nabla\times\vec E=0 \Rightarrow \vec n\times(\vec E_{vně}-\vec E_{vod})=0$

spojité tangenciální složky intenzity

$\vec\nabla\cdot\vec E = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho \Rightarrow \vec n\cdot(\vec E_{vně}-\vec E_{vod}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma \Rightarrow \vec n\cdot\vec E_{vně}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma$



na hraně vodiče se obecně ustálí plošná hustota náboje "zajišťující" konzistentní ohmické pole a tok uvnitř vodiče

další detaily pro elektr. pole a proud uvnitř ohmick. vodiče

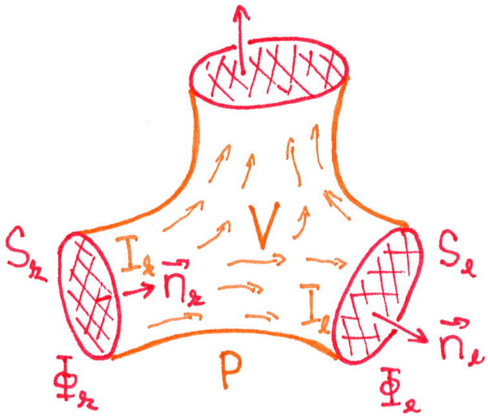
- poznámky o elektromotorické síle dále
- příklady na cvičení
- formulace potenciálové úlohy – následuje

Potenciál uvnitř homogenního vodiče

- homog. ohmický vodič v oblasti V
- ideálně vodivé elektrody S_k
- nepropustná hranice vodiče P

$$\partial V = P + \sum_k \pm S_k$$

↑ orientace normály



proud přes elektrodu

$$I_k = \int_{S_k} \vec j\cdot d\vec S = \gamma \underbrace{\int_{S_k} \vec E\cdot d\vec S}_{}$$ tok elektrického pole

rovnice pro potenciál

$$\Delta \phi = 0 \qquad \Leftarrow \quad \rho = 0 \text{ uvnitř vodiče}$$

elektrody S_k

$\phi|_{S_k} = \Phi_k$ konst. hodnota na ideálně vodivé elektrodě

$V_{kl} = \Phi_k - \Phi_l$ napětí mezi elektrodami

nepropustná hranice vodiče P

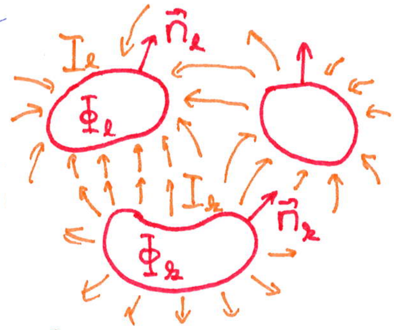
$\frac{\partial \phi}{\partial \vec n} = 0$ Neumannovy okr. podm. $\Leftarrow \vec n \cdot \vec E_{vod}|_P = 0$

⇓ Laplaceova úloha se smíšenými okr. podm.

→ jednoznačné řešení

Rozsáhlý vodič (vyplňující celý prostor či velkou dutinu s uzemněn. ideálně vod. okrajem) s elektrodami uvnitř

matematicky stejná úloha jako pro kapacity



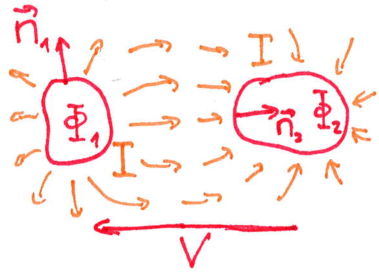
kapacita: $\sum_l C_{kl} \Phi_l = Q_k = \varepsilon_0 \int_{S_k} \vec E \cdot d\vec S$

vodič: $\sum_l \Gamma_{kl} \Phi_l = I_k = \gamma \int_{S_k} \vec E \cdot d\vec S$

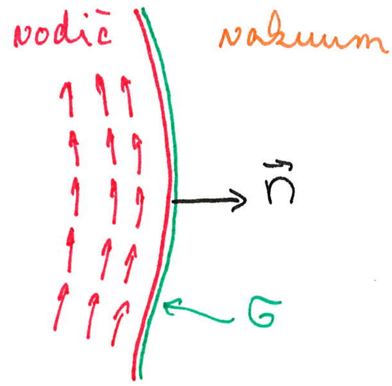
$\Rightarrow \Gamma_{kl} = \frac{\gamma}{\varepsilon_0} C_{kl}$ matice vodivosti

Př: 2 elektrody s proudem I mezi nimi

$\underset{\varepsilon_0 \text{ tok}}{Q} = C(\Phi_1 - \Phi_2)$ $\quad \underset{\gamma \text{ tok}}{I} = \frac{1}{R}(\Phi_1 - \Phi_2)$ $\quad \Rightarrow \quad CR = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$



Potenciál vně vodičů



$$\Delta\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho_{vně}$$

neprůpustná hranice vodičů

$$-\frac{\partial\phi_{vně}}{\partial\vec{n}} = \vec{n}\cdot\vec{E}_{vně} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma$$

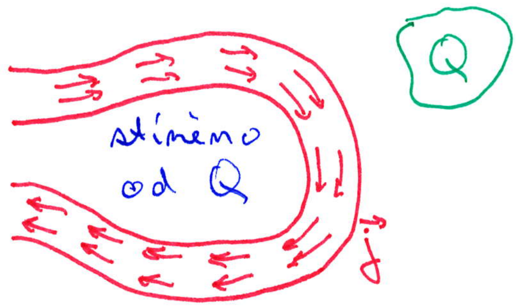
$\vec{t}\cdot\vec{\nabla}\phi_{vod} = \vec{t}\cdot\vec{\nabla}\phi_{vně}$ $\quad$ $\vec{t}$ tečný k hranici

$\Downarrow$

ϕ spojité na hranici, ale obecně nehladký (skok v normálové derivaci)

vyřešení úlohy ve vodičích $\Rightarrow$
zadá hodnotu potenciálu na okraji pro úlohu vně vod.

dutina ve vodiči ve kterém teče proud
žádné náboje v dutině



$\Downarrow$

$\Delta\phi_{dut.} = 0$ $\qquad$ $\phi_{dut.}\big|_{hranice} = \phi_{vod}\big|_{hranice}$

$\Downarrow$ jednoznačnost řešení

nezávisí na rozložení nábojů vně vodiče (pokud nezmění proudy ve vodiči)

Elektromotorická síla (EMS)

(není síla, též elektromotorické napětí)

proč teče proud v ohmickém vodiči proti odporové síle?
pro stacionaritu proudu je potřeba zdroj
zdroj - síla působící někde v obvodu na náboj
- chemický (baterie)
- mechanický (piezokrystaly)
- elektromagnetický = EM za hranicí stacionarity (generátory, EM indukce)

charakteristika zdroje = úhrnný účinek zdroje v celé smyčce
= elektromotorická síla zdroje

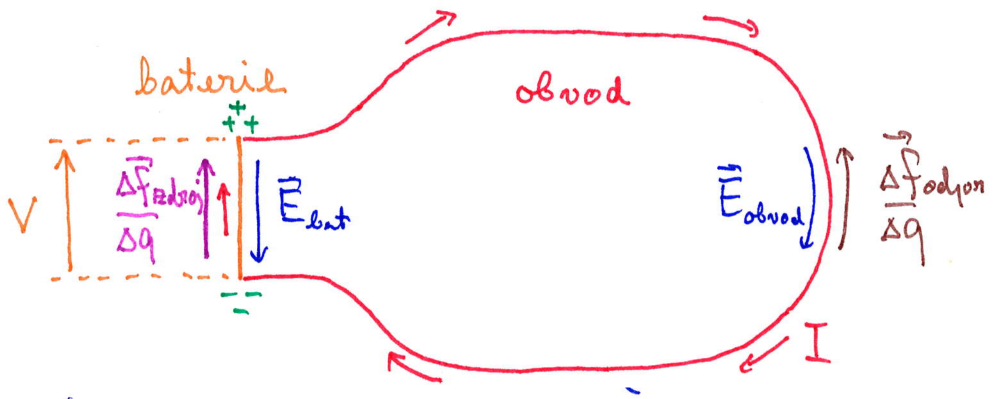
$$\mathcal{E} = \int_\gamma \frac{\Delta \vec{f}_{zdroj}}{\Delta q} \cdot d\vec{s}$$

