
Časově proměnné pole

Formulace elektrodynamiky.

Plné Maxwellovy rovnice. Potenciály, rovnice pro potenciály, kalibrační volnost, kalibrační podmínky.

Elektrodynamika se zdroji.

Vlnová rovnice pro potenciály v Lorenzově kalibraci. Prostorčasová formulace. Retardované a advancovaná podmínky, retardovaná, advancovaná a symetrická Greenova funkce. Odvození Greenovy funkce. Potenciál zadaných zdrojů, přichodí, odchozí a radiální pole. Retardované šíření a kauzalita. Jefimenkovy vztahy pro elektrickou intenzitu a magnetickou indukci. Záření proměnného elektrického dipólu, distribuční podoba zdroje. Zářivé pole obecných zdrojů, aproximace dalekých polí a pomalých zdrojů, harmonický dipól, Larmorova formule.

Pole pohybujícího se náboje.

Pole pohybujícího se bodového náboje, Liénardovy-Wiechertovy potenciály, struktura zobecněného Coulombůva zákona, korekce na rychlost, zářivé členy, odvození zobecněného Coulombůva zákona, Feynmanova formule. Pole rovnoměrně se pohybujícího náboje. Zářivé pole bodového náboje, záření v klidové soustavě zdroje, Larmorova formule. 4-hybnost zářivého pole, transformační vlastnosti, Liénardovo zobecnění Larmorovy formule.

Elektrodynamika bez zdrojů.

Volné Maxwellovy rovnice, vlnové rovnice pro elektrickou intenzitu a magnetickou indukci. Cauchyho úloha, vývoj počátečních dat, kauzální Greenova funkce. Obecná rovinná vlna, profilová funkce a fáze, rychlost šíření. Transverzalita vlny, nulovost invariantů. Hustota energie a toku energie vlny. Monochromatická vlna, komplexní reprezentace. Lineární, kruhová a eliptické polarizace vlny.

Sférické elektromagnetické vlny

Rovnice pro potenciál v Coulombově kalibraci, sférické vlny, operátor momentu, ansatz pro vektorový potenciál, Debyeův potenciál, TE a TM pole. Řešení skalární vlnové rovnice, separace proměnných, sférické Besselovy funkce. Řešení vektorové vlnové rovnice, identifikace koeficientů v rozkladu.

Formule elektrodynamiky

Plni Maxwellovy rovnice

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{j}$$

potenciály

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

automaticky řeší nezděrokové rovnice

rovnice pro potenciály

$$\frac{1}{\epsilon_0} \rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi - \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\left[-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right] \phi - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right)$$

$$\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{j} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \phi = -\left[-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right] \vec{A} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right)$$

$$\square \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right)$$

$$\square \vec{A} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{j} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right)$$

$$\square = \left[-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right]$$

Prostorčasová formule

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} j^\nu$$

$$\nabla_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0$$

potenciály

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$$

automaticky řeší bezzděrokové
Maxwellovy rovnice

rovnice pro 4-potenciál

$$\frac{1}{\epsilon_0 c^2} j^\nu = \nabla_\mu \nabla^\mu A^\nu - \nabla_\mu \nabla^\nu A^\mu = -\square A^\nu + \nabla^\nu (\nabla_\mu A^\mu)$$

$$\square A^\nu = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} j^\nu + \nabla^\nu (\nabla_\mu A^\mu)$$

$$\square = \nabla_\mu \nabla^\mu$$

Kalibrační volnost

měřitelné jsou veličiny $\vec{E}$ a $\vec{B}$
měřené potenciály jednoznačně
změna

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\phi \quad \phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t}\chi$$

nezmění $\vec{E}$ a $\vec{B}$

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\chi}_0 = \vec{B}$$

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}\phi' - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}' = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\chi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\chi}_0 = \vec{E}$$

Kalibrační transformace

charakterizované libovolnou prostorově-časovou funkcí χ

$$\chi(t, \vec{r}) \equiv \chi(x^\mu)$$

tedy

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \quad \phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t}\chi$$

resp.

$$A'_r = A_r + \nabla_r \chi$$

$$\left[-\frac{1}{c}\phi', \vec{A}'\right] = \left[-\frac{1}{c}\phi, \vec{A}\right] + \left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi, \vec{\nabla}\chi\right]$$

volnost lze využít k položení dodatečných
podmínek na potenciály, které mohou zjednodušit
některé rovnice

- tzv. kalibrační podmínky

Lorenzova kalibrace

lze požadovat

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \text{resp.} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0$$

vlastně, pokud $\phi', \vec{A}'$ nesplňují tuto podmínku, tj.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \alpha \neq 0$$

pak hledáme ψ takové, aby

$$\phi = \phi' + \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \vec{A} = \vec{A}' - \vec{\nabla} \psi$$

uplnovaly Lorenzovu podmínku

$$0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \nabla^2 \psi = \alpha - \square \psi$$

takové ψ lze najít - viz řešení vlnové rovnice

rovnice pro potenciál v Lorenzové kalibraci

$$\square \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\square \vec{A} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{j}$$

$$\text{resp.} \quad \square A^r = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} j^r$$

zbývající kalibrační volnost

stále máme volnost změnit $\phi, \vec{A}$ pomocí ψ splňující

$$\square \psi = 0$$

Coulombova kalibrace

kalibrační podmínka

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

lze vždy splnit (obdobný argument jako pro Lorenzovu pdm.)
 při specifikaci asymptotického chování jsou potenciály určený jednoznačně

rovnice pro potenciály

$$\Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\square \vec{A} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \phi$$

skalární potenciál dán řešením Poissonovy úlohy

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

potenciál je dán okamžitým rozložením náboje v čase +
 nekauzální vztah!

potenciál nemá přímo měřitelný, pouze skrze $\vec{E}$
 ϕ ale vstupuje do rovnice pro $\vec{A}$ a ovlivní ho
 v kombinaci $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ se nekauzalita vyruší

zdrojový člen pro vekt. potenciál

$$-\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \phi$$

je bezdivergentní

$$-\frac{1}{\epsilon_0 c^2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j} - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \phi) = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}) = 0$$

lze tak cházet jako bezdivergentní část $\vec{j}_{DF}$ tedy $\vec{j}$
 rovnice pro $\vec{A}$ má charakter

$$\square \vec{A} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{j}_{DF}$$

pozor! $\vec{j}_{DF}$ závisí nelokálně na $\vec{j}$

(i pro lokální $\vec{j}$ může být bezdivergentní část $\vec{j}_{DF}$ nulová v celém prost.)

příklad bez nábojů

$$\rho = 0 \Rightarrow \phi = 0 \Rightarrow \square \vec{A} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{j}$$

všechrá informace ve vekt. potenciálu $\vec{A}$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Weylova kalibrace

Weylova kalibrační podmínka

$$\phi = 0$$

obecně Weylova kalibrační podmínka

$$\phi = \bar{\phi} \equiv \text{libovolná zvolená funkce } \bar{\phi}(\vec{x}, t)$$

lze vždy splnit

$$\phi = \phi' - \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

vůlbu

$$\psi = \int (\phi' - \bar{\phi}) dt \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \phi' - \bar{\phi}$$

dostaneme

$$\phi = \bar{\phi}$$

však netriviální informace zakódovaná v $\vec{A}$

$\phi = \bar{\phi}$ určuje pouze výběr z kalibračně ekvivalentních potenciálů

zbývající kalibrační volnost

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \tilde{\psi} \quad \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = 0 \quad \text{tj.} \quad \tilde{\psi}(\vec{r})$$

časová derivace $\tilde{\psi}$ je fixovaná kalibrační podmínkou

zbývající volnost umožňuje splnit v jednom čase t_0

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \Big|_{t=t_0} = 0$$

viz dříve Coulombova kalibrace

časová změna $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \left[-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi \right] + \Delta \phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \Delta \phi = \frac{1}{\epsilon_0} \rho + \Delta \phi$$

to je obecně nenulové a tak $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \neq 0$ v časech $t \neq t_0$

pokud zvolím $\bar{\phi}$ tak aby $\Delta \bar{\phi} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$, pak

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

tj. dostáváme Coulombovu kalibraci

Dodatek 7A : Poznámky k prostorčasové a prostorové notaci

prostorčas (4D)

události (= fč body)

4-vektory
přivodič

abstraktně

$$x, x', \sigma, \dots$$

$$u, \dot{j}, A$$

$$x, x'$$

$$\Delta x = x - x'$$

souřadnice

$$x^\alpha, x'^\alpha$$

$$u^\alpha, j^\alpha, A^\alpha$$

$$x^\alpha, x'^\alpha$$

$$\Delta x^\alpha = x^\alpha - x'^\alpha$$

prostor (3D)

body

3-vektory

přivodič

$$X, X', P, \dots$$

$$\vec{v}, \vec{j}, \vec{A}, \vec{E}, \vec{B}, \dots$$

$$\vec{x} \equiv \vec{r} = X - P$$

$$\Delta \vec{x} \equiv \vec{r}(X|X') = X - X'$$

$$x^i, x'^i$$

$$v^i, j^i, A^i, E^i, B^i$$

$$x^i$$

$$\Delta x^i \equiv r^i(X|X')$$

slovník mezi 3D a 4D zápisem

$$a \leftrightarrow a^\mu \leftrightarrow \begin{bmatrix} a^0 \\ \vec{a} \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} a^0 \\ a_i \end{bmatrix}$$

$$\text{mez: } \dot{j} \leftrightarrow \begin{bmatrix} c\dot{j} \\ \vec{j} \end{bmatrix} \quad A \leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{c}\phi \\ \vec{A} \end{bmatrix}$$

$$x \leftrightarrow x = x - \sigma \leftrightarrow x^\mu \leftrightarrow \begin{bmatrix} t \\ X \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} x^0 = ct \\ \vec{x} = X - P \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} ct \\ x^i \end{bmatrix}$$

fč. počátek
souřadny

bod-přivodič-souř.

příklady tenzorů

$$F \leftrightarrow F_{\mu\nu} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E \\ \frac{1}{c}E & \vec{B} \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_z & B_{zz} \end{bmatrix}$$

$$T_{E\eta} \leftrightarrow T_{E\eta}^{\mu\nu} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \mu & \frac{1}{c}\vec{p} \\ \frac{1}{c}\vec{p} & \vec{T} \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \mu & \frac{1}{c}S_z \\ \frac{1}{c}S_z & T_{zz} \end{bmatrix}$$

geometrické veličiny

prostorčasová
metrika

$$\eta \leftrightarrow \eta_{\mu\nu} \leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \vec{q} \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

inerciální
souřadnice

prostorová
metrika

$$q \leftrightarrow q_{zz} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

společné
souřadnice

Levi-Civita
tenzor

$$4D: \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$$

$$3D: \epsilon_{jkl} = \epsilon_{0jkl}$$

Elektrodynamika se zdroji

Vlnová rovnice pro 4-potenciál

Lorenzova kalibrační podmínka

$$\nabla_\mu A^\mu = 0$$

rovnice pro 4-potenciál

$$-\square A^\mu = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} j^\mu$$

$$\square = \eta^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$$

řešení metodou Greenovy funkce

$$(-\square G)(x|x') = \delta(x|x')$$

x, x' události (body) v prostoročase

↓

$$A^\mu(x) = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \int G(x|x') j^\mu(x') d^4x'$$

vrátíme:

$$-\square A^\mu(x) = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \int (-\square G)(x|x') j^\mu(x') d^4x' = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \int \delta(x|x') j^\mu(x') d^4x' = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} j^\mu(x)$$

nějednoznačnost Greenovy funkce

existují řešení homogenní vlnové rovnice

$$\square A^\mu = 0$$

kteřá jsou fyzikální a nechceme je vyloučit

→ EM vlny

přičtením homogenního řešení k řešení nehomogenní rovnice dává opět řešení nehomogenní rovnice se stejným zdroji

↓
Greenova funkce nemůže být jednoznačná
je nutno specifikovat počáteční / koncové podmínky

Greenova funkce

Poincarého symetrie (translační symetrie) $\Rightarrow$

$$G(x|x') = G(\Delta x) \quad \Delta x = x - x'$$

Lorentzová symetrie (izotropie a boosty) $\Rightarrow$

$$G(\Delta x) = G(\Delta x^2) \quad \Delta x^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$$

tenzorový charakter Greenovy funkce

pro 4-potenciál by Greenova funkce měla mít tenzorový charakter $G^{\mu\nu}(x|x')$ zde indexy převádí 4-vektor toku na 4-potenciál

$$F^\mu(x) = \int G^{\mu\nu}(x|x') \frac{1}{\epsilon_0} j^\nu(x') d^4\Sigma'$$

v Minkowského prostoročase se však vektorový charakter zdroje přemění pomocí globálního rovnoběžnosti

$$G^{\mu\nu}(x|x') = G(x|x') \delta^{\mu\nu}$$

kauzální charakter Greenovy funkce

$G(x|x')$ propaguje signál pouze na a uvnitř světelného kuželu časový směr šíření signálu

retardovaná Greenova fce $G_{\text{ret}}(x|x')$

- pole se šíří od zdroje do budoucnosti
- pole nenulové pouze "po" zdrojích

advancovaná Greenova fce $G_{\text{adv}}(x|x')$

- pole se šíří od zdroje do minulosti
- pole nenulové pouze "před" zdroji

symetrická Greenova fce $G_{\text{sym}}(x|x')$

$$G_{\text{sym}}(x|x') = \frac{1}{2} (G_{\text{ret}}(x|x') + G_{\text{adv}}(x|x'))$$

vztahy mezi Greenovými funkcemi

$$G_{\text{ret}}(x|x') = 2\Theta(\Delta t) G_{\text{sym}}(x|x') \quad G_{\text{adv}}(x|x') = 2\Theta(-\Delta t) G_{\text{sym}}(x|x')$$