$d\vec{s}$ – směr podél smyčky γ

$\frac{\Delta \vec{f}_{zdroj}}{\Delta q}$ – síla zdroje podél smyčky na jednotkový náboj

= práce zdroje podél smyčky na jednotkový náboj

obvod se zdrojem a ohmickým vodičem



rovnováha v baterii

$$\vec{E}_{bat} + \frac{\Delta \vec{f}_{zdroj}}{\Delta q} = 0$$

napětí baterie

$$V = -\int_{bat} \vec{E}_{bat} \cdot d\vec{s} = \int_\gamma \frac{\Delta \vec{f}_{zdroj}}{\Delta q} \cdot d\vec{s} = \mathcal{E}$$

lokalizované pouze v bat.

rovnováha ve vodiči

$$\vec{E}_{obvod} + \frac{\Delta \vec{f}_{odpor}}{\Delta q} = 0$$

Ohmův zákon

$$\frac{\Delta \vec{f}_{odpor}}{\Delta q} = -\varkappa \vec{j}$$

$\Downarrow \int_{příčez} \cdot d\vec{S}$

$$\int_{příčez} \vec{E}_{obv.} \cdot d\vec{S} = \varkappa \int_{příčez} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \varkappa I$$

$\Downarrow \int_{vodič} ds$

$$S \int_{vodič} \vec{E}_{obv.} \cdot d\vec{s} = \varkappa I \int_{vodič} ds = \varkappa l I$$

$\Downarrow$

$$V = RI \qquad R = \frac{\varkappa l}{S}$$

Formulace magnetostatiky

Maxwellovy rovnice ve stacionární situaci

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j} \qquad \mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$$

Lorentzova magnetická síla

hustota síly vnějšího pole $\vec{B}$ na tok $\vec{j}$

$$\vec{f} = \vec{j}\times\vec{B} = \underset{\uparrow}{\varrho \vec{v}}\times\vec{B}$$

konvekční proud

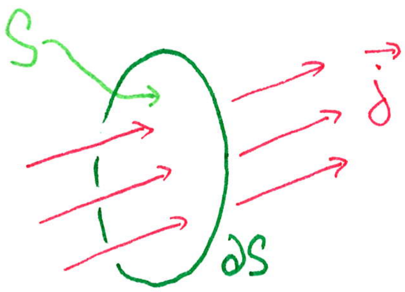
indukční čáry

orbity magnetické indukce $\vec{B}$

magnetický tok skrze plochu S

měří "množství" indukčních čar

$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$



Ampérův zákon

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} \qquad \Big/ \int_S d\vec{S}$$

$$\Downarrow \quad \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

$\Leftarrow$ Stokesova věta + definice proudu

$$\Downarrow \quad \int_{\partial S} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

proud skrze S působí cirkulaci $\vec{B}$ okolo ∂S

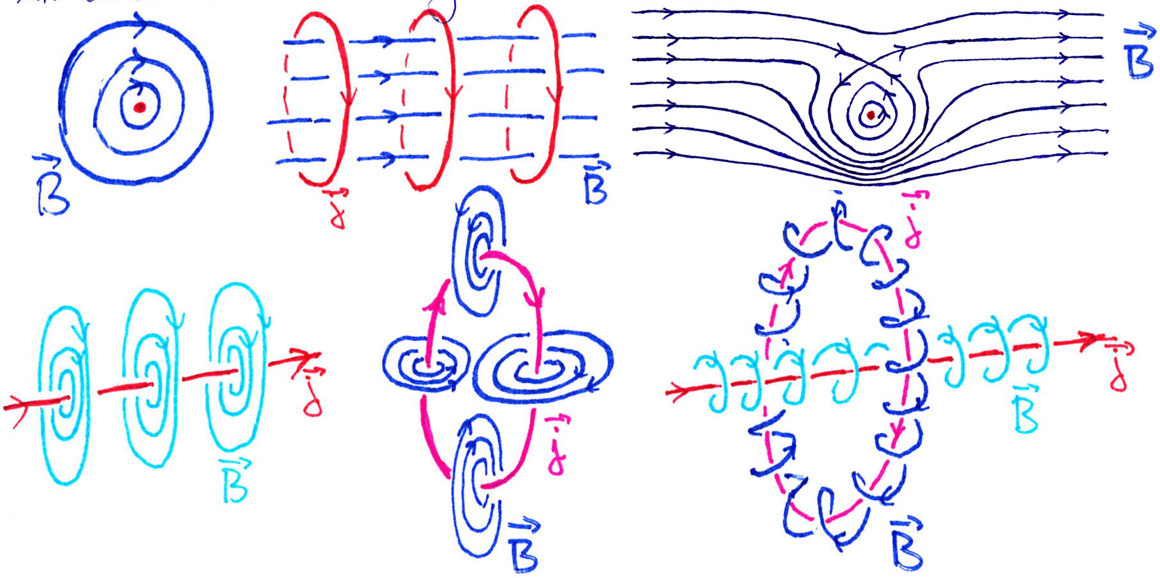
Magnetická indukce je bezdivergentní

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

neexistují magnetické monopóly

lokalizované magnetické zdroje mají dipólový charakter

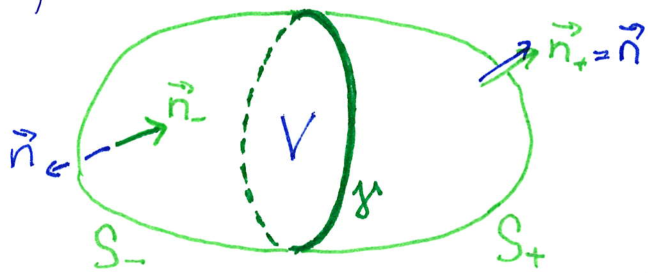
indukční čáry nezačínají a nekončí



tok magnetického pole nezávisí na výběru plochy napnuté na smyčce

$\gamma = \partial S_- = \partial S_+$

$\partial V = -S_- \cup S_+ \qquad \vec{n} = \pm\vec{n}_\pm$



$$0 = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\, dV = \int_{\partial V = -S_-\cup S_+} \vec{B}\cdot d\vec{S} =$$

$$= -\int_{S_-} \vec{B}\cdot d\vec{S}_- + \int_{S_+} \vec{B}\cdot d\vec{S}_+ = -\Psi_{S_-} + \Psi_{S_+}$$