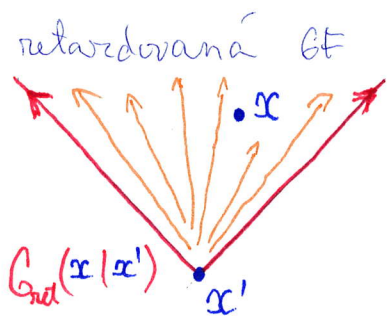
$$G_{\text{sym}}(x'|x) = G_{\text{sym}}(x|x') \quad G_{\text{adv}}(x'|x) = G_{\text{ret}}(x|x')$$

$$-\square G_{\text{sym,ret,adv}}(x|x') = \delta(x|x')$$

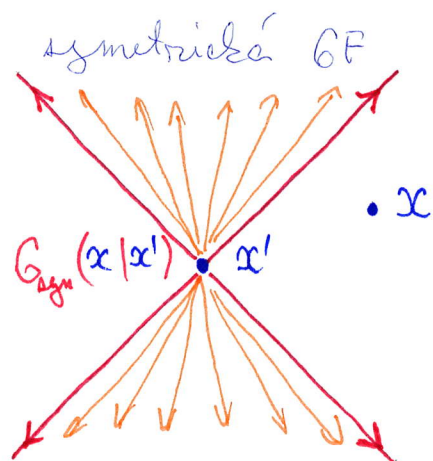
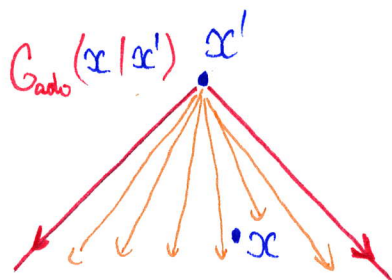
kovariantní tvar Greenovy fce

$$G_{\text{sym}}(x|x') \equiv G_{\text{sym}}(\Delta x^\mu) = \frac{1}{4\pi} \delta(\Delta x^2)$$

viz odvození v dodatku



advancovaná GF



$$G_{\text{ret}}(\Delta x^\mu) = 2\Theta(\Delta t) G_{\text{sym}}(\Delta x^\mu)$$

$$G_{\text{ret}}(\Delta x^\mu) = \frac{1}{2\pi} \Theta(\Delta t) \delta(\Delta x^2) = \frac{1}{4\pi r} \delta(ct - r)$$

$$G_{\text{adv}}(\Delta x^\mu) = 2\Theta(-\Delta t) G_{\text{sym}}(\Delta x^\mu)$$

$$G_{\text{adv}}(\Delta x^\mu) = \frac{1}{2\pi} \Theta(-\Delta t) \delta(\Delta x^2) \Leftrightarrow = \frac{1}{4\pi r} \delta(ct + r)$$

$$G_{\text{sym}}(\Delta x^\mu) = \frac{1}{2} (G_{\text{ret}}(\Delta x^\mu) + G_{\text{adv}}(\Delta x^\mu))$$

$$G_{\text{sym}}(\Delta x^\mu) = \frac{1}{4\pi} \delta(\Delta x^2) = \frac{1}{8\pi r} \delta(ct - r) + \frac{1}{8\pi r} \delta(ct + r)$$

nezovariantní tvar Greenovy funkce

$$\delta(\Delta x^2) = \delta(\underbrace{c^2 \Delta t^2 - r^2}_{\text{funkce od } \Delta x^\mu = c\Delta t})$$

funkce od $\Delta x^\mu = c\Delta t$

zobrazí: $c\Delta t = \pm r$

$$|f'(c\Delta t)| = |2c\Delta t| = 2r \quad \Downarrow$$

$$\delta(\Delta x^2) = \frac{1}{2r} \delta(ct - r) + \frac{1}{2r} \delta(ct + r)$$

$\Downarrow$

$$G_{\text{sym}}(x|x') = G_{\text{sym}}(\Delta x^\mu) = \frac{1}{4\pi} \delta(\Delta x^2) = \frac{1}{8\pi r} \delta(ct - r) + \frac{1}{8\pi r} \delta(ct + r)$$

$$G_{\text{ret}}(x|x') = G_{\text{ret}}(\Delta x^\mu) = \frac{1}{2\pi} \Theta(\Delta t) \delta(\Delta x^2) = \frac{1}{4\pi r} \delta(ct - r)$$

$$G_{\text{adv}}(x|x') = G_{\text{adv}}(\Delta x^\mu) = \frac{1}{2\pi} \Theta(-\Delta t) \delta(\Delta x^2) = \frac{1}{4\pi r} \delta(ct + r)$$

Greenovy funkce jsou kovariantní

= závisí pouze na geometrickém vztahu x a x'

- nezávisí na volbě inerc. soustavy (Poincarého symetrie)

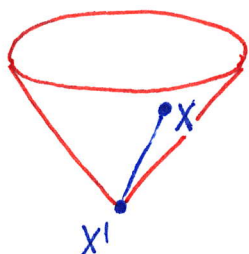
- závisí pouze na Δx^2

- závislost na $\Theta(\Delta t)$ a $\Theta(-\Delta t)$ nenarušuje kovarianci protože pouze vybírá budoucí nebo minulý světelný kužl z nosiče $\delta(\Delta x^2)$

substituce $\sim \delta$ -funkce

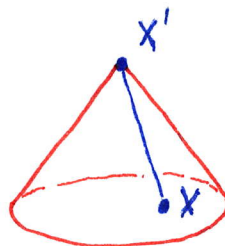
$$\delta(f(\xi)) = \sum_{\substack{\text{zobrazí } \xi_0 \\ f(\xi_0) = 0}} \frac{1}{|f'(\xi_0)|} \delta(\xi - \xi_0)$$

mosic greenovy funkce = kde je greenova funkce nenulová
 $\delta(\Delta x^2)$ zajišťuje, že greenova funkce je nenulová
 pouze pro $\Delta x^2 = 0$, tj. když $\Delta x^\alpha = (X - X')^\alpha$ je nulový 4-vektor
 $\Rightarrow X$ a X' musí být spojeny maximálními signálami
 $\Rightarrow$ EM pole se šíří maximální rychlostí = rychlostí světla



← při fixování X'
 X musí ležet
 na budoucím
 světelném
 kuželu X'

mosic $G_{ret}(X|X')$



při fixování X'
 X musí ležet
 na minulém
 světelném
 kuželu X'
 ←

mosic $G_{adv}(X|X')$

Dodatek 7B: Odvození Greenovy funkce G_{ret}, G_{adv}, G_{ay}

Fourierova transformace

$$-\square G = \delta \quad / \quad \frac{1}{(2\pi)^2} \int \dots \exp(-ik_r \Delta x^r) d^4 \Delta x$$

$$K^\mu = \begin{bmatrix} \frac{\omega}{c} \\ \vec{k} \end{bmatrix} \quad \Delta x^\mu = \begin{bmatrix} c\Delta t \\ \vec{R} \end{bmatrix}$$

levá strana =

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int \square G(\Delta x^\mu) \exp(-ik_r \Delta x^r) d^4 \Delta x =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int G(\Delta x^\mu) \square \exp(-ik_r \Delta x^r) d^4 \Delta x$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} K^2 \int G(\Delta x^\mu) \exp(-ik_r \Delta x^r) d^4 \Delta x$$

$$= K^2 \tilde{G}(K_\mu)$$

"per-parts" pro $\square \equiv \nabla_\mu \nabla^\mu$

zamedbení "pouchovejch" členů

$\square$ derivuje v proměnné x^μ v Δx^μ

zde $K^2 = g^{\mu\nu} K_\mu K_\nu$

$\tilde{G}(K_\mu)$ je Fourier $G(\Delta x^\mu)$

pravá strana =

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \delta(\Delta x^\mu) \exp(-ik_r \Delta x^r) d^4 \Delta x$$

integrál δ -funkce

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}$$

$\Downarrow$

obnově rovnice ve Fourierově obrazu

$$K^2 \tilde{G}(K_\mu) = \frac{1}{(2\pi)^2}$$

$\Downarrow$

$$\tilde{G}(K_\mu) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{K^2}$$

← problematizace operace!
 $1/K^2$ není distribučně dobře definováno

řektná Fourierova transformace

$$G(\Delta x^\mu) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{G}(K_\mu) \exp(ik_r \Delta x^r) d^4 K$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{K^2} \exp(ik_r \Delta x^r) d^4 K$$

$\uparrow$
není regulární $\Rightarrow$ problém s integrací

nepřímá transformace Greenovy funkce

rovnici $K^2 G(K_\mu) = \frac{1}{(2\pi)^2}$ splňuje více funkcí $G(K_\mu)$

napr. můžeme přičíst $c \delta(K^2)$ protože $K^2 \delta(K^2) = 0$

nepřímá transformace odpovídá tomu, že jsme zatím neřekli počáteční/konečné podmínky

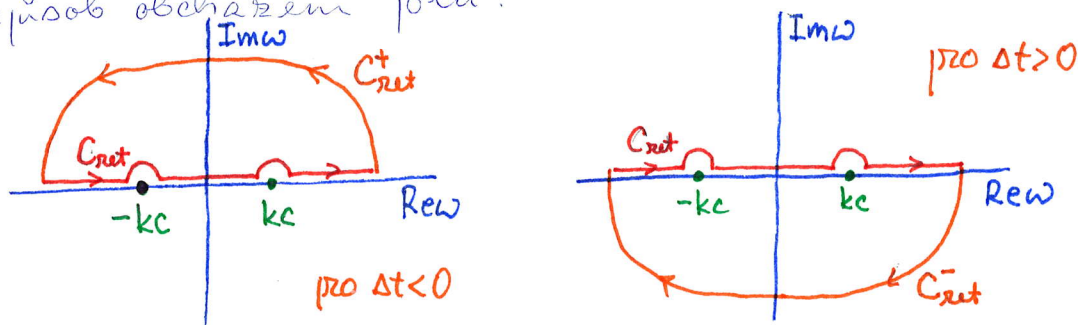
bude provést vhodnou regularizaci posledního integrálu

integrace přes frekvence

integrál $\int \dots d^4k$ rozdělíme na integrace $\int \dots d\omega d^3\vec{k}$
 kde vlnový 4-vektor je $k_\mu = [-\frac{\omega}{c}, \vec{k}]$ a $\Delta x^\mu = \begin{bmatrix} c\Delta t \\ \vec{r} \end{bmatrix}$ $k^2 = \vec{k} \cdot \vec{k}$

$$G(\Delta x^\mu) = \frac{c}{(2\pi)^4} \iint \frac{1}{-\omega^2 + k^2 c^2} \exp(-i\omega\Delta t) d\omega \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3\vec{k}$$

jako funkce od ω má dva póly v $\omega = \pm kc$
 způsob obcházení pólů:



uvážejme integraci podél C_{ret} - cesta "nad póly"

- pro $\Delta t < 0$ dostaneme

$$\text{Re}(-i\omega\Delta t) < 0 \quad \text{pokud} \quad \text{Im}\omega > 0$$

pokud uzavřeme C_{ret} v horní poloovině $\text{Im}\omega > 0$ tak
 exponentiála $\exp(-i\omega\Delta t)$ bude pro $|\omega| \rightarrow \infty$ zanedbatelná

$$\Downarrow \quad G(\Delta x^\mu) = \frac{c}{(2\pi)^4} \int_{C_{ret}^+} \frac{1}{-\omega^2 + k^2 c^2} \exp(-i\omega\Delta t) d\omega \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3\vec{k}$$

$\Downarrow$ residuová věta $\Rightarrow$ residua uvnitř C_{ret}^+ - žádné póly!