$\Downarrow$

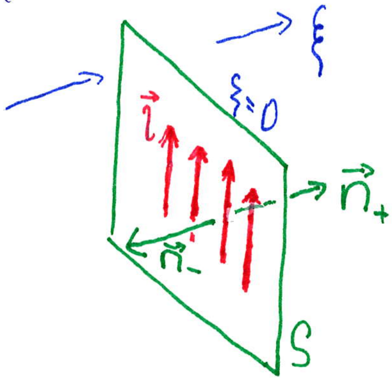
$$\Psi_{S_-} = \Psi_{S_+}$$

Magnetická indukce pro plošné zdroje

uvažujme tok typu

$$\vec{j} = \vec{j}_{3D} + \vec{j}_{2D} \qquad \vec{j}_{2D} = \vec{\imath}\,\delta_S$$

plošný zdroj indukuje nespojitost v $\vec{B}$



$$\vec{B} = \vec{B}_- \chi_- + \vec{B}_+ \chi_+$$

$$S = -\partial V_- = \partial V_+$$

platí

$$\vec{\nabla} \chi_\pm = \vec{n}_\pm \delta_S$$

vskutku

$$\vec{\nabla} \chi_+ = \vec{\nabla}\Theta(\xi) = \delta(\xi)\vec{\nabla}\xi = h_\xi^{-1}\delta(\xi)\vec{n}_+ = \delta_S \vec{n}_+$$

podmínky navázání

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_-)\chi_- + (\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_+)\chi_+}_{\text{klasické derivace}} + \underbrace{\vec{B}_-\cdot\vec{n}_-\,\delta_S + \vec{B}_+\cdot\vec{n}_+\,\delta_S}_{(\vec{B}_+-\vec{B}_-)\cdot\vec{n}_+\,\delta_S}$$

$$\Downarrow \qquad \Rightarrow (\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_-)\chi_- + (\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_+)\chi_+ = 0 \qquad \Rightarrow (\vec{B}_+-\vec{B}_-)\cdot\vec{n} = 0$$

$$(\vec{B}_+-\vec{B}_-)\cdot\vec{n} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = (\vec{\nabla}\times\vec{B}_-)\chi_- + (\vec{\nabla}\times\vec{B}_+)\chi_+ + (\vec{n}_-\times\vec{B}_-)\delta_S + (\vec{n}_+\times\vec{B}_+)\delta_S$$

$$= \underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{B}_-)\chi_- + (\vec{\nabla}\times\vec{B}_+)\chi_+}_{\mu_0\vec{j}_{3D}} + \underbrace{\vec{n}\times(\vec{B}_+-\vec{B}_-)\delta_S}_{\mu_0\vec{j}_{2D}}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{n}\times(\vec{B}_+-\vec{B}_-) = \mu_0\vec{\imath}$$

Vektorový potenciál

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

lze vyřešit zavedením vekt. potenciálu
zaručuje existenci vekt. potenciálu

$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

souvislost s magnetickým tokem

$$\int_{\partial S} \vec{A}\cdot d\vec{s} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{S} = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \Psi_S$$

cirkulace $\vec{A}$ = tok $\vec{B}$

nejednoznačnost vekt. potenciálu

lze nalézt explicitní vztah pro $\vec{A}$ podobný vztahu pro skalární potenciál $\phi(x) = -\int_{x_0}^{x} \vec{E}\cdot d\vec{s}$

závisí ale na volbě integrační cesty

lze dostat značně odlišné $\vec{A}$ pro stejné $\vec{B}$

$\Rightarrow$ nejednoznačnost $\vec{A}$ – jak je velká?

$$\vec{A} \qquad \vec{A}' = \vec{A} + \vec{a}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A}' \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{\nabla}\psi$$

potenciály dávající stejné $\vec{B}$ se musí lišit o $\vec{\nabla}\psi$

kalibrační volnost

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi$$

kalibrační podmínka

volnost lze využít ke splnění dodatečné podmínky

Coulombova kalibrace (statická)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$$

lze vždy zaručit kalibrační transformací

$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = \alpha \neq 0$ nalezneme $\Delta\psi = \alpha$

pak $\vec{A} = \vec{A}' - \vec{\nabla}\psi$ splňuje $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' - \Delta\psi = \alpha - \alpha = 0$

Rovnice pro vektorový potenciál

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = -\Delta\vec{A} + \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}}_{0 \,\leftarrow\, \text{Coulombova kalibrace}}) = \mu_0\vec{j}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$$

pozn: konzistence podmínky stacionarity $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=0$
a Coulomb. kalibrace $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$

$$0 = -\mu_0\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = \vec{\nabla}\cdot\Delta\vec{A} = \Delta\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$$

Poissonova úloha pro vektorové pole

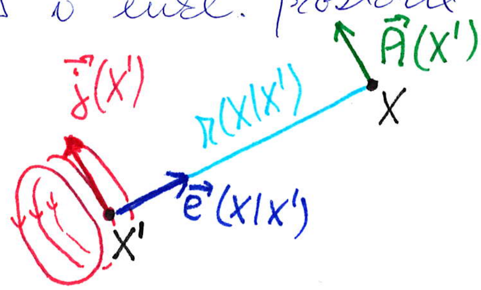
$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$$

v plochém prostoru lze zvolit kartézskou bázi
$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ konstantní
vektorová rovnice ekvivalentní rovnicím pro složky

$$\Delta A^k = -\mu_0 j^k \qquad k = x, y, z$$

použitím Greenovy funkce pro Δ v eukl. prostoru

$$\vec{A}(X) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{1}{r(X|X')}\,\vec{j}(X')\,dV'$$



pozn: tento vekt. potenciál automaticky splňuje Coulombovu kalibrační podmínku na jejímž základě byl odvozen

$\vec{\nabla} r(X|X') = -\vec{\nabla}' r(X|X')$

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})(X) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\nabla\frac{1}{r(X|X')}\right)\cdot\vec{j}(X')\,dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\nabla'\frac{1}{r(X|X')}\right)\cdot\vec{j}(X')\,dV' =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{r(X|X')}\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{j})}_{\text{stacionarita}\Rightarrow 0}(X')\,dV' - \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V \text{ celý prostor}}\nabla'\cdot\left(\frac{1}{r(X|X')}\vec{j}(X')\right)dV' =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\partial V}\frac{1}{r(X'|X)}\,\vec{j}(X')\cdot d\vec{S}' = 0$$

$\leftarrow$ lokalizované nebo alespoň omezené zdroje v nekonečnu ∂V

Biotův - Savartův zákon

$$\vec{B}(X) = (\vec{\nabla}\times\vec{A})(X) = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\times\int\frac{1}{r(X|X')}\vec{j}(X')\,dV'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\vec{\nabla}\frac{1}{r(X|X')}\right)\times\vec{j}(X')\,dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{e}(X|X')}{r^2(X|X')}\times\vec{j}(X')\,dV'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(X')\times\vec{e}(X|X')}{r^2(X|X')}\,dV'$$

pro tenké vodiče ~~- systém vodičů lokaliz~~

systém vodičů lokalizovaný na vodičích popsaných křivkou γ_K s proudy I_K

$$\vec{B}(X) = \sum_K \frac{\mu_0 I_K}{4\pi}\int_{\gamma_K}\frac{d\vec{s}\,'\times\vec{e}(X|X')}{r^2(X|X')} \qquad \vec{j}dV \to I d\vec{s}$$

svádí k formulaci, že $\vec{B}$ je dáno superpozicí od příspěvků "elementárních proudů" $\vec{j}dV = Id\vec{s}$

(v analogii s elektr. intenzitou

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\varrho(X')\vec{e}(X|X')}{r^2(X|X')}\,dV'$$

které je superpozice příspěvků od ϱdV

ale $\vec{j}dV$ nesplňuje zákon zachování a tak pole tohoto zdroje nemá smysl

smysl má pouze celý integrál přes úplný zdroj

Poissonova úloha pro $\vec{B}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} \quad\Rightarrow\quad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \mu_0\vec{\nabla}\times\vec{j}$$

$$-\Delta\vec{B} + \vec{\nabla}\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}}_{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\vec{B} = -\mu_0\vec{\nabla}\times\vec{j}$$

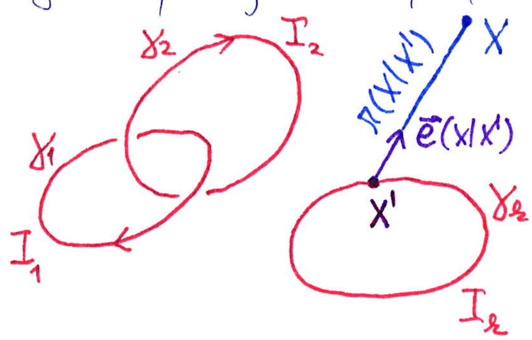
důsledek - nerotační toky $\vec{\nabla}\times\vec{j} = 0$ nebudí magnetické pole, tj. $\vec{B} = 0$ splňuje rov. pro $\vec{B}$ za vhodných okraj. podmínkách jednoznačně!

Systém smyček

Proudové smyčky

budeme uvažovat situaci, kdy všechny proudy jsou lokalizované v tenkých smyčkách

proudová smyčka lze chápat jako "elementární" zdroj magnetického pole – neexistují monopóly, stacionární zdroje jsou bezdivergentní a tak proudové čáry nikde nezačínají a nikde nekončí – lze je chápat jako superpozici tenkých smyček



pole smyček

$$\vec B(X) = -\sum_k \frac{\mu_0 I_k}{4\pi}\int_{\gamma_k} \frac{\vec e(X|X')\times d\vec s\,'}{r^2(X|X')}$$

skalární magnetický potenciál

mimo proudové smyčky $\vec B$ splňuje

$$\vec\nabla\times\vec B = 0 \qquad \vec\nabla\cdot\vec B = 0$$

⇓

lze zavést magnetický skalární potenciál

$$\vec B = -\vec\nabla\psi \qquad \text{(mimo proudové smyčky)}$$

rovnice pro mag. potenciál

$$\Delta\psi = 0 \qquad \text{Laplaceova úloha v prostoru mimo smyčky}$$

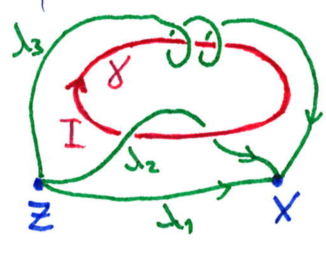
nejednoznačnost skal. mag. potenciálu

prostor bez smyček není topologicky triviální

⇒ neplatí Poincarého lema zajišťující existenci potenciálu

vzorec pro potenciál

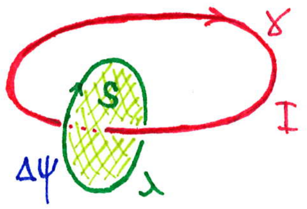
$$\psi(X) = -\int_Z^X \vec B\cdot d\vec s$$



vede na víceznačnou funkci závisející na cestě po které jdu ze Z do X – závisí na počtu oběhnutí proudových smyček

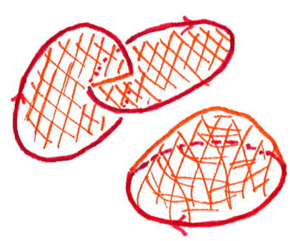
jeden oběh kolem proudové smyčky dává

$$\Delta\psi = -\int_{\lambda=\partial S}\vec B\cdot d\vec s = -\int_S(\vec\nabla\times\vec B)\cdot d\vec S = -\mu_0\int_S \vec j\cdot d\vec S = -\mu_0 I$$



řešení: zamezíme možnosti obíhat proud. smyčky

na každou smyčku napneme plochu a tu "vyjmeme" z prostoru, kde řešíme Laplaceovu úlohu – ve vzniklém prostoru je již magn. potenciál ψ jednoznačný



Síla mezi 2 smyčkami - Ampérův zákon

síla na smyčku ve vnějším poli $\vec{B}$

$$\vec{F}_{\text{na smyčku } \gamma} = \int \vec{j} \times \vec{B}\, dV = I \int_\gamma d\vec{s} \times \vec{B} \qquad (\vec{j}dV \to I d\vec{s})$$

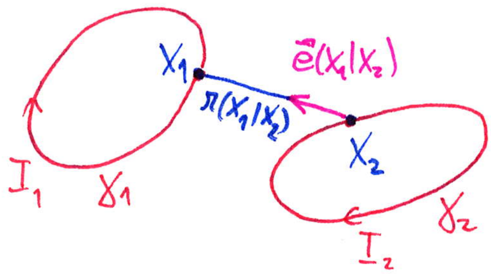
působení smyčky γ_2 na smyčku γ_1

$$\vec{F}_{\text{na 1 od 2}} = I_1 \int_{\gamma_1} d\vec{s}_1 \times \vec{B}_2 \underset{\uparrow \text{ Biot-Savart}}{=} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} \frac{d\vec{s}_1 \times (d\vec{s}_2 \times \vec{e}(X_1|X_2))}{r^2(X_1|X_2)} \underset{\uparrow \text{ bac-cab}}{=}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} \left[\frac{-\vec{e}(X_1|X_2)\, d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{r^2(X_1|X_2)} + d\vec{s}_1 \cdot \frac{\vec{e}(X_1|X_2)}{r^2(X_1|X_2)}\, d\vec{s}_2 \right]$$

$$\int_{\gamma_1} d\vec{s}_1 \cdot \vec{\nabla}_1 \frac{1}{r(X_1|X_2)} \overset{\text{Newt. vzorec}}{=} \frac{1}{r(K|X_2)} - \frac{1}{r(Z|X_2)} \overset{Z=K}{=} 0 \Leftarrow -\vec{\nabla} \frac{1}{r(X_1|X_2)}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} \vec{e}(X_1|X_2) \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{r^2(X_1|X_2)}$$



symetrické při záměně γ_1 a γ_2

$$\vec{F}_{\text{na 1 od 2}} = -\vec{F}_{\text{na 2 od 1}}$$

akce a reakce ve stacionární situaci
(nezáleží na šíření interakce konečnou rychlostí)

Indukčnost

magnetický tok skrze smyčku γ_1 od pole smyčky γ_2

$$\Psi_{\text{skrze }\gamma_1\text{ od }\gamma_2} = \int_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1 = \int_{S_1} \vec{\nabla}\times\vec{A}_2 \cdot d\vec{S}_1 = \int_{\gamma_1=\partial S_1} \vec{A}_2 \cdot d\vec{s}_1 =$$

$$= \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} \frac{1}{r(X_1|X_2)}\, d\vec{s}_2 \cdot d\vec{s}_1\right] I_2 = L_{12}\, I_2$$

vzájemná indukčnost

$$L_{12}\,(\equiv M_{12}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} \frac{1}{r(X_1|X_2)}\, d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2$$

- geometrické veličiny závisející na tvaru a poloze smyček
- symetrické při záměně smyček $L_{12} = L_{21}$

pro netenké vodiče závisí na přesném rozložení proudu
(např. proud vytlačen do tenké vrstvy na povrchu vodiče
nebo objemově rozložený proud napříč celým průřezem vodiče)

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi I_1 I_2}\int\!\!\int \frac{1}{r(X_1|X_2)}\, \vec{j}(X_1)\cdot\vec{j}(X_2)\, dV_1\, dV_2$$

rozložení proudu ve vodiči

trubice tvořící vodič

celkový proud ve vodiči

výsledek nebude záviset na celkových proudech I_1, I_2

samoindukce

smyčka generuje magnetické pole a tedy i tok skrze sebe

$$\Psi_{\text{skrze }\gamma\text{ od }\gamma} = L\, I$$

pro tenký vodič diverguje

⇑ magnetické pole blízko tenkého vodiče $\sim \ln R$ – diverguje

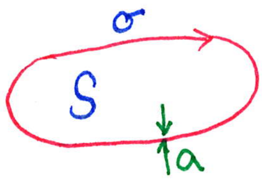
potřeba uvažovat vodič konečného průřezu