$$G(\Delta x^\mu) = 0 \quad \text{pro} \quad \Delta t < 0$$

$\Downarrow$ to je přesně retardovaná počáteční podmínka

$\Downarrow$ cesta C_{ret} definuje retardovanou Greenovu funkci G_{ret}

- pro $\Delta t > 0$ dostáváme

$$\text{Re}(-i\omega\Delta t) < 0 \quad \text{pokud} \quad \text{Im}\omega < 0$$

cestu C_{ret} můžeme uzavřít do C_{ret}^- protože exponentiála
 $\exp(-i\omega\Delta t)$ zde bude pro $|\omega| \rightarrow \infty$ zanedbatelná

$$G_{ret}(\Delta x^\mu) = \frac{c}{(2\pi)^4} \int_{C_{ret}^-} \frac{1}{-\omega^2 + k^2 c^2} \exp(-i\omega\Delta t) d\omega \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3\vec{k}$$

$$\left[\frac{1}{2kc} \left(-\frac{1}{\omega - kc} + \frac{1}{\omega + kc} \right) \right]$$

$$-2\pi i \text{Res} \frac{1}{2kc} \left(-\frac{\exp(-i\omega\Delta t)}{\omega - kc} + \frac{\exp(-i\omega\Delta t)}{\omega + kc} \right) =$$

$$= \frac{2\pi}{kc} \frac{1}{2i} (-\exp(-ikc\Delta t) + \exp(ikc\Delta t)) = \frac{2\pi}{kc} \sin(kc\Delta t)$$

$$\begin{aligned}
 \Downarrow \\
 G_{\text{ret}}(\Delta x^\alpha) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{k} \sin(kc\Delta t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) d^3\vec{k} \\
 &\quad \xi = -\cos\vartheta \quad k\varpi \cos\vartheta \quad k^2 dk \sin\vartheta d\vartheta d\varphi \\
 &\quad d = \sin\vartheta d\vartheta \quad \vartheta \text{ je úhel mezi } \vec{k} \text{ a } \vec{x} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 d\xi \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \quad k \sin(kc\Delta t) \exp(-ik\varpi \xi) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \quad k \sin(kc\Delta t) \frac{1}{ik\varpi} \left[-\exp(-ik\varpi \xi) \right]_{-1}^1 \\
 &= \frac{1}{2\pi^2 \varpi} \int_0^\infty dk \sin(kc\Delta t) \sin(k\varpi) \\
 &= \frac{1}{4\pi \varpi} \delta(c\Delta t - \varpi)
 \end{aligned}$$

zde jsme využili relaci úplnosti na polopřímce

$$\delta(x_1 - x_2) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(kx_1) \sin(kx_2) dk$$

retardovaná greenova funkce

$$G_{\text{ret}}(\Delta x^\alpha) = \frac{1}{4\pi \varpi} \delta(c\Delta t - \varpi) \quad \begin{cases} = 0 & \text{pro } \Delta t < 0 \\ \text{nenulové} & \text{pro } \Delta t > 0 \end{cases}$$

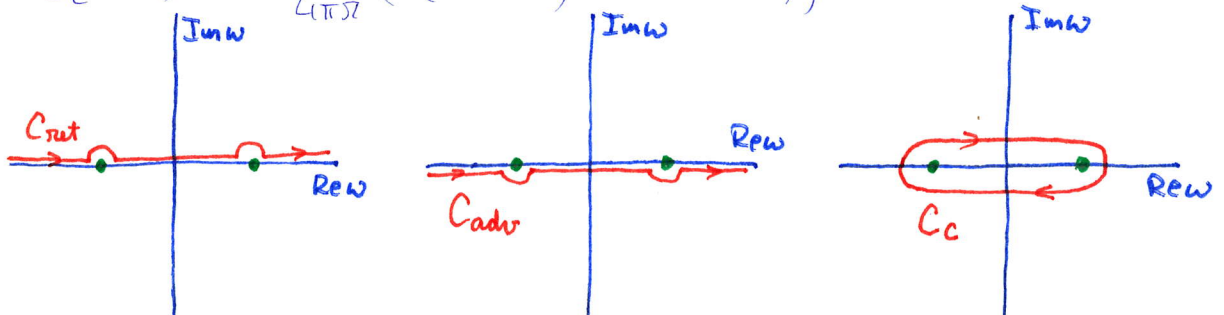
advancovaná greenova funkce

$$G_{\text{adv}}(\Delta x^\alpha) = \frac{1}{4\pi \varpi} \delta(c\Delta t + \varpi) \quad \begin{cases} \text{nenulové} & \text{pro } \Delta t < 0 \\ = 0 & \text{pro } \Delta t > 0 \end{cases}$$

obdobný výpočet ale s použitím integrační cesty "pod póly"
symetrická a kauzální greenova funkce

$$G_{\text{sym}}(\Delta x^\alpha) = \frac{1}{8\pi \varpi} (\delta(c\Delta t - \varpi) + \delta(c\Delta t + \varpi))$$

$$G_{\text{C}}(\Delta x^\alpha) = \frac{1}{4\pi \varpi} (\delta(c\Delta t - \varpi) - \delta(c\Delta t + \varpi))$$



kovariantní forma greenovy funkce

$$\delta(\Delta x^2) = \delta(\underbrace{c^2 \Delta t^2 - r^2})$$

kořenů: $c\Delta t = \pm r$

identita:

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_0: f(x_0)=0} \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x-x_0)$$

$$= \frac{1}{2r} \delta(c\Delta t - r) + \frac{1}{2r} \delta(c\Delta t + r)$$

dostáváme tak

$$G_{\text{ret}}(\Delta x^\alpha) = \frac{1}{4\pi} \delta(\Delta x^2) = \frac{1}{8\pi r} (\delta(c\Delta t - r) + \delta(c\Delta t + r))$$

$$G_{\text{ret}}(\Delta x^\alpha) = \frac{1}{2\pi} \Theta(\Delta t) \delta(\Delta x^2) = \frac{1}{4\pi r} \delta(c\Delta t - r)$$

$$G_{\text{adv}}(\Delta x^\alpha) = \frac{1}{2\pi} \Theta(-\Delta t) \delta(\Delta x^2) = \frac{1}{4\pi r} \delta(c\Delta t + r)$$

$$G_c(\Delta x^\alpha) = \frac{1}{2\pi} \text{sign} \Delta t \delta(\Delta x^2) = \frac{1}{4\pi r} (\delta(c\Delta t - r) - \delta(c\Delta t + r))$$

Retardovaný potenciál

$$A_{\text{ret}}^{\mu}(x) = \int G_{\text{ret}}(x|x') \frac{1}{\epsilon_0 c^2} j^{\mu}(x') d^4\Omega'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{1}{r} \underset{t-t'}{\delta(ct-\pi)} j^{\mu}(t', \vec{x}') c dt' dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j^{\mu}(t-\frac{r}{c}, \vec{x}')}{r} dV'$$

⇓

$$\phi_{\text{ret}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q(t-\frac{r}{c}, \vec{x}')}{r} dV'$$

$$\vec{A}_{\text{ret}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\vec{j}(t-\frac{r}{c}, \vec{x}')}{r} dV'$$

$$x \rightarrow \begin{bmatrix} ct \\ \vec{x} \end{bmatrix} \quad x' \rightarrow \begin{bmatrix} ct' \\ \vec{x}' \end{bmatrix}$$

$$\Delta x \rightarrow \begin{bmatrix} c\Delta t \\ \vec{r} \end{bmatrix} \quad \Delta t = t-t' \\ \vec{r} = \vec{x} - \vec{x}'$$

$$A^{\mu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c}\phi \\ \vec{A} \end{bmatrix} \quad j^{\mu} = \begin{bmatrix} \rho c \\ \vec{j} \end{bmatrix}$$

potenciály pro zadané rozložení náboje a proudu
zdroje se vyčíslejí v retardovaném čase

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{r}{c} \quad \leftarrow \text{funkce } t, \vec{x}, \vec{x}'$$

tj. v čase kdy musí být vyslán signál, aby rychlostí c
proletěl vzdálenost r přesně do času t

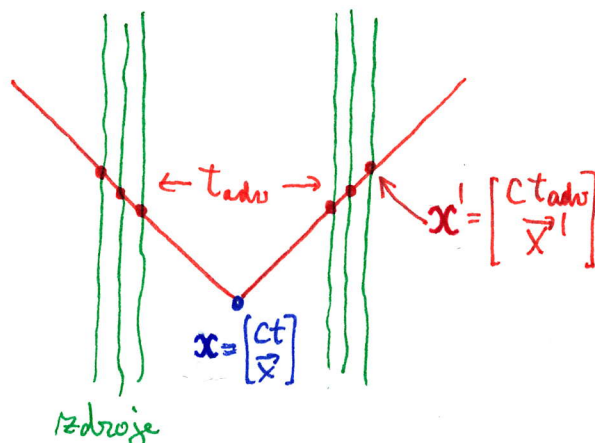
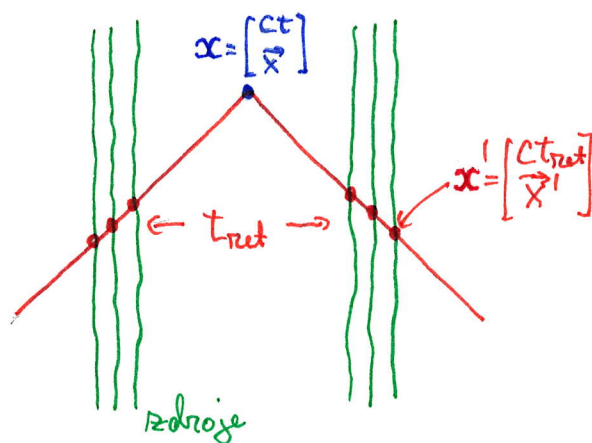
Advancované řešení

obdobně

$$\phi_{\text{adv}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q(t+\frac{r}{c}, \vec{x}')}{r} dV'$$

$$\vec{A}_{\text{adv}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\vec{j}(t+\frac{r}{c}, \vec{x}')}{r} dV'$$

zdroje se vyčíslejí v advancovaném čase $t_{\text{adv}} = t + \frac{r}{c}$



Retardované či advancedované řešení

mějme obecné pole splňující vlnovou rovnici pro zadané rozložení nábojů a proudů

$$-\square A^\mu = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} j^\mu$$

toto pole lze vždy napsat ve tvaru

$$A^\mu = A_{\text{ret}}^\mu + A_{\text{in}}^\mu$$

$$\square A_{\text{in}}^\mu = 0$$

zde

$$= A_{\text{adv}}^\mu + A_{\text{out}}^\mu$$

$$\square A_{\text{out}}^\mu = 0$$

pokud se zdroji asociujeme retardované pole A_{ret}^μ

A_{in}^μ má interpretaci "volné pole, které bylo již před zdroji" tj. pole které vstupuje do prostoročasu v dávne minulosti a je nezávislé na zdrojích

pokud se zdroji asociujeme advancedované pole A_{adv}^μ

A_{out}^μ má interpretaci "volné pole, které zůstane po zdrojích" tj. pole které odchází z prostoročasu v daleké budoucnosti a je nezávislé na zdrojích

nezávislost na zdrojích můžeme splnit zároveň pro

A_{in}^μ i pro A_{out}^μ - vskutku tzv. radiacní pole

$$A_{\text{rad}}^\mu \equiv A_{\text{out}}^\mu - A_{\text{in}}^\mu = A_{\text{ret}}^\mu - A_{\text{adv}}^\mu$$

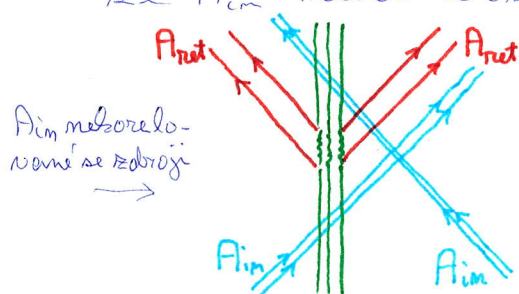
kteřé udává rozdíl mezi A_{out}^μ a A_{in}^μ závisí na zdrojích

$$A_{\text{rad}}^\mu(x) = \int G_c(x|x') \frac{1}{\epsilon_0 c^2} j^\mu(x') d^4Z \quad \Leftarrow G_c = G_{\text{ret}} - G_{\text{adv}}$$

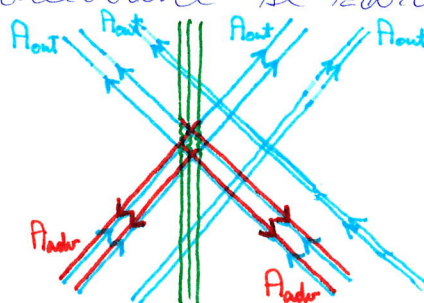
tj. pokud A_{in}^μ není korelované se zdroji, A_{out}^μ musí být

experimentální zkušenost

má se zkušenost, že příčina předchází následek, ukazuje, že se zdroji máme asociovat A_{ret}^μ a že A_{in}^μ není běžně korelované se zdroji



=



A_{out}^μ korelované se zdroji

Jefimenkovy vzťahy pre $\vec{E}$ a $\vec{B}$

elektrická intenzita a magnetická indukcia pre
 dané rozloženie nábojov

potenciály

$$\phi(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(t - \frac{R}{c}, \vec{x}')}{R} dV'$$

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\vec{j}(t - \frac{R}{c}, \vec{x}')}{R} dV'$$

$$R = |\vec{x} - \vec{x}'| \quad \vec{R} = \vec{x} - \vec{x}'$$

$$\vec{e} = \frac{\vec{R}}{R}$$

pole

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \left[\vec{\nabla} \frac{\rho(t - \frac{R}{c}, \vec{x}')}{R} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\vec{j}(t - \frac{R}{c}, \vec{x}')}{R} \right]$$

↑ derivácia podľa $\vec{x}$

$$\vec{\nabla} R = \frac{\vec{R}}{R} = \vec{e} \quad \vec{\nabla} \left(t - \frac{R}{c} \right) = -\frac{1}{c} \vec{e}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \left[-\frac{1}{c} \frac{\partial \rho(t - \frac{R}{c}, \vec{x}')}{\partial t} \frac{\vec{e}}{R} - \rho(t - \frac{R}{c}, \vec{x}') \frac{\vec{e}}{R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \left(t - \frac{R}{c}, \vec{x}' \right) \frac{1}{R} \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \left[\rho(t - \frac{R}{c}, \vec{x}') \frac{\vec{e}}{R^2} + \frac{\partial \rho(t - \frac{R}{c}, \vec{x}')}{\partial t} \frac{\vec{e}}{cR} - \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \left(t - \frac{R}{c}, \vec{x}' \right) \frac{1}{c^2 R} \right]$$

coulombidy člen derivé členy závislé na premenných zdrojoch

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int dV' \vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}(t - \frac{R}{c}, \vec{x}')}{R} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int dV' \left[\left(\vec{\nabla} \frac{1}{R} \right) \times \vec{j}(t - \frac{R}{c}, \vec{x}') - \frac{1}{R} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \left(t - \frac{R}{c}, \vec{x}' \right) \times \vec{\nabla} \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int dV' \left[\vec{j}(t - \frac{R}{c}, \vec{x}') \times \frac{\vec{e}}{R^2} + \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \left(t - \frac{R}{c}, \vec{x}' \right) \times \frac{\vec{e}}{cR} \right]$$