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi I^2}\int\!\!\int \frac{1}{r(X|X')}\, \vec{j}(X)\cdot\vec{j}(X')\, dV\, dV'$$

obvykle počítáme skrze energii – viz dále

lze nalézt „charakteristické" chování

$$L \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\, \sigma \left(\ln\frac{S}{a^2} + \frac{1}{2} + \varepsilon\right)$$



σ – obvod smyčky
S – plocha smyčky
a – poloměr průřezu vodiče
ε – malá konstanta

systém několika smyček

celkové mag. pole je superpozice polí od smyček

$$\vec{B} = \sum_l \vec{B}_l$$

tok mag. pole skrze k-tou smyčku

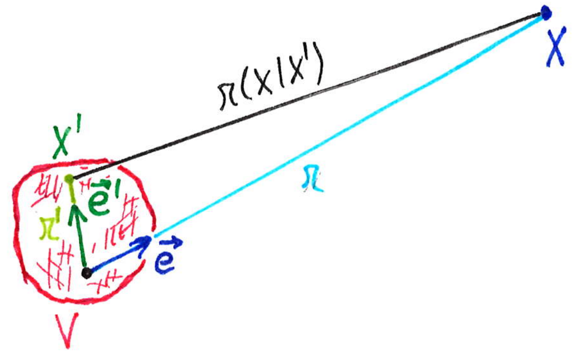
$$\Psi_k = \sum_l L_{kl} I_l$$

L_{kl} matice indukčnosti

$k \neq l$ vzájemná indukčnost

$k = l$ samoindukčnost

Multipólový rozvoj magnetického pole



pole daleko od lokalizovaného pole
- rozvoj $\vec{A}$ podobně jako rozvoj ϕ

$$\vec{A}(X) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(X')}{r(X|X')}\,dV'$$

$$\frac{1}{r(X|X')} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l-1)!!}{l!}\frac{r'^l}{r^{l+1}}\, e^{\langle a_1} \cdots e^{a_l\rangle} e'_{\langle a_1} \cdots e'_{a_l\rangle}$$

$$= \frac{1}{r} + \frac{r'}{r^2}\,\vec{e}\cdot\vec{e}\,' + \dots$$

$\Downarrow$

$$\vec{A}(X) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int_V \vec{j}(X')\,dV'}_{\text{monopól}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^2}\vec{e}\cdot\int_V \vec{r}\,'\,\vec{j}(X')\,dV'}_{\text{dipól}} + \dots$$

pomocné výpočty

$$\int_V \vec{j}\,dV = \int_V \Big(\vec{j}\cdot\underbrace{\vec{\nabla}\vec{r}}_{\overleftrightarrow{I}} + \underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{j})}_{0}\,\vec{r}\Big)dV = \int_V \vec{\nabla}\cdot(\vec{j}\,\vec{r})\,dV = \int_{\partial V} \vec{r}\,\vec{j}\cdot d\vec{S} = 0 \qquad \uparrow\ \vec{j}=0 \text{ na } \partial V$$

$$\int_V (\vec{r}\,\vec{j} + \vec{j}\,\vec{r})\,dV = \int_V \Big(\vec{r}\,\vec{j}\cdot\underbrace{(\vec{\nabla}\vec{r})}_{\overleftrightarrow{I}} + \vec{j}\cdot\underbrace{(\vec{\nabla}\vec{x})}_{\overleftrightarrow{I}}\,\vec{r} + \vec{x}\,\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{j})}_{0}\,\vec{r}\Big)dV = \int_V \vec{\nabla}\cdot(\vec{j}\,\vec{r}\,\vec{r})\,dV = \int_{\partial V}\vec{r}\,\vec{r}\,\vec{j}\cdot d\vec{S} = 0 \qquad \uparrow\ 0 \text{ na } \partial V$$

$\Downarrow$

$$\int_V r^a j^b\,dV = \int_V r^{[a} j^{b]}\,dV = \frac{1}{2}\varepsilon^{abc}\varepsilon_{mnc}\int_V r^m j^n\,dV = \varepsilon^{abc}\underbrace{\frac{1}{2}\int (\vec{r}\times\vec{j})_c\,dV}_{m_c} = \varepsilon^{abc} m_c$$

kde definujeme $\quad \vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{r}\times\vec{j}\,dV$

použili jsme vekt. identitu $\quad \frac{1}{2}\varepsilon^{abc}\varepsilon_{mnc} = \delta^{[a}_{[m}\delta^{b]}_{n]}$ $\quad$ - „jednotka" na antisymetrických tenzorech

$\Downarrow$

$$e_m\int_V r^m j^a\,dV = e_m\,\varepsilon^{man} m_n = (\vec{m}\times\vec{e})^a \qquad \text{tj.} \quad \vec{e}\cdot\int \vec{r}\,\vec{j}\,dV = \vec{m}\times\vec{e}$$

vektorový potenciál

$$\vec{A}(X) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{e}}{r^2} \qquad \vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{r}\times\vec{j}\,dV$$

magnetická indukce

$$\vec{B}(X) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\,\vec{e}\,\vec{e}\cdot\vec{m} - \vec{m}}{r^3}$$

vše platí pro X mimo zdroje

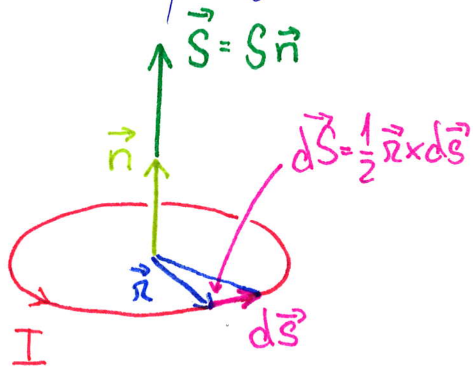
viz cvičení

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\times\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-3\frac{1}{r^4}\vec{e}\times(\vec{m}\times\vec{r}) + \frac{\vec{\nabla}\times(\vec{m}\times\vec{r})}{r^3}\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\Big[-3\vec{m}\,\vec{e}\cdot\vec{e} + 3\vec{e}\,\vec{e}\cdot\vec{m} + \vec{m}\,\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{r}}_{3} - \vec{m}\cdot\underbrace{\vec{\nabla}\vec{r}}_{\overleftrightarrow{I}}\Big] = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\,\vec{e}\,\vec{e}\cdot\vec{m} - \vec{m}}{r^3}$$

Kanonické reprezentace magnetického dipólu

malá rovinná smyčka



$$\vec m = \frac{1}{2}\int \vec r \times \vec j \, dV = \frac{I}{2}\int_{\partial S} \vec r \times d\vec s =$$

$$= I \int_{\partial S} d\vec S = I \vec S = I S \vec n$$

"bodový dipól" = limita malé plochy a velkého proudu tak, že $m = \lim_{S\to 0} IS = \text{konst}$

Síla na dipól ve vnějším poli

$$\vec F = \int \vec j \times \vec B \, dV$$

$\vec B$ … vnější pole

$\vec j$ … proudová hustota lokaliz. systému na který síla působí

$$= \int \vec j \times \left(\vec B|_{x_0} + \vec r \cdot \vec\nabla \vec B|_{x_0} + \dots \right) dV$$

rozvoj okolo x_0 díky tomu že systém je lokalizovaný

$$= \int \vec j \, dV \times \vec B|_{x_0} + \int \vec j \times (\vec r \cdot \vec\nabla \vec B|_{x_0}) \, dV + \dots$$

$$\Downarrow$$

$$F_a = \int \varepsilon_{abc} \, j^b \, r^m \nabla_m B^c|_{x_0} \, dV = \varepsilon_{abc} \underbrace{\left[\int r^m j^b \, dV\right]}_{\varepsilon^{mbn} m_n \text{ viz výše}} \nabla_m B^c|_{x_0} =$$