Biot-Savart

derivový člen

Dodatek 7C : Nábojové a proudové hustoty elementárních zdrojů

Proměnný elektrický dipól

hustota monopólu v X_0

$$\rho(x) = q \delta_{X_0}(x)$$

hustota dipólu

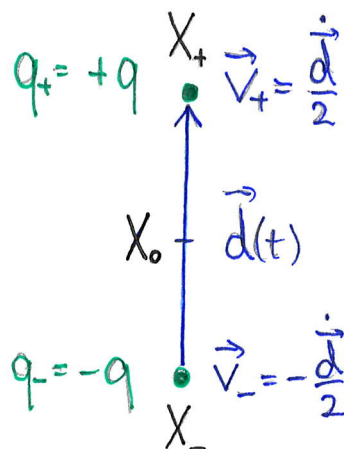
$$\rho_{\text{dip}}(x) = q_+ \delta_{X_+}(x) + q_- \delta_{X_-}(x)$$

$$= q \delta(x|X_+) - q \delta(x|X_-)$$

$$= q \delta(x|X_0 + \frac{\vec{d}}{2}) - q \delta(x|X_0 - \frac{\vec{d}}{2})$$

$$= q \delta(x|X_0) + q \frac{\vec{d}}{2} \cdot (\vec{\nabla} \delta)(x|X_0) - q \delta(x|X_0) - q \frac{\vec{d}}{2} \cdot (\vec{\nabla} \delta)(x|X_0) + \dots$$

$$= - q \vec{d} \cdot (\vec{\nabla} \delta)(x|X_0) = - \vec{p} \cdot (\vec{\nabla} \delta)(x|X_0)$$



limita

$$d \rightarrow 0$$

$$q \rightarrow \infty$$

$$\vec{p} = q \vec{d}$$

konstantní

$$\text{poznámka: } \vec{\nabla}' \delta(x|x') = - \vec{\nabla} \delta(x|x')$$

časově proměnný dipól

$$\rho_{\text{dip}}(x) = - \vec{p}(t) \cdot (\vec{\nabla} \delta)(x|X_0)$$

hustota proudu proměnného dipólu

$$\vec{j}_{\text{dip}}(x) = q_+ \vec{v}_+ \delta_{X_+}(x) + q_- \vec{v}_- \delta_{X_-}(x)$$

$$= q \frac{\dot{\vec{d}}}{2} \delta(x|X_+) + (-q) \left(-\frac{\dot{\vec{d}}}{2}\right) \delta(x|X_-) =$$

$$= q \dot{\vec{d}} \delta(x|X_0) + \text{členy vyššího řádu v } d$$

$$= \dot{\vec{p}}(t) \delta(x|X_0)$$

rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho_{\text{dip}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{dip}} = - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \delta_{X_0}) + \vec{\nabla} \cdot (\dot{\vec{p}} \delta_{X_0}) = - \dot{\vec{p}} \cdot \vec{\nabla} \delta_{X_0} + \dot{\vec{p}} \cdot \vec{\nabla} \delta_{X_0} = 0$$

zápis pomocí průvodičů

$$X = P + \vec{x} \quad X_0 = P + \vec{x}_0$$

$$\rho_{\text{dip}}(t, \vec{x}) = - \vec{p}(t) \cdot \vec{\nabla} \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

$$\vec{j}_{\text{dip}}(t, \vec{x}) = \dot{\vec{p}}(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

poznámka: používáme několik různých značení pro to samé

$$\delta(x|X_0) = \delta_{X_0}(x) = \delta(X - X_0) = \delta(\vec{x}|\vec{x}_0) = \delta_{\vec{x}_0}(\vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

Pole proměnného elektrického dipólu

mábojová a proudová hustota dipólu v $\vec{x}_0$

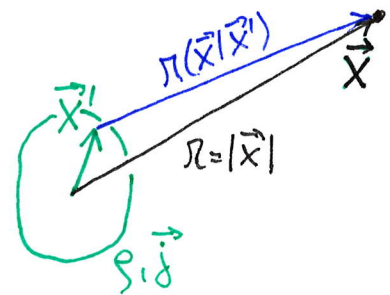
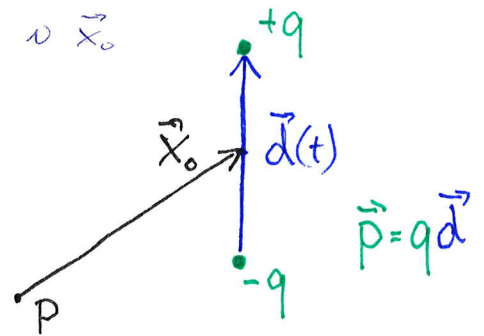
$$\rho_{\text{dip}}(t, \vec{x}_0) = -\vec{p}(t) \cdot \vec{\nabla} \delta_{\vec{x}_0}(\vec{x})$$

$$\vec{j}_{\text{dip}}(t, \vec{x}_0) = \dot{\vec{p}}(t) \delta_{\vec{x}_0}(\vec{x})$$

zvolíme dipól v počátku $\vec{x}_0 = 0$

vztahy po potenciálu

$$\begin{aligned} \vec{A}(t, \vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\vec{j}(t - \frac{r(\vec{x}|\vec{x}')}{c}, \vec{x}')}{r(\vec{x}|\vec{x}')} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{r(\vec{x}|\vec{x}')}{c}) \delta(\vec{x}')}{r(\vec{x}|\vec{x}')} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{r} \quad r = r(\vec{x}|\vec{0}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \phi(t, \vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(t - \frac{r(\vec{x}|\vec{x}')}{c}, \vec{x}')}{r(\vec{x}|\vec{x}')} dV' \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{p}(t - \frac{r(\vec{x}|\vec{x}')}{c}) \cdot \vec{\nabla}' \delta(\vec{x}')}{r(\vec{x}|\vec{x}')} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{p}(t - \frac{r(\vec{x}|\vec{x}')}{c})}{r(\vec{x}|\vec{x}')} \right) \delta(\vec{x}') dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{\vec{e}(\vec{x}|\vec{x}') \cdot \vec{p}(t - \frac{r(\vec{x}|\vec{x}')}{c})}{r(\vec{x}|\vec{x}')^2} + \frac{\vec{e}(\vec{x}|\vec{x}') \cdot \dot{\vec{p}}(t - \frac{r(\vec{x}|\vec{x}')}{c})}{c r(\vec{x}|\vec{x}')} \right] \delta(\vec{x}') dV' \end{aligned}$$

$$\text{ kde } \vec{\nabla}' r(\vec{x}|\vec{x}') = -\vec{\nabla} r(\vec{x}|\vec{x}') = -\vec{e}(\vec{x}|\vec{x}') \quad \Leftarrow r(\vec{x}|\vec{x}') = |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{e}(\vec{x}|\vec{x}') = \frac{\vec{r}(\vec{x}|\vec{x}')}{r(\vec{x}|\vec{x}')}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{e} \cdot \vec{p}(t - \frac{r}{c})}{r^2} + \frac{\vec{e} \cdot \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{c r} \right] \quad \Leftarrow r = r(\vec{x}|\vec{0}) \quad \vec{e} = \vec{e}(\vec{x}|\vec{0})$$

záruvé členy v $\vec{E}$ a $\vec{B}$
= klesá mí jako $\frac{1}{r}$

V-derivace členů $\frac{1}{r}$ či $\frac{1}{r^2}$ dá minimálně $\frac{1}{r^2} \Rightarrow$ zanedbatelné
přispěvek pouze od derivace retardovaného času $t - \frac{r}{c}$

$$\vec{B}(t, \vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{e} \times \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{r} + O(\frac{1}{r^2})$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(t, \vec{r}) &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\frac{\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{r} - \frac{\vec{e} \cdot \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \vec{e}}{r} \right] + O(\frac{1}{r^2}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{e} \times (\vec{e} \times \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}))}{r} + O(\frac{1}{r^2}) \end{aligned}$$

z rovnání dostáváme

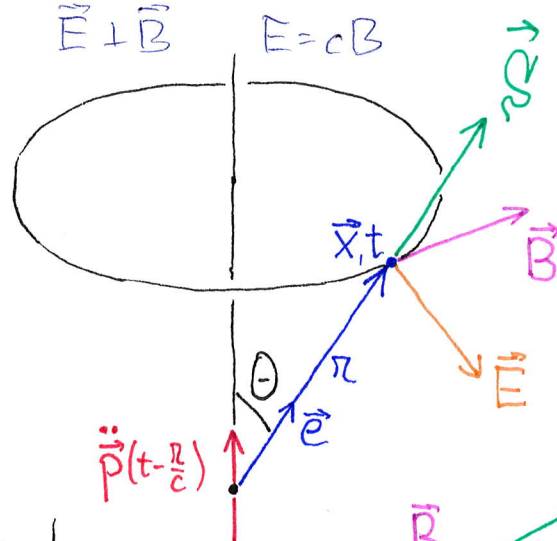
$$\vec{E} = -\vec{e} \times c\vec{B}$$

$$\vec{E} \perp \vec{e}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{e} \times \vec{E}$$

$$\vec{B} \perp \vec{e}$$

3D:



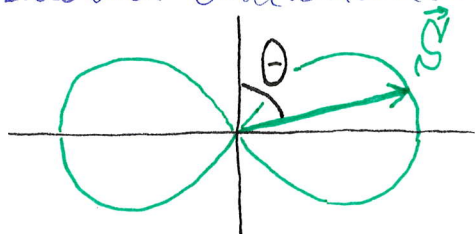
Poyntingův vektor

$$\vec{S} = \epsilon_0 c \vec{E} \times \vec{B} = \epsilon_0 c E^2 \vec{e}$$

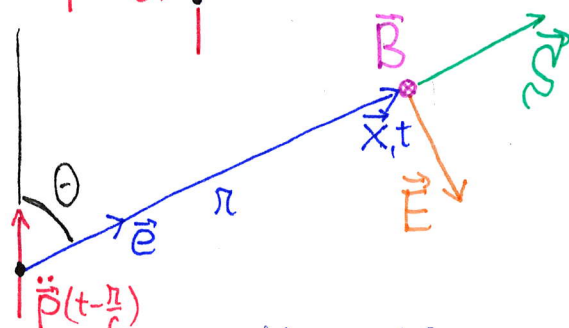
$$= \frac{1}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3} \frac{|\vec{e} \times \ddot{\vec{p}}_{\text{ret}}|^2}{r^2} \vec{e} =$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3} \frac{|\ddot{\vec{p}}_{\text{ret}}|^2}{r^2} \sin^2 \theta \vec{e}$$

výzařovací charakteristika



2D:



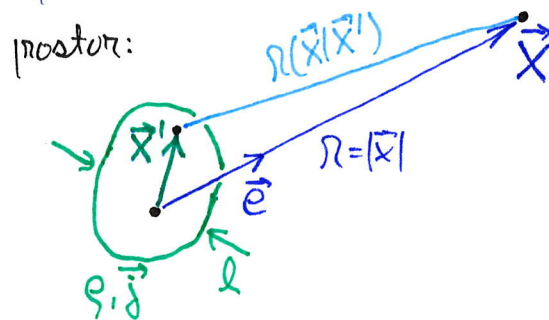
celková rychlost vyzařování energie skrze velkou sféru

$$R = \int_{\text{sféra velká}} \vec{S} \cdot d\vec{S} = \frac{|\ddot{\vec{p}}_{\text{ret}}|^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3} \int \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta \underbrace{r^2 \sin \theta d\theta d\phi}_{\frac{4}{3} 2\pi} = \frac{2}{3} \frac{|\ddot{\vec{p}}_{\text{ret}}|^2}{4\pi \epsilon_0 c^3}$$

Obecné rozložení nábojů a proudů

$$\phi(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(t - \frac{R(\vec{x}|\vec{x}'), \vec{x}')}{c}, \vec{x}')}{R(\vec{x}|\vec{x}')} dV'$$