$\varepsilon\varepsilon = \delta\delta - \delta\delta$ viz výše

$$= (\delta^m_a \delta^n_c - \delta^n_a \delta^m_c) \, m_n \nabla_m B^c|_{x_0} =$$

$$= (\nabla_a B^n \underbrace{m_n}_{\text{konst.}} - m_a \underbrace{\nabla_n B^n}_{0})|_{x_0} = \nabla_a (B^n m_n)|_{x_0}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec F = \vec\nabla(\vec B \cdot \vec m)$$

Moment síly vnějšího pole na dipól

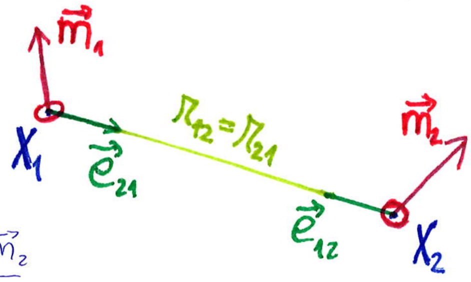
$$\vec M = \int \vec r \times (\vec j \times \vec B) \, dV = \int \vec r \times (\vec j \times \vec B|_{x_0}) \, dV + \dots$$

$$= \int (\vec j \, \vec r \cdot \vec B|_{x_0} - \vec B|_{x_0} \, \vec r \cdot \vec j) \, dV =$$

$$= \underbrace{\left(\int \vec j \, \vec r \, dV\right) \cdot \vec B|_{x_0}}_{\vec m \times \vec B \text{ viz } \int \vec r \vec j dV \text{ výše}} - \underbrace{\left(\int \vec r \cdot \vec j \, dV\right)}_{0 \;\Leftarrow\; \int (\vec r \vec j + \vec j \vec r) dV = 0} \vec B|_{x_0}$$

$$\vec M = \vec m \times \vec B$$

Dipól-dipólová interakce



síla dipólu 2 na dipól 1

$$\vec{F}_{na1od2} = \vec{\nabla}(\vec{B}_2 \cdot \vec{m}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\frac{3\vec{m}_1\cdot\vec{e}_{12}\,\vec{e}_{12}\cdot\vec{m}_2 - \vec{m}_1\cdot\vec{m}_2}{r_{12}^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\left(3\frac{\vec{m}_1\cdot\vec{r}_{12}\,\vec{r}_{12}\cdot\vec{m}_2}{r_{12}^5} - \frac{\vec{m}_1\cdot\vec{m}_2}{r_{12}^3}\right) =$$

působí v argumentu X_1

$$= \frac{3\mu_0}{4\pi}\left(-5\frac{\vec{m}_1\cdot\vec{r}_{12}\,\vec{r}_{12}\cdot\vec{m}_2}{r_{12}^7}\vec{r}_{12} + \frac{\vec{m}_1\,\vec{r}_{12}\cdot\vec{m}_2}{r_{12}^5} + \frac{\vec{m}_1\cdot\vec{r}_{12}\,\vec{m}_2}{r_{12}^5} + \frac{\vec{m}_1\cdot\vec{m}_2}{r_{12}^5}\vec{r}_{12}\right)$$

$$= \frac{3\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r_{12}^4}\left(\vec{m}_1\cdot\vec{m}_2\,\vec{e}_{12} + \vec{m}_1\,\vec{e}_{12}\cdot\vec{m}_2 + \vec{m}_1\cdot\vec{e}_{12}\,\vec{m}_2 - 5\,\vec{m}_1\cdot\vec{e}_{12}\,\vec{e}_{12}\cdot\vec{m}_2\,\vec{e}_{12}\right)$$

$$= \frac{3\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r_{12}^4}\left((\vec{e}_{12}\times\vec{m}_1)\times\vec{m}_2 + (\vec{e}_{12}\times\vec{m}_2)\times\vec{m}_1 - 2\vec{m}_1\cdot\vec{m}_2\,\vec{e}_{12} + 5\,(\vec{e}_{12}\times\vec{m}_1)\cdot(\vec{e}_{12}\times\vec{m}_2)\,\vec{e}_{12}\right)$$

přímočaré použití bac-cab

platí "akce a reakce"

$$\vec{F}_{na1od2} = -\vec{F}_{na2od1}$$

klesá jako $\frac{1}{r^4}$ – rychleji než podintegrální výraz v Ampérově zákonu, který odpovídá klesání jako $\frac{1}{r^2}$

důsledek dipólového charakteru obou na sebe působících syst.

moment síly na dipól 2 od dipólu 1

$$\vec{M}_{na1od2} = \vec{m}_1 \times \vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r_{12}^3}\left(3(\vec{m}_1\times\vec{e}_{12})(\vec{e}_{12}\cdot\vec{m}_2) - \vec{m}_1\times\vec{m}_2\right)$$

pozor – nesymetrické vůči záměně $1 \leftrightarrow 2$

$$\vec{M}_{na1od2} \neq -\vec{M}_{na2od1}$$

ale platí, že celkový moment síly je nulový

$$\vec{r}_{12}\times\vec{F}_{na1od2} + \vec{M}_{na1od2} + \vec{M}_{na2od1} = 0$$

= moment síly vůči poloze mag. momentu $\vec{m}_2$

$$\vec{r}_{21}\times\vec{F}_{na2od1} + \vec{M}_{na2od1} + \vec{M}_{na1od2} = 0$$

$\Downarrow$ = moment síly vůči poloze mag. momentu $\vec{m}_1$

zákon zachování momentu hybnosti

$$\vec{r}_{12} \times \vec{F}_{ma1od2} + \vec{M}_{mo1od2} + \vec{M}_{ma2od1} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r_{12}^3} \Big(3(\vec{e}_{12} \times \vec{m}_1)(\vec{e}_{12} \cdot \vec{m}_2) + 3(\vec{m}_1 \cdot \vec{e}_{12})(\vec{e}_{12} \times \vec{m}_2) + 3(\vec{m}_1 \times \vec{e}_{12})(\vec{e}_{12} \cdot \vec{m}_2) - \vec{m}_1 \times \vec{m}_2$$
$$+ 3(\vec{m}_2 \times \vec{e}_{12})(\vec{e}_{12} \cdot \vec{m}_1) - \vec{m}_2 \times \vec{m}_1 \Big)$$

$\vec{e}_{21} = -\vec{e}_{12}$

$$= 0$$

$$(\vec{e}_{12} \times \vec{m}_1) \times \vec{m}_2 + (\vec{e}_{12} \times \vec{m}_2) \times \vec{m}_1 - 2\, \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2\, \vec{e}_{12} + 5\, (\vec{e}_{12} \times \vec{m}_1) \cdot (\vec{e}_{12} \times \vec{m}_2)\, \vec{e}_{12} =$$

$$= \vec{m}_1\, \vec{e}_{12} \cdot \vec{m}_2 - \vec{e}_{12}\, \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 + \vec{m}_2\, \vec{e}_{12} \cdot \vec{m}_1 - \vec{e}_{12}\, \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 - 2\, \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2\, \vec{e}_{12} + 5(\vec{m}_1 \times (\vec{e}_{12} \times \vec{m}_2)) \cdot \vec{e}_{12}\, \vec{e}_{12}$$

$$= \vec{m}_1\, \vec{e}_{12} \cdot \vec{m}_2 + \vec{m}_2\, \vec{e}_{12} \cdot \vec{m}_1 - 4\, \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2\, \vec{e}_{12} + 5\, \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2\, \vec{e}_{12} \cdot \vec{e}_{12}\, \vec{e}_{12} - 5\, \vec{m}_1 \cdot \vec{e}_{12}\, \vec{e}_{12} \cdot \vec{m}_2\, \vec{e}_{12}$$

$$= \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2\, \vec{e}_{12} + \vec{m}_1\, \vec{e}_{12} \cdot \vec{m}_2 + \vec{m}_1 \cdot \vec{e}_{12}\, \vec{m}_2 - 5\, \vec{m}_1 \cdot \vec{e}_{12}\, \vec{e}_{12} \cdot \vec{m}_2\, \vec{e}_{12}$$