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\vec{j}(t - \frac{R(\vec{x}|\vec{x}'), \vec{x}')}{c}, \vec{x}')}{R(\vec{x}|\vec{x}')} dV'$$



aproximace 1)

jele daleko od zdroje

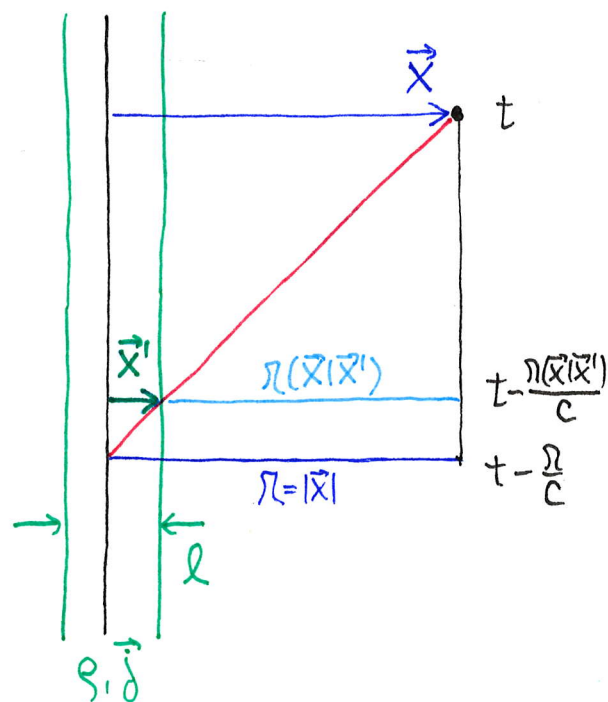
$$|\vec{x}'| \sim l \ll |\vec{x}| \equiv R$$

$$R(\vec{x}|\vec{x}') = \sqrt{(\vec{x} - \vec{x}')^2} = \sqrt{\vec{x}^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}' + \vec{x}'^2}$$

$$= R \left(1 - \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{R^2} + \dots \right) = R - \vec{e} \cdot \vec{x}' + \dots$$

$$\frac{1}{R(\vec{x}|\vec{x}')} = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{\vec{e} \cdot \vec{x}'}{R} + \dots \right)$$

prostorčas:



aproximace 2)

charakteristický čas změny zdroje T
je větší než šíření signálu zdrojem

$$\frac{l}{c} \ll T \Leftrightarrow \omega \frac{l}{c} \ll 1 \Leftrightarrow l \ll \lambda$$

kde $\omega \sim \frac{1}{T}$ je frekvence zdroje, λ vlnová délka zdroje a l rozměr zdroje

$$t - \frac{R(\vec{x}|\vec{x}')}{c} = t - \frac{R}{c} + \frac{\vec{e} \cdot \vec{x}'}{c} + \dots \text{ budeme rozvíjet v } \omega \frac{\vec{e} \cdot \vec{x}'}{c}$$

např. pro hustotu náboje v retardované čase

$$\rho(t - \frac{R(\vec{x}|\vec{x}')}{c}, \vec{x}') = \rho(t - \frac{R}{c}, \vec{x}') + \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}(t - \frac{R}{c}, \vec{x}')}_{\sim \omega} \frac{\vec{e} \cdot \vec{x}'}{c} + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}(t - \frac{R}{c}, \vec{x}')}_{\sim \omega^2} \left(\frac{\vec{e} \cdot \vec{x}'}{c} \right)^2 + \dots$$

uvážejme pouze 0-ty a první člen v rozvoji

$$\vec{j}(t - \frac{R(\vec{x}|\vec{x}')}{c}, \vec{x}') = \vec{j}(t - \frac{R}{c}, \vec{x}') + \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}(t - \frac{R}{c}, \vec{x}') \frac{\vec{e} \cdot \vec{x}'}{c} + \dots$$

pro proud bude stačit uvažovat pouze nulový člen

- bude srovnatelný s první členem z nábojové hustoty
zkrácená notace

$$\rho(t - \frac{R}{c}, \vec{x}') = \rho_{\text{ret}}(\vec{x}') \quad \vec{j}(t - \frac{R}{c}, \vec{x}') = \vec{j}_{\text{ret}}(\vec{x}') \quad \text{atd.}$$

aplikace aproximací na potenciály:

$$\begin{aligned}\phi(t, \vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\rho_{\text{ret}}(\vec{x}') + \frac{\partial \rho_{\text{ret}}(\vec{x}')}{\partial t} \frac{\vec{e} \cdot \vec{x}'}{c} + \dots \right] \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{e} \cdot \vec{x}'}{r} + \dots \right) dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int \left[\rho_{\text{ret}}(\vec{x}') + \rho_{\text{ret}}(\vec{x}') \vec{x}' \cdot \frac{\vec{e}}{r} + \frac{\partial \rho_{\text{ret}}(\vec{x}')}{\partial t} \vec{x}' \cdot \frac{\vec{e}}{c} + \dots \right] dV' \\ Q_{\text{ret}} &= \int \rho_{\text{ret}}(\vec{x}') dV' \quad \vec{p}_{\text{ret}} = \int \rho_{\text{ret}}(\vec{x}') \vec{x}' dV' \quad \int \frac{\partial \rho_{\text{ret}}(\vec{x}')}{\partial t} \vec{x}' dV' = \frac{d}{dt} \int \rho_{\text{ret}}(\vec{x}') \vec{x}' dV' = \dot{\vec{p}}_{\text{ret}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\underbrace{\frac{Q_{\text{ret}}}{r}}_{\text{monopol}} + \underbrace{\frac{\vec{p}_{\text{ret}} \cdot \vec{e}}{r^2} + \frac{\dot{\vec{p}} \cdot \vec{e}}{c r}}_{\text{dipol}} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}(t, \vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \left(\vec{j}_{\text{ret}}(\vec{x}') + \dots \right) \frac{1}{r} \left(1 + \dots \right) dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\dot{\vec{p}}_{\text{ret}}}{r}\end{aligned}$$

výsledek:

$$\dot{\vec{p}}_{\text{ret}} = \frac{d}{dt} \int \vec{r} \bar{x} dV = \int \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \bar{x} dV \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rov. kontinuity}}}{=} - \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) \bar{x} dV = \int \vec{j} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \bar{x}}_{\vec{r}} dV = \int \vec{j} dV$$

potenciály jsou dány:

- monopolový člen $\frac{Q_{\text{ret}}}{r}$,

zákon zachování náboje $\Rightarrow Q_{\text{ret}} = Q = \text{konst}$

$\vec{\nabla}$ -derivace dává $\sim \frac{1}{r^2}$ člen - nepřispívá do záře

- dipólové členy

dostali jsme přesné výrazy malozemě pro elektro. dipól

zářivá charakteristika - viz dipól výše

do úhlu $d\omega$: $\vec{S} \cdot \vec{e} d\omega = \frac{|\dot{\vec{p}}_{\text{ret}}|^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c} \sin^2 \theta d\omega$

celkově $Q = \frac{2}{3} \frac{|\dot{\vec{p}}_{\text{ret}}|^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}$

Příklady:

harmonický dipól

$$\vec{p}(t) = p_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z \quad \ddot{\vec{p}}(t) = -\omega^2 p_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} \langle R \rangle &= \frac{2}{3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} p_0^2 \omega^4 \langle \cos^2(\omega t) \rangle \leftarrow \text{průměrování za periodu} \rightarrow \frac{1}{2} \\ &= \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \end{aligned}$$

monopól - pomalu se pohybující náboj
náboj pohybující se pomalu v oblasti veličnosti l
trajektorie $\vec{x}_e(t)$

$$\text{dipól} \quad \vec{p}(t) = q \vec{x}_e(t) \quad \ddot{\vec{p}}(t) = q \vec{a}$$

$$R = \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}$$

Larmorova formule

Pole bodového náboje

Liénardovy-Wiechertovy potenciály
 potenciál bodového náboje o světové křivce $x_0(\tau)$
 hustota proudu

$$j^\mu(x) = \int q u^\mu(\tau) \delta(x|x_0(\tau)) c d\tau$$

$x_0^\mu(\tau)$ souřadnice světové křivky $x_0(\tau)$

$u^\mu(\tau) = \frac{dx_0^\mu(\tau)}{d\tau}$ 4-rychlost náboje

$\delta(x|x')$ normované na 4-objem $d^4x = c dt dV$

retardované řešení

$$A^\mu(x) = \int G_{\text{ret}}(x|x') \frac{1}{\epsilon_0 c^2} j^\mu(x') d^4x' =$$

$$= \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \iint \Theta(\Delta t) \delta((x-x')^2) c q u^\mu(\tau) \delta(x'|x_0(\tau)) d\tau d^4x'$$

ant. d^4x'

$$= \frac{q}{2\pi\epsilon_0 c^2} \int \Theta(\Delta t) \delta((x-x_0(\tau))^2) u^\mu(\tau) d\tau$$

$$f(\tau) = (x^\alpha - x_0^\alpha(\tau)) \eta_{\alpha\beta} (x^\beta - x_0^\beta(\tau))$$

$$\frac{df}{d\tau}(\tau) = -2(x^\alpha - x_0^\alpha(\tau)) \eta_{\alpha\beta} u^\beta(\tau) = 2c R_0$$

řešení $(x-x_0(\tau))^2 = 0$ pro $\tau = \tau_{\text{ret}}$ a τ_{adv}

$\Theta(\Delta t)$ přijímá pouze $\tau = \tau_{\text{ret}}$

0 $\approx$ máme $R_0(\tau) = -\frac{1}{c} (x^\alpha - x_0^\alpha(\tau)) u_\alpha(\tau)$

$$= \frac{q}{2\pi\epsilon_0 c^2} \int \Theta(\Delta t) \frac{1}{\left| \frac{df}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_{\text{ret}}}} \delta(\tau - \tau_{\text{ret}}) u^\mu(\tau) d\tau$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{u^\mu}{R_0} \Big|_{\tau_{\text{ret}}}$$

platí

$$R_{\text{adv}} = -\frac{1}{c} u_\alpha (x^\alpha - x_0^\alpha(\tau_{\text{adv}})) = -\left[\gamma, \delta \frac{\vec{v}}{c} \right] \cdot \left[\frac{\Delta t c}{R} \right] = \gamma R \left(1 - \frac{\vec{e} \cdot \vec{v}}{c} \right) \Big|_{\tau_{\text{adv}}}$$

protože díky $(x-x_0(\tau_{\text{ret}}))^2 = 0$ máme

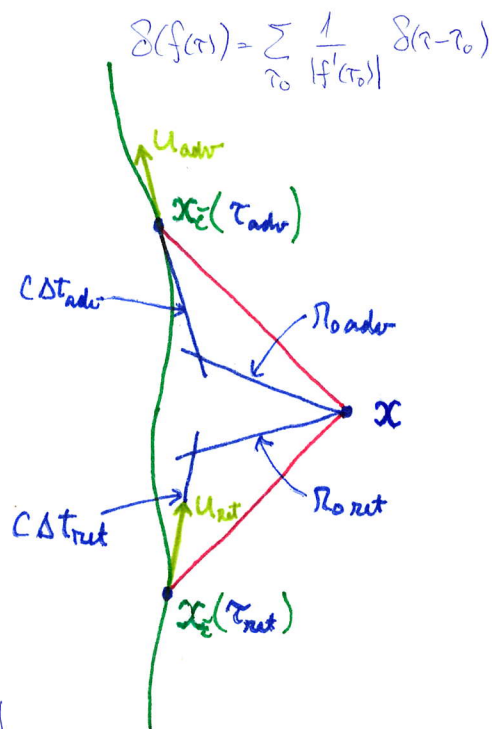
$$c \Delta t \Big|_{\tau_{\text{ret}}} = R \Big|_{\tau_{\text{ret}}}$$

rozštěpení na skalární a vektorový potenciál

$$\phi(t, \vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(1 - \frac{\vec{e} \cdot \vec{v}}{c})} \Big|_{\tau_{\text{ret}}}$$

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{v}}{R(1 - \frac{\vec{e} \cdot \vec{v}}{c})} \Big|_{\tau_{\text{ret}}}$$

Liénardovy-Wiechertovy potenciály



$\vec{E}$ a $\vec{B}$ bodového náboje

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

poté s derivací výrazů vyčíslených v retardovaném čase budeme rozumět, že poloha, rychlost, ... jsou parametrizované souřadnicovým časem ve zvolené soust. retardovaný čas je dán podmínkou

$$(x - x_c(t_{\text{ret}}))^2 = 0 \quad t_{\text{ret}} < t$$

$$\uparrow c(t - t_{\text{ret}}) = |\vec{x} - \vec{x}_c(t_{\text{ret}})| = R_{\text{ret}}$$

t_{ret} chápeme jako funkci $t_{\text{ret}}(t, \vec{x})$

derivací definiční rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow 1 - \frac{\partial t_{\text{ret}}}{\partial t} &= -\frac{1}{c} \frac{1}{R_{\text{ret}}} \vec{R}_{\text{ret}} \cdot \frac{d\vec{x}_c}{dt}(t_{\text{ret}}) \frac{\partial t_{\text{ret}}}{\partial t} \quad \text{Zde } \vec{R}(t) = \vec{x} - \vec{x}_c(t) \\ &\Rightarrow \frac{\partial t_{\text{ret}}}{\partial t} = \left(1 - \frac{\vec{E}_{\text{ret}} \cdot \vec{V}_{\text{ret}}}{c}\right)^{-1} \quad \vec{E}(t) = \frac{\vec{R}(t)}{R(t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \Rightarrow -\vec{\nabla}(ct_{\text{ret}}) &= \frac{1}{R_{\text{ret}}} (\vec{\nabla}(\vec{x} - \vec{x}_c(t_{\text{ret}}))) \cdot \vec{x}_{\text{ret}} = \frac{1}{R_{\text{ret}}} \left(\vec{R}_{\text{ret}} - \vec{R}_{\text{ret}} \cdot \frac{d\vec{x}_c}{dt}(t_{\text{ret}}) \vec{\nabla} t_{\text{ret}} \right) \\ &= \vec{E}_{\text{ret}} - \frac{\vec{E}_{\text{ret}} \cdot \vec{V}_{\text{ret}}}{c} \vec{\nabla}(ct_{\text{ret}}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}(ct_{\text{ret}}) = -\frac{\vec{E}_{\text{ret}}}{1 - \frac{\vec{E}_{\text{ret}} \cdot \vec{V}_{\text{ret}}}{c}}$$

s použitím těchto vztahů netriviální výpočet vede k

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{E}_{\text{ret}} \cdot \vec{V}_{\text{ret}}}{c}\right)^3} \left[\frac{\vec{E}_{\text{ret}} - \frac{\vec{V}_{\text{ret}}}{c}}{R_{\text{ret}}^2} + \frac{\vec{E}_{\text{ret}} \times \left(\left(\vec{E}_{\text{ret}} - \frac{\vec{V}_{\text{ret}}}{c}\right) \times \vec{a}_{\text{ret}}\right)}{c^2 R_{\text{ret}}} \right]$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{E}_{\text{ret}} \times \vec{E} \quad \text{význam vektoru } \vec{E} = \vec{E}_{\text{ret}} - \frac{\vec{V}_{\text{ret}}}{c} \text{ viz dále}$$

zde $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ je 3-rychlem a $\gamma_{\text{ret}} = \left(1 - \frac{V_{\text{ret}}^2}{c^2}\right)^{-1/2}$

vztah pro $\vec{E}$ je ekvivalentní Feynmanovu vzorci

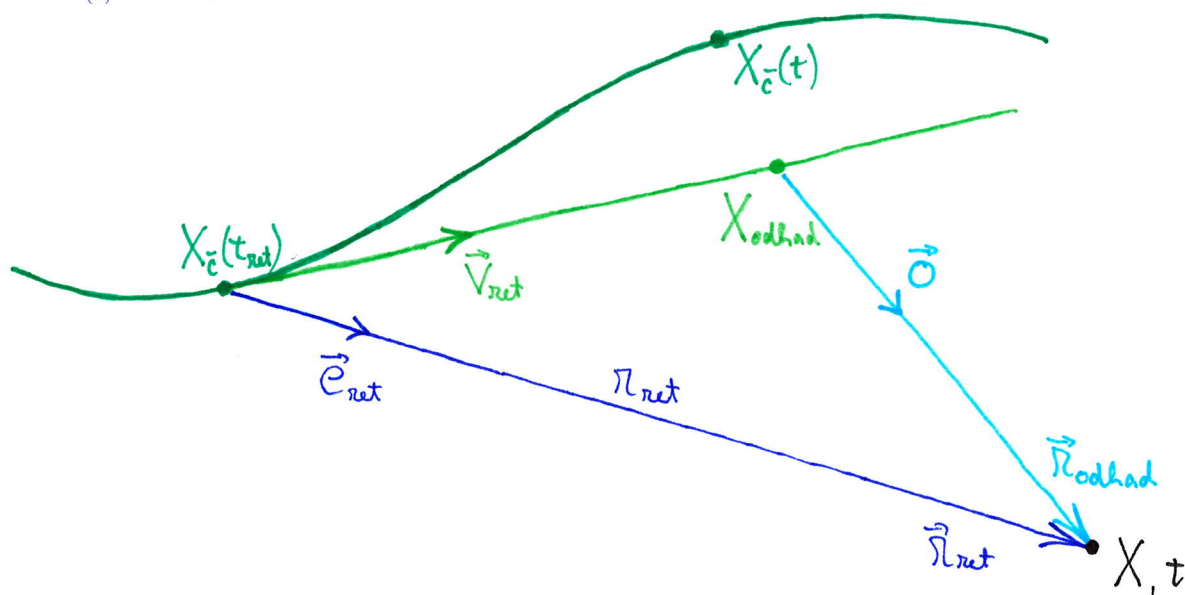
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{E}_{\text{ret}}}{R_{\text{ret}}^2} + \frac{R_{\text{ret}}}{c} \frac{d}{dt} \frac{\vec{E}_{\text{ret}}}{R_{\text{ret}}^2} + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \vec{E}_{\text{ret}} \right]$$

coulombický člen v retardovaném čase "oprava" coulombického členu na rovnoměrný pohyb náboje zářivý člen

dokázat ekvivalenci Feynmanova vzorce je obtížné!

oprava pole extrapolací rovnoměrného pohybu

přímota se jakoby snaží odhadnout, kde se bude náboj pohybovat
vektor $\vec{O} = \vec{E}_{\text{ret}} - \frac{\vec{V}_{\text{ret}}}{c}$ charakterizuje směr od "odhadnuté" polohy
náboje k pozorovateli



X_t bod a čas pozorování

$X_c(t_{\text{ret}})$ poloha částice v okamžik vyzáření pole

$X_c(t)$ poloha částice v okamžik pozorování

X_{odhad} odhadovaná poloha částice v okamžik pozorování

$$X_{\text{odhad}} = X_c(t_{\text{ret}}) + (t - t_{\text{ret}}) \vec{V}_{\text{ret}} = X_c(t_{\text{ret}}) + r_{\text{ret}} \frac{\vec{V}_{\text{ret}}}{c}$$

$\vec{r}_{\text{odhad}}$ průvodič od odhadovaného bodu

$$\vec{r}_{\text{odhad}} = X - X_{\text{odhad}} = X - X_c(t_{\text{ret}}) - r_{\text{ret}} \frac{\vec{V}_{\text{ret}}}{c} = \vec{r}_{\text{ret}} - r_{\text{ret}} \frac{\vec{V}_{\text{ret}}}{c}$$

$\vec{O}$ vektor charakterizující směr $\vec{r}_{\text{odhad}}$

$$\vec{O} = \frac{\vec{r}_{\text{odhad}}}{r_{\text{ret}}} = \vec{E}_{\text{ret}} - \frac{\vec{V}_{\text{ret}}}{c}$$

vektor $\vec{O}$ hraje roli ve vzorcích pro pole $\vec{E}$ a $\vec{B}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\vec{E} \cdot \vec{O})^3} \left[\frac{\vec{O}}{r^2} + \frac{\vec{E} \times (\vec{O} \times \vec{O})}{c^2 r} \right]_{\text{ret}} \quad \vec{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{(\vec{E} \cdot \vec{O})^3} \left[\frac{\vec{E} \times \vec{O}}{r^2} - \frac{(\vec{O} \times \vec{E})}{c^2 r} \right]_{\text{ret}} \quad \begin{matrix} \perp = \text{komponenta} \\ \parallel = \text{kolmá na } \vec{E}_{\text{ret}} \end{matrix}$$

podobnou roli hraje druhý člen ve Feynmanově vzorci

$$\frac{r_{\text{ret}}}{c} \frac{d}{dt} \frac{\vec{E}_{\text{ret}}}{r_{\text{ret}}} = (t - t_{\text{ret}}) \frac{d}{dt} \frac{\vec{E}_{\text{ret}}}{r_{\text{ret}}^2}$$

je lineární extrapolace coulombického členu $\frac{\vec{E}_{\text{ret}}}{r_{\text{ret}}^2}$ o čas $t - t_{\text{ret}}$

Dodatek 7D: $\vec{E}$ a $\vec{B}$ bodového náboje

pro výpočet $\vec{E}$ a $\vec{B}$ z ϕ a $\vec{A}$ je potřeba derivovat
retardovaný čas t_{ret}

ten je nutno chápat jako funkci času a polohy $t_{ret}(t, \vec{x})$
implicitně je definován rovnicí

$$c(t - t_{ret}) = |\vec{x} - \vec{x}_e(t_{ret})| \equiv r_{ret}$$

pro stručnost, budeme dále zkracovat $ret \equiv r$ tj. $t_{ret} \equiv t_r$ $r_{ret} \equiv r_r$

derivací implicitní definice dostaneme

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow \left(1 - \frac{\partial t_r}{\partial t}\right) = \frac{1}{c} \frac{\partial r_r}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{1}{r_r} \vec{r}_r \cdot \frac{\partial \vec{r}_r}{\partial t} = -\frac{1}{c} \vec{e}_r \cdot \underbrace{\frac{d\vec{x}_e(t_r)}{dt}}_{\vec{v}_r} \frac{\partial t_r}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{v}_r}{c}}$$

$$\vec{\nabla} \Rightarrow -\vec{\nabla}(ct_r) = \vec{\nabla} r_r = \frac{1}{r_r} (\vec{\nabla} \vec{r}_r) \cdot \vec{r}_r = \frac{1}{r_r} \left(\vec{I} - \vec{\nabla} t_r \frac{d\vec{x}_e(t_r)}{dt} \right) \cdot \vec{r}_r$$

$$= \vec{e}_r - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{v}_r}{c} \vec{\nabla}(ct_r)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}(ct_r) = - \frac{\vec{e}_r}{1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{v}_r}{c}}$$

pomocí těchto vztahů lze spočítat různé derivace výrazů
obsahujících $t_r, r_r, \vec{v}_r, \vec{e}_r$, atd.

- viz další strana

pak již lze spočítat

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

- viz další strany

$$t_n(t, \vec{x})$$

$$ct - ct_n = r_n$$

$$\vec{r}_n = \vec{x} - \vec{x}_e(t_n)$$

$$\frac{\partial t_n}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{v}_n}{c}}$$

$$\vec{\nabla} ct_n = - \frac{\vec{e}_x}{1 - \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{v}_n}{c}}$$

$$\vec{\nabla} r_n = \frac{\vec{e}_x}{1 - \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{v}_n}{c}}$$

$$\frac{\partial r_n}{\partial t} = - \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{v}_n}{1 - \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{v}_n}{c}}$$

$$\vec{\nabla} \vec{r}_n = \vec{\nabla} (\vec{x} - \vec{x}_e(t_n)) = \vec{I} - (\vec{\nabla} ct_n) \frac{\vec{v}_n}{c} = \vec{I} + \frac{\vec{e}_x}{1 - \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{v}_n}{c}} \frac{\vec{v}_n}{c}$$

$$\vec{\nabla} \vec{v}_n = (\vec{\nabla} t_n) \vec{a}_n = - \frac{1}{c} \frac{\vec{e}_x \vec{a}_n}{1 - \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{v}_n}{c}}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \vec{\nabla} (\vec{r}_n \cdot \vec{v}_n) &= (\vec{\nabla} \vec{r}_n) \cdot \frac{\vec{v}_n}{c} + \frac{1}{c} (\vec{\nabla} \vec{v}_n) \cdot \vec{r}_n = \\ &= \left(\frac{\vec{v}_n}{c} + \frac{v_n^2}{c^2} \frac{\vec{e}_x}{1 - \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{v}_n}{c}} - \frac{r_n}{c^2} \frac{\vec{e}_x \vec{a}_n \cdot \vec{e}_x}{1 - \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{v}_n}{c}} \right) = \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \left(r_n - \frac{\vec{r}_n \cdot \vec{v}_n}{c} \right) = \frac{1}{1 - \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{v}_n}{c}} \left[\vec{e}_x \left(1 - \frac{v_n^2}{c^2} \right) - \left(1 - \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{v}_n}{c} \right) \frac{\vec{v}_n}{c} + \frac{r_n}{c^2} \vec{a}_n \cdot \vec{e}_x \vec{e}_x \right]$$

$$\frac{\partial \vec{r}_n}{\partial t} = - \vec{v}_n \frac{\partial t_n}{\partial t} = - \frac{\vec{v}_n}{1 - \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{v}_n}{c}}$$

$$\frac{\partial \vec{v}_n}{\partial t} = \vec{a}_n \frac{\partial t_n}{\partial t} = \frac{\vec{a}_n}{1 - \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{v}_n}{c}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\vec{r}_n \cdot \vec{v}_n}{c} &= \frac{\partial \vec{r}_n}{\partial t} \cdot \frac{\vec{v}_n}{c} + \frac{\partial \vec{v}_n}{\partial t} \cdot \frac{\vec{r}_n}{c} = \\ &= - \frac{v_n^2}{c^2} \frac{c}{1 - \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{v}_n}{c}} + \frac{r_n}{c} \frac{\vec{a}_n \cdot \vec{e}_x}{1 - \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{v}_n}{c}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(r_n - \frac{\vec{r}_n \cdot \vec{v}_n}{c} \right) &= - \frac{\vec{v}_n \cdot \vec{e}_x}{1 - \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{v}_n}{c}} + \frac{v_n^2}{c^2} \frac{c}{1 - \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{v}_n}{c}} - \frac{r_n}{c} \frac{\vec{a}_n \cdot \vec{e}_x}{1 - \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{v}_n}{c}} \\ &= \frac{c}{1 - \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{v}_n}{c}} \left[- \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{v}_n}{c} + \frac{v_n^2}{c^2} - \frac{r_n}{c^2} \vec{a}_n \cdot \vec{e}_x \right] \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} r_n = \vec{\nabla} (ct - ct_n) = - \vec{\nabla} ct_n = \frac{\vec{e}_x}{1 - \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{v}_n}{c}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} r_n = \frac{\partial}{\partial t} (ct - ct_n) = c - c \frac{\partial t_n}{\partial t} = c \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{v}_n}{c}} \right) = - \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{v}_n}{1 - \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{v}_n}{c}}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$$

$$\frac{4\pi\epsilon_0}{9}\vec{E} = -\vec{\nabla}\frac{1}{r_r - \frac{r_r \cdot \vec{v}_r}{c}} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec{v}_r/c}{r_r - \frac{r_r \cdot \vec{v}_r}{c}} =$$