Kvazistacionární přiblížení

musíme připustit proměnné pole $\vec{B}$

budeme uvažovat pouze velmi pomalé změny proudů

magnetické pole se stačí efektivně okamžitě přizpůsobit změně proudů (ignorujeme konečnost rychlosti šíření změny $\vec{B}$)

to znamená uvažovat další člen z Maxwellových rovnic

kvazistacionární Maxwellovy rovnice:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\underbrace{\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}_{\text{nový člen závislý na změně } \vec{B}}$$

potřeba změnit definici skalárního potenciálu

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow \exists\phi \quad \vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi \Rightarrow \phi = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

více viz plná teorie

Faradayův zákon

- dává vztah mezi elektromotorickou sílu ve smyčce a změnou magnetického toku skrze smyčku
- má dvě odlišné příčiny
  - Faradayův člen v Maxwellových rovnicích
  - Lorentzovu sílu působící na pohybující se smyčku

Faradayův zákon - proměnné pole

proměnné magnetické pole indukuje elektrickou intenzitu
tu můžeme chápat jako dodatečnou sílu působící ve smyčce
efektivně popisujeme jako elektromotorickou sílu

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

integrál přes časově konstantní plochu ⇓

$$-\frac{d}{dt}\underbrace{\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}}_{\Phi} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \mathcal{E}$$

⇓

$$-\frac{d}{dt}\Phi = \mathcal{E}$$

Faradayův zákon pro elektromotorickou sílu způsobenou proměnným magnetickým polem
Lenzovo pravidlo: $\mathcal{E}$ působí proti změně Φ

Faradayův zákon – proměnná smyčka

uvažujme pohyb smyčky v daném magnetickém poli

proud ve smyčce ⇒ magnetická síla ⇒

⇒ tendence změny proudu ve smyčce

úhrnný vliv mag. síly na proud v celé smyčce

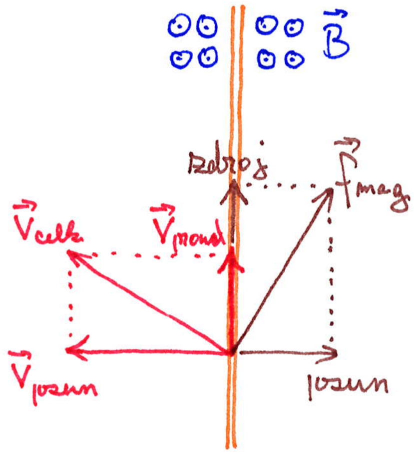
= tzv. elektromotorická síla magnetického pole

= práce vykonaná na jednotkový náboj podél smyčky

$$\mathcal{E} = \int_\gamma \frac{d\vec{F}_m}{dq} \cdot \underbrace{d\vec{s}}_{\text{podél smyčky}}$$

$$= \int_\gamma (\underbrace{\vec{v}_{celk}}_{\vec{v}_{smyčka} + \vec{v}_{proud}} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

nepřispívá! ⇐ $\vec{v}_{proud} \parallel d\vec{s}$



pohybující smyčka obejme mezi časy t_z a t_k oblast Ω

$$0 = \int_\Omega \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\, dV = \int_{\partial\Omega} \vec{B}\cdot d\vec{S} =$$

$$= \Phi_k - \Phi_z + \int_{\text{plášť } P} \vec{B}\cdot \underbrace{d\vec{S}}_{d\vec{s}\times d\vec{r}}$$

podél smyčky ↓ ↓ pohyb smyčky

$$= \Delta\Phi + \int_z^k \int_\gamma \vec{B}\cdot(d\vec{s}\times \underbrace{d\vec{r}}_{\vec{v}_{smyčka}\, dt})$$

$$= \Delta\Phi + \int_{t_z}^{t_k}\int_\gamma (\vec{v}_{smyčka}\times\vec{B})\cdot d\vec{s}$$

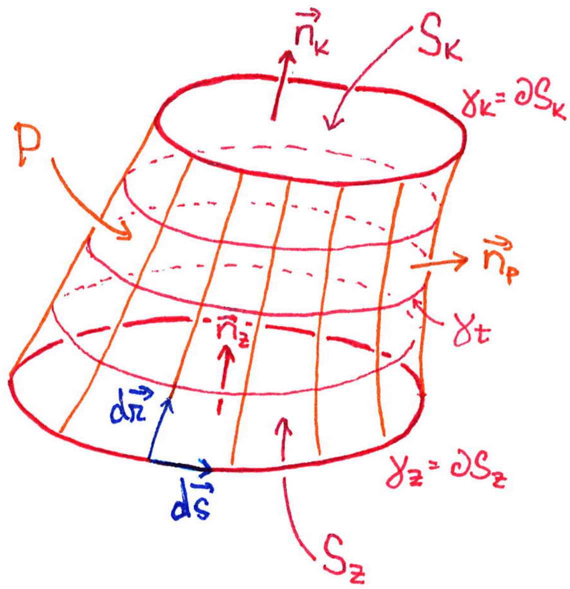
lze přidat $\vec{v}_{proud}$

$$= \Delta\Phi + \int_{t_z}^{t_k} \mathcal{E}\, dt$$

za malý čas Δt

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{E}$$

Faradayův zákon pro elektromotorickou sílu způsobenou pohybem smyčky



přesun smyčky z polohy $\gamma_z = \partial S_k$ do polohy $\gamma_k = \partial S_k$ uzavře objem V s hranicí $\partial V = S_k - S_z + P$ kde znaménko "−" indikuje opačnou volbu vnější normály ∂V a normály S_z

body smyčky se posouvají ve směru elementárního posunu $d\vec{r}$

posouvající smyčka vytvoří plochu P

plošný element na P je dán

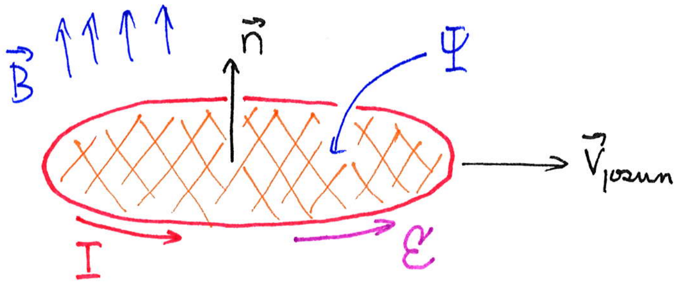
$$d\vec{S} = d\vec{s}\times d\vec{r}$$

Faradayův zákon - celkově

$$-\frac{d\Psi}{dt} = \mathcal{E} \overset{\text{def}}{=} \int_\gamma \frac{d\vec{f}_{EM}}{dq} \cdot d\vec{s} = \int_\gamma \left(\frac{d\vec{f}_E}{dq} + \frac{d\vec{f}_M}{dq} \right) \cdot d\vec{s} = \int_\gamma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

platí i pro pohybující se smyčku v proměnném poli

Lenzovo pravidlo: EMS proti změně magnetického toku
nutno zvolit konzistentní orientace