$$= \frac{1}{r_r^2} \frac{1}{(1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{v}_r}{c})^2} \vec{\nabla}(r_r - \frac{r_r \cdot \vec{v}_r}{c}) + \frac{1}{r_r^2} \frac{1}{(1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{v}_r}{c})^2} \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} (r_r - \frac{r_r \cdot \vec{v}_r}{c}) \right) \frac{\vec{v}_r}{c} - \frac{1}{r_r} \frac{1}{(1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{v}_r}{c})} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\vec{v}_r}{c}$$

$$= \frac{1}{r_r^2} \frac{1}{(1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{v}_r}{c})^3} \left[\frac{\vec{e}_r (1 - \frac{v_r^2}{c^2})}{\dots} - \frac{(1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{v}_r}{c}) \vec{v}_r}{c} + \frac{r_r}{c^2} \vec{a}_r \cdot \vec{e}_r \vec{e}_r - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{v}_r}{c} \frac{\vec{v}_r}{c} + \frac{v_r}{c^2} \frac{\vec{v}_r}{c} \right. \\ \left. - \frac{r_r}{c^2} \vec{a}_r \cdot \vec{e}_r \frac{\vec{v}_r}{c} - \frac{r_r}{c^2} (1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{v}_r}{c}) \vec{a}_r \right]$$

$$= \frac{1}{(1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{v}_r}{c})^3} \left[\frac{1}{r_r^2} (\vec{e}_r - \frac{\vec{v}_r}{c}) (1 - \frac{v_r^2}{c^2}) \right. \\ \left. + \frac{1}{c^2} \frac{1}{r_r} \left((\vec{e}_r - \frac{\vec{v}_r}{c}) \vec{e}_r \cdot \vec{a}_r - \vec{a}_r \cdot \vec{e}_r (\vec{e}_r - \frac{\vec{v}_r}{c}) \right) \right]$$

$$= \frac{1}{(1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{v}_r}{c})^3} \left[\frac{1}{r_r^2} \gamma_r^2 (\vec{e}_r - \frac{\vec{v}_r}{c}) + \frac{1}{c^2} \frac{1}{r_r} \vec{e}_r \times \left((\vec{e}_r - \frac{\vec{v}_r}{c}) \times \vec{a}_r \right) \right]$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\frac{4\pi\epsilon_0}{q} \cdot \vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \times \frac{\vec{V}_r}{r_r - \frac{\vec{r}_r \cdot \vec{V}_r}{c}} =$$

$$= \frac{1}{c} \left(\vec{\nabla} \frac{1}{r_r - \frac{\vec{r}_r \cdot \vec{V}_r}{c}} \right) \times \frac{\vec{V}_r}{c} + \frac{1}{c} \frac{1}{r_r - \frac{\vec{r}_r \cdot \vec{V}_r}{c}} \vec{\nabla} \times \frac{\vec{V}_r}{c} =$$

$$= -\frac{1}{c r_r^2 (1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{V}_r}{c})^2} \left(\vec{\nabla} (r_r - \frac{\vec{r}_r \cdot \vec{V}_r}{c}) \right) \times \frac{\vec{V}_r}{c} - \frac{1}{c r_r (1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{V}_r}{c})^2} \frac{1}{c^2} \vec{e}_r \times \vec{a}_r$$

$$= -\frac{1}{c r_r^2 (1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{V}_r}{c})^3} \left[\left(1 - \frac{V_r^2}{c^2}\right) \vec{e}_r \times \frac{\vec{V}_r}{c} + \frac{r_r}{c^2} \vec{a}_r \cdot \vec{e}_r \vec{e}_r \times \frac{\vec{V}_r}{c} + \frac{r_r}{c^2} \left(1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{V}_r}{c}\right) \vec{e}_r \times \vec{a}_r \right]$$

$$= \frac{1}{(1 - \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{V}_r}{c})^3} \frac{1}{c} \vec{e}_r \times \left[\frac{1}{r_r} \left(-\frac{\vec{V}_r}{c} \right) \left(1 - \frac{V_r^2}{c^2}\right) + \frac{1}{c^2} \frac{1}{r_r} \left(-\frac{\vec{V}_r}{c} \right) \vec{e}_r \cdot \vec{a}_r - \vec{a}_r \vec{e}_r \cdot \left(\vec{e}_r - \frac{\vec{V}_r}{c} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{c} \vec{e}_r \times \frac{4\pi\epsilon_0}{q} \vec{E}$$

Dodatek 7E : Důkaz Feynmanova vztahu

Dokázeme

$$\frac{\vec{E}}{R^2} + \frac{R}{c} \frac{d}{dt} \frac{\vec{E}}{R^2} + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \vec{E} =$$

$$= \frac{1}{O_u^3} \left[\frac{\vec{O}}{R^2} + \frac{\vec{E} \times (\vec{O} \times \vec{a}_r)}{c^2 R} \right]$$

$$\text{Zde } \vec{O} = \vec{E} - \frac{\vec{V}}{c} \quad O_u = \vec{E} \cdot \vec{O} = 1 - \frac{\vec{E} \cdot \vec{V}}{c} \quad \gamma^2 = 1 - \frac{V^2}{c^2}$$

Z důkazu jsou potřeba vztahy $\Rightarrow$ dodatek 7B
pomocí nich lze ušábat

$$\frac{d}{dt} \frac{\vec{E}}{R^2} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\vec{E}}{R^2} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - 3 \frac{\vec{E}}{R^3} \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{c}{R^3 O_u} \left[3 \frac{\vec{V} \cdot \vec{E}}{c} \frac{\vec{E}}{c} - \frac{\vec{V}}{c} \right]$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{E} = \frac{1}{O_u^3} \frac{c^2}{R^2} \left[\vec{E} \left(-\frac{V^2}{c^2} + 3 \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{V}}{c} \right)^2 - 2 \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{V}}{c} \right)^3 \right) - \frac{\vec{V}}{c} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} - O_u^2 \right) \right] + \frac{1}{O_u^3} \frac{\vec{E} \times (\vec{O} \times \vec{a}_r)}{R}$$

viz další stránka

dodáme do Feynmanova vztahu

$$\frac{\vec{E}}{R^2} + \frac{R}{c} \frac{d}{dt} \frac{\vec{E}}{R^2} + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \vec{E} =$$

$$= \frac{1}{O_u^3 R^2} \left[\vec{E} \left(O_u^3 + 3 O_u^2 \frac{\vec{E} \cdot \vec{V}}{c} + 3 \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{V}}{c} \right)^2 - 2 \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{V}}{c} \right)^3 - \frac{V^2}{c^2} \right) - \frac{\vec{V}}{c} \left(O_u^2 + 1 - \frac{V^2}{c^2} - O_u^2 \right) \right] + \frac{1}{O_u^3} \frac{\vec{E} \times (\vec{O} \times \vec{a}_r)}{c^2 R}$$

$$= \frac{1}{O_u^3 R^2} \left[\vec{E} \left(1 - 3(\cancel{X}) + 3(\cancel{X})^2 - (\cancel{X})^3 + 3(\cancel{X}) - 6(\cancel{X})^2 + 3(\cancel{X})^3 + 3(\cancel{X})^2 - 2(\cancel{X})^3 - \frac{V^2}{c^2} \right) - \frac{\vec{V}}{c} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right]$$

$$+ \frac{1}{O_u^3} \frac{\vec{E} \times (\vec{O} \times \vec{a}_r)}{c^2 R}$$

$$= \frac{1}{O_u^3} \left[\frac{\vec{O}}{\gamma^2 R^2} + \frac{\vec{E} \times (\vec{O} \times \vec{a}_r)}{c^2 R} \right] \quad \text{což jsme chtěli ušábat}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{e}_n = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\vec{r}_n}{r_n} = -\frac{1}{r_n} \frac{\vec{v}_n}{c} + \frac{\vec{e}_n}{r_n} \frac{\vec{e}_n \cdot \vec{v}_n}{c} = -\frac{1}{r_n c} \left[\vec{v}_n - \vec{v}_n \cdot \vec{e}_n \vec{e}_n \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \vec{e}_n &= -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{r_n c} (\vec{v}_n - \vec{v}_n \cdot \vec{e}_n \vec{e}_n) \right] = \\ &= \frac{c}{(r_n c)^2} \left[-\frac{\vec{e}_n \cdot \vec{v}_n}{c} + \frac{v_n^2}{c^2} - \frac{r_n}{c^2} \vec{a}_n \cdot \vec{e}_n \right] (\vec{v}_n - \vec{v}_n \cdot \vec{e}_n \vec{e}_n) \\ &\quad - \frac{1}{r_n c} \left[\frac{\vec{a}_n}{c} - \frac{\vec{a}_n \cdot \vec{e}_n \vec{e}_n}{c} + \frac{\vec{v}_n}{r_n c} \cdot (\vec{v}_n - \vec{e}_n \vec{e}_n \cdot \vec{v}_n) + \frac{\vec{v}_n \cdot \vec{e}_n}{r_n c} (\vec{v}_n - \vec{v}_n \cdot \vec{e}_n \vec{e}_n) \right] \\ &= \frac{1}{c^3} \left[-\frac{1}{r_n} (\vec{a}_n - \vec{a}_n \cdot \vec{e}_n \vec{e}_n) - \frac{1}{r_n c} \vec{a}_n \cdot \vec{e}_n (\vec{v}_n - \vec{v}_n \cdot \vec{e}_n \vec{e}_n) \right. \\ &\quad \left. + \frac{c}{r_n^2} \left(-\frac{\vec{e}_n \cdot \vec{v}_n}{c} + \frac{v_n^2}{c^2} - \frac{1}{c} \vec{e}_n \cdot \vec{v}_n \right) (\vec{v}_n - \vec{v}_n \cdot \vec{e}_n \vec{e}_n) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r_n^2} \left(\frac{v_n^2}{c^2} - \left(\frac{\vec{e}_n \cdot \vec{v}_n}{c} \right)^2 \right) \vec{e}_n \right] \\ &= \frac{1}{c^3} \frac{1}{r_n} \left[\vec{e}_n \times (\vec{e}_n \times \vec{a}_n) - \frac{\vec{v}_n}{c} \vec{e}_n \cdot \vec{a}_n + \vec{a}_n \vec{e}_n \cdot \frac{\vec{v}_n}{c} - (\vec{a}_n \cdot \vec{e}_n) \frac{\vec{v}_n \cdot \vec{e}_n}{c} \vec{e}_n + (\vec{a}_n \cdot \vec{e}_n) \frac{\vec{v}_n \cdot \vec{e}_n}{c} \vec{e}_n \right] \\ &\quad + \frac{1}{c^3} \frac{1}{r_n^2} \left[-\frac{\vec{v}_n}{c} \left(1 - \frac{v_n^2}{c^2} - 1 + 2 \frac{\vec{e}_n \cdot \vec{v}_n}{c} - \left(\frac{\vec{e}_n \cdot \vec{v}_n}{c} \right)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \vec{e}_n \left(-\frac{1}{c^2} \frac{v_n^2}{c^2} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\vec{e}_n \cdot \vec{v}_n}{c} \right)^2 + (1 + \frac{1}{c^2}) \left(\frac{\vec{e}_n \cdot \vec{v}_n}{c} \right)^2 - \frac{\vec{e}_n \cdot \vec{v}_n}{c} \frac{v_n^2}{c^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{c^3} \frac{\vec{e}_n \times ((\vec{e}_n - \frac{\vec{v}_n}{c}) \times \vec{a}_n)}{r_n} \\ &\quad + \frac{1}{c^3} \frac{1}{r_n^2} \left[\vec{e}_n \left(-\frac{v_n^2}{c^2} + 3 \left(\frac{\vec{e}_n \cdot \vec{v}_n}{c} \right)^2 - 2 \left(\frac{\vec{e}_n \cdot \vec{v}_n}{c} \right)^3 \right) - \frac{\vec{v}_n}{c} \left(1 - \frac{v_n^2}{c^2} - \frac{1}{c^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Rovnoměrně přímočarě se pohybující náboj

$$\vec{x}_c(t) = \vec{v}t \quad \vec{a} = 0$$

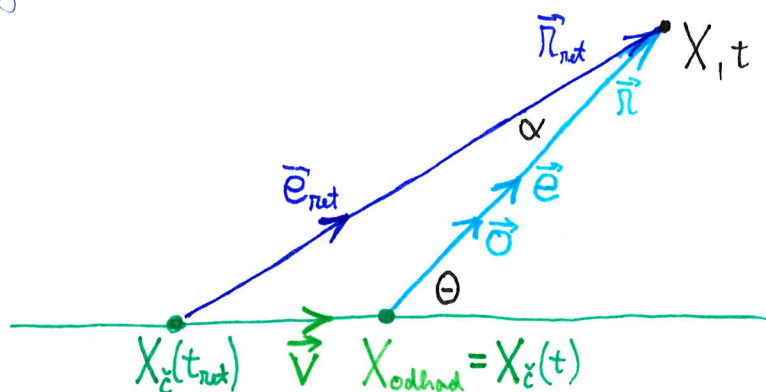
přivodit od částice k bodu pozorování

$$\vec{r}(t) = \vec{x} - \vec{x}_c(t)$$

rychlost je konstantní $\Rightarrow$ odhad pomocí okamžité rychlosti je přesný

$$\vec{r}_{\text{odhad}} = \vec{r}(t) \equiv \vec{r} \quad \vec{r}_{\text{ret}} = \vec{r}(t_{\text{ret}}) \quad \vec{r} = \vec{r}_{\text{ret}} - \frac{r_{\text{ret}}}{c} \vec{v}$$

geometrie (viz diskuzi v kap. 6)