Ψ i $\mathcal{E}$ závisí na volbě orientace $\vec{n}$

Energie systému smyček

Práce vykonaná zdrojem proudu ve smyčce

mějme zdroj udržující proud I ve smyčce

při posunu smyčky či změně pole musí zdroj vykonat práci proti indukované elektromotorické síle

$$\frac{dA_{zdroj}}{dt} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zdroj působí proti} \\ \text{EM síle}}}{-} \underbrace{\frac{dq}{dt}}_{I} \mathcal{E} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Faradayův} \\ \text{zákon}}}{=} I \frac{d\Phi}{dt}$$

práce potřebné k udržení konstantního proudu z integrace

$$\Delta A_{zdroj} = I \Delta \Phi$$

energie jedné smyčky γ_s o samoindukčnosti L_{ss}

energie = práce zdroje potřebné k rozpohybování proudu proti vlastnímu poli (samoindukčnost)

fixovaná smyčka a pomalu se měnící proud

$$\frac{dU_s}{dt} = \frac{dA_{zdroj}}{dt} = I_s \frac{d\Phi_s}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \Phi_s = L_{ss} I_s}}{=} L_{ss} I_s \frac{dI_s}{dt}$$

$\Downarrow$

$$U_s = \frac{1}{2} L_{ss} I_s^2$$

pro $I_s = 0$ předpokládáme $U_s = 0$

Magnetická energie systému smyček

magnetická energie systému smyček γ_k $k=1\ldots N$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{k,l} L_{kl} I_k I_l = \frac{1}{2}\sum_k I_k \Phi_{\text{skrze } \gamma_k}$$

důkaz indukcí

- pro jednu smyčku se redukuje na odvozený vztah
- indukční krok

  uvažujme systém smyček γ_k $k=1\ldots N$

  a přidejme další smyčku γ_s

v každý okamžik jsou toky a proudy vztaženy

$$\Phi_s = L_{ss} I_s + \sum_l L_{sl} I_l$$

$$\Phi_k = L_{ks} I_s + \sum_l L_{kl} I_l$$

smyčky γ_k i γ_s se nemění

$\Rightarrow$ matice indukčnosti je konstantní

$$\frac{dL_{kl}}{dt}=0 \qquad \frac{dL_{sk}}{dt}=0 \qquad \frac{dL_{ss}}{dt}=0$$

měníme pouze proud I_s

$$\frac{dI_k}{dt}=0$$

změna energie při zapínání proudu I_s

= práce vykonaná elektromotorickou silou ve smyčkách

$$\frac{dA}{dt} = -\mathcal{E}_s I_s - \sum_k \mathcal{E}_k I_k = I_s \frac{d\Phi_{\text{skrze }\gamma_s}}{dt} + \sum_k I_k \frac{d\Phi_{\text{skrze }\gamma_k}}{dt}$$

$$\Downarrow \quad = I_s L_{ss}\frac{dI_s}{dt} + \sum_k I_k L_{ks}\frac{dI_s}{dt}$$

$$\Delta A = \frac{1}{2} L_{ss} I_s^2 + \sum_k I_k \underbrace{L_{ks}}_{\frac{1}{2}(L_{ks}+L_{sk})} I_s \qquad \text{zapnutí proudu } I_s\text{: } 0 \to I_s$$

magnetická energie

$$U_{\text{systém }\gamma_k+\gamma_s} = U_{\text{systém }\gamma_k} + \Delta A =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k,l} L_{kl} I_k I_l + \frac{1}{2}\sum_k L_{ks} I_k I_s + \frac{1}{2}\sum_l L_{sl} I_s I_l + \frac{1}{2} L_{ss} I_s^2$$

což jsme chtěli ukázat

Relaxace náboje ve vodiči

$\rho, \vec{j}$ volné náboje ve vodiči

rovnice kontinuity   Ohmův zákon   Maxwellova rov.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \qquad \vec{j} = \gamma\vec{E} \quad \gamma = \text{konst.} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\Downarrow \quad \gamma\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$ rovnice exponenciály

$$\Downarrow \quad \rho(t) = \rho(0)\exp\left(-\frac{t}{t_E}\right) \qquad \text{kde } t_E = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$$

objemový náboj ρ ve vodiči zmizí na časové škále t_E
náboj se přesune na okraj vodiče

Rovnice difuze pro $\vec{E}, \vec{B}, \vec{j}$

kvazistacionární přiblížení ve vodiči, kde $\rho = 0$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \qquad \rho = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} \qquad \vec{j} = \gamma\vec{E} \qquad \gamma = \text{konst.}$$

vyjádříme elektr. intenzitu

$$\vec{E} = \frac{1}{\gamma\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{\gamma\mu_0}\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \frac{1}{\gamma\mu_0}\left(-\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) + \Delta\vec{B}\right) = \frac{1}{\gamma\mu_0}\Delta\vec{B}$$

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma\mu_0}\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma\mu_0}\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \frac{1}{\gamma\mu_0}\left(-\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) + \Delta\vec{E}\right) = \frac{1}{\gamma\mu_0}\Delta\vec{E}$$

dostáváme, že $\vec{B}$, $\vec{E}$ a $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ splňuje rovnici difuze

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma\mu_0}\Delta\vec{B} \qquad \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma\mu_0}\Delta\vec{E} \qquad \frac{\partial\vec{j}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma\mu_0}\Delta\vec{j}$$

řešení skrze "heat kernel")

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{1}{\alpha}\Delta K \qquad K(0) = \delta \quad \Leftrightarrow \quad K = \exp\left(\frac{t}{\alpha}\Delta\right)$$ – operátorově!

řešení má tendenci se v čase "rozplýt", "zchladit"

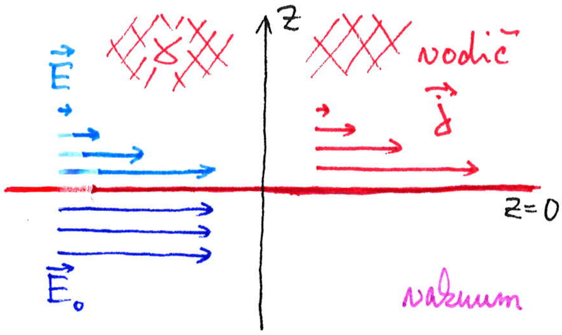
Skin efekt

pro harmonický proud $\vec{j} = \exp(-i\omega t)\,\hat{\vec{j}}$

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma\mu_0}\Delta \vec{j} \Rightarrow \varkappa^2 \hat{\vec{j}} = \Delta \hat{\vec{j}} \qquad \text{kde } \varkappa^2 = -i\omega\gamma\mu_0$$

proud v poloprostoru $z > 0$

- netriviální hodnota $\hat{\vec{j}}_0 = \text{konst}$ na okraji $z = 0$
- klesající pro $z \to \infty$



lze řešit anzatzem

$$\hat{\vec{j}} = \hat{\vec{j}}_0 \exp(-\varkappa z)$$

$$\Delta \hat{\vec{j}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\hat{\vec{j}} = \varkappa^2 \hat{\vec{j}}$$

konstanta $\varkappa$ je komplexní

$$\varkappa = \sqrt{-i\omega\gamma\mu_0} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\gamma\mu_0} = (1-i)\frac{1}{\delta_\omega} \qquad \delta_\omega = \sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu_0}}$$

řešení

$$\vec{j} = \hat{\vec{j}}_0 \exp(-\varkappa z - i\omega t) = \hat{\vec{j}}_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta_\omega}\right) \exp\left(-i\omega t + i\frac{z}{\delta_\omega}\right)$$

reálné řešení

$$\vec{j} = \mathrm{Re}(\text{-"-}) = \hat{\vec{j}}_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta_\omega}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta_\omega}\right)$$

faktor $\exp\left(-\frac{z}{\delta_\omega}\right)$ vytěsní proud do oblasti $z \lesssim \delta_\omega$

pro vyšší frekvence má proud tendenci téct po okraji vodiče