Sinova věta:

$$\frac{r_{\text{ret}}}{\sin \theta} = \frac{\frac{r_{\text{ret}}}{c} v}{\sin \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{v}{c} \sin \theta \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta}$$

dostáváme

$$r_{\text{ret}} \left(1 - \frac{\vec{e}_{\text{ret}} \cdot \vec{v}}{c}\right) = r_{\text{ret}} \vec{e}_{\text{ret}} \cdot \left(\vec{e}_{\text{ret}} - \frac{\vec{v}}{c}\right) = \vec{e}_{\text{ret}} \cdot \vec{r} = r \vec{e}_{\text{ret}} \cdot \vec{e} = r \cos \alpha$$

$$\Downarrow$$

$$r_{\text{ret}} \left(1 - \frac{\vec{e}_{\text{ret}} \cdot \vec{v}}{c}\right) = r \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta}$$

Liénardov-Wiechertovy potenciály a vzorce pro $\vec{E}$ a $\vec{B}$ dávají

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{\text{ret}} \left(1 - \frac{\vec{e}_{\text{ret}} \cdot \vec{v}}{c}\right)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta}}$$

$$\vec{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{v}}{r_{\text{ret}} \left(1 - \frac{\vec{e}_{\text{ret}} \cdot \vec{v}}{c}\right)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{v}}{r \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta}} \quad \vec{r}_{\text{ret}} - \frac{r_{\text{ret}}}{c} \vec{v} \quad \text{tedy } \frac{r}{r_{\text{ret}}} \vec{e} = \vec{e}_{\text{ret}} - \frac{\vec{v}}{c} \Rightarrow *$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{e}_{\text{ret}} \cdot \vec{v}}{c}\right)^3} \frac{\vec{e}_{\text{ret}} - \frac{\vec{v}}{c}}{r_{\text{ret}}^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(r_{\text{ret}} \left(1 - \frac{\vec{e}_{\text{ret}} \cdot \vec{v}}{c}\right)\right)^3} \vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(r \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta}\right)^3} \frac{\vec{e}}{r^2}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{e}_{\text{ret}} \times \vec{E} = \frac{1}{c} \left(\frac{\vec{v}}{c} + \frac{r}{r_{\text{ret}}} \vec{e}\right) \times \vec{E} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(r \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta}\right)^3} \frac{\vec{v} \times \vec{e}}{r^2}$$

to jsou vztahy z kapitoly 6 získané Lor. transformací

Záření bodového náboje

zářivé pole = členy klesající jako $\frac{1}{r}$ přispívající do energie unikající do nekonečna

$$\vec{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\vec{e} \cdot \vec{a})^3} \frac{\vec{e} \times (\vec{a} \times \vec{e})}{c^2 r} \Big|_{\text{ret}}$$

niz vzorce pro $\vec{E}$ a $\vec{B}$
pro bodový náboj

$$\vec{B}_{\text{rad}} = \frac{1}{c} \vec{e}_{\text{ret}} \times \vec{E}_{\text{rad}}$$

$$\text{platí } \vec{E}_{\text{rad}}, \vec{B}_{\text{rad}} \perp \vec{e}_{\text{ret}} \quad \vec{E}_{\text{rad}} \perp \vec{B}_{\text{rad}} \quad |\vec{E}_{\text{rad}}| = |c \vec{B}_{\text{rad}}|$$

Poyntingův vektor

$$\vec{G}_{\text{rad}} = \epsilon_0 c \vec{E}_{\text{rad}} \times \vec{B}_{\text{rad}} = \epsilon_0 c E_{\text{rad}}^2 \vec{e}_{\text{ret}}$$

Klidová soustava v okamžik vyzařování pole, tj. v čase t_{ret}

$$\vec{v}_{\text{ret}} = 0 \Rightarrow \vec{a}_{\text{ret}} = \vec{e}_{\text{ret}}$$

$$\vec{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{a})}{r} \Big|_{\text{ret}} \quad \vec{B}_{\text{rad}} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{e} \times \vec{a}}{r} \Big|_{\text{ret}}$$

$$\vec{G}_{\text{rad}} = \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0 c^3)} \frac{|\vec{e} \times \vec{a}|^2}{r^2} \vec{e} \Big|_{\text{ret}} = \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0 c^3)} \frac{a^2}{r} \sin^2 \theta \quad \theta = \angle \vec{e}_{\text{ret}}, \vec{a}_{\text{ret}}$$

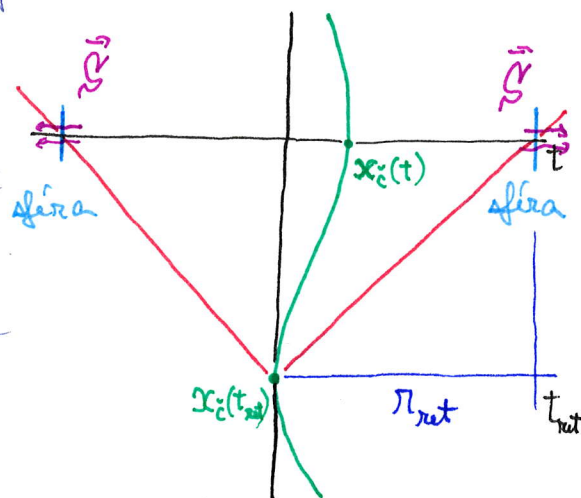
integraci přes velkou sféru centrovanou na okamžik vyzařování v klidové soustavě

$$R = \frac{2}{3} \frac{q^2 a_{\text{ret}}^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \quad \text{Larmorova formule}$$

(integrace niz výpočet R dipólu)

jak má tato veličina charakter při transformaci soustavy?

kolik energie utíká do nekonečna v soustavě, ve které se náboj v okamžik vyzařování pohybuje?



4-kybnost vlnného EM pole

lož energie a kybnosti je zachovávaná - lokalizuje v tenzoru energie kybnosti

$$T_{EM}^{\mu\nu} = \epsilon_0 c^2 (F^{\mu\kappa} F^{\nu\lambda} \eta_{\kappa\lambda} - \frac{1}{4} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} \eta^{\mu\nu})$$

$$T_{EM}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} u & \frac{1}{c} \vec{S} \\ \frac{1}{c} \vec{S} & \vec{T} \end{bmatrix} \quad u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} B^2 \quad \vec{S} = \epsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B}$$

$$\vec{T} = -\epsilon_0 (\vec{E} \vec{E} + c^2 \vec{B} \vec{B} - \frac{1}{2} (E^2 + c^2 B^2) \vec{q})$$

pro vlnné pole (beze zdrojů) platí

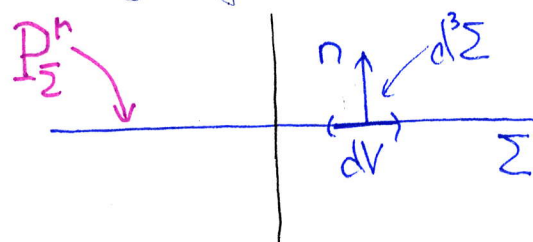
$$\nabla_\mu T_{EM}^{\mu\nu} = 0$$

lokalní zákon zachování 4-kybnosti

celková 4-kybnost EM pole asociována o 3D prostorovou nadplochou Σ (zvolený čas t) je definována

$$P_\Sigma^\mu = \int_\Sigma T_{EM}^{\mu\nu} d\Sigma_\nu$$

$\uparrow$
 $\rightarrow n_\nu d^3V$
do budoucí orientovaná normála



pro vlnné EM pole se P_Σ^μ zachovává
tj. nezávisí na volbě nadplochy Σ

necht $\Omega = \langle \Sigma_k | \Sigma_z \rangle$ oblast mezi Σ_z a Σ_k

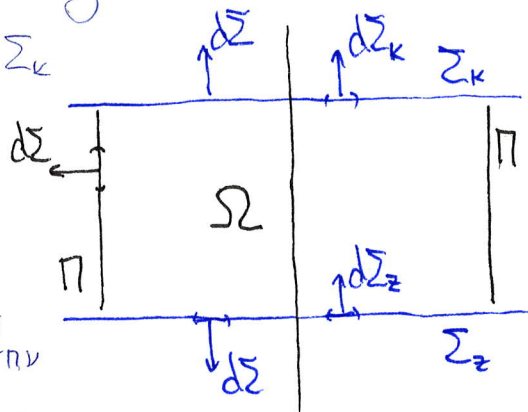
$$\partial\Omega = \Sigma_k - \Sigma_z + \Pi$$

$$0 = \int_\Omega \nabla_\nu T_{EM}^{\mu\nu} d^4\Omega = \int_{\partial\Omega} T_{EM}^{\mu\nu} d\Sigma_\nu =$$

$$= \int_{\Sigma_k} T_{EM}^{\mu\nu} d\Sigma_{\nu} - \int_{\Sigma_z} T_{EM}^{\mu\nu} d\Sigma_{\nu} + \int_{\Pi} T_{EM}^{\mu\nu} d\Sigma_{\nu}$$

změna orientace normály

člen lokalizovaný v prostorovém měřítku - klesá k nule



$$= P_{\Sigma_k}^\mu - P_{\Sigma_z}^\mu \Rightarrow P_{\Sigma_k}^\mu = P_{\Sigma_z}^\mu$$

argument funguje i pro plochy Σ_1, Σ_2 z různých inerciálních soustav

4-hybnost zářivého pole bodového náboje

pro pole bodového náboje nelze definovat celkovou 4-hybnost - díky divergentnímu charakteru v na světelné náboje by byla nekonečná (nekonečné vlastní energie náboje)
můžeme definovat 4-hybnost ΔP^μ vyzařenou nábojem mezi časy τ_{ret} a $\tau_{\text{ret}} + \Delta\tau$ (vlastní čas částice)
stezka unikne až do nekonečna

$$\Delta P_{\text{rad}}^\mu = \int_{\Delta\Sigma} T_{\text{rad}}^{\mu\nu} d\Sigma_\nu$$

$\Delta\Sigma$ 3D plocha mezi světelnými kuželi ohraničujícími zářivé pole umístěné daleko od zdroje
přirozená je volba konstantního času

nezávislost na volbě $\Delta\Sigma$

podobně je plocha $\Delta\Sigma$ dostatečně daleko od náboje (zářivé pole)

ΔP^μ nezávisí na volbě $\Delta\Sigma$

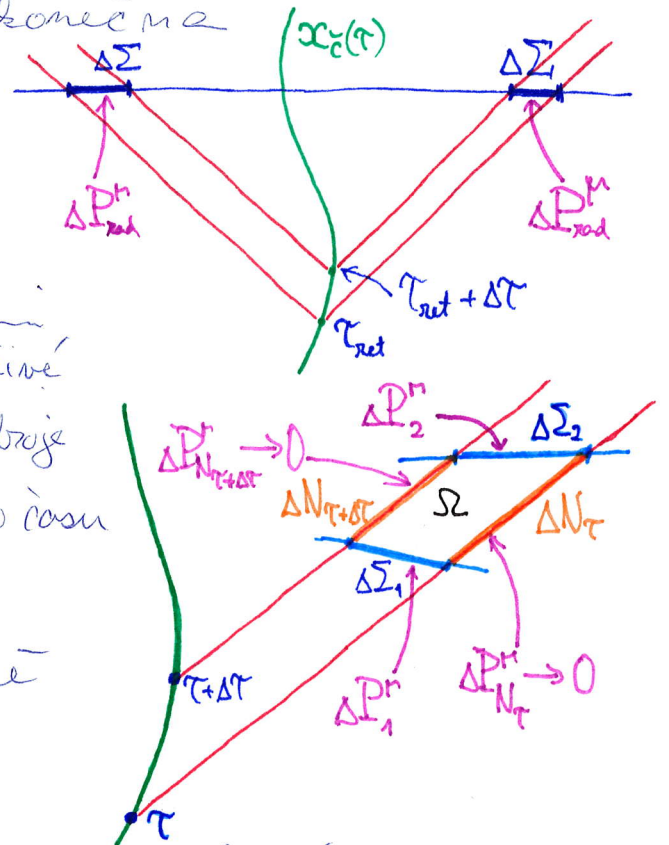
plyne odtud z lokálního zákona zachování pro zářivé pole - pole daleko od zdroje, tj.

$$\nabla_\nu T_{\text{rad}}^{\mu\nu} = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{V}} \nabla_\nu T_{\text{rad}}^{\mu\nu} d^4x = \int_{\partial\mathcal{V}} T_{\text{rad}}^{\mu\nu} d\Sigma_\nu = \int_{\Delta\Sigma_2} T_{\text{rad}}^{\mu\nu} d\Sigma_\nu - \int_{\Delta\Sigma_1} T_{\text{rad}}^{\mu\nu} d\Sigma_\nu + \int_{\Delta N} T_{\text{rad}}^{\mu\nu} d\Sigma_{N\nu} \\ &= \Delta P_{N_2}^\mu - \Delta P_{N_1}^\mu + \int_{\Delta N_{\tau+\Delta\tau}} T_{\text{rad}}^{\mu\nu} d\Sigma_{N\nu} - \int_{\Delta N_\tau} T_{\text{rad}}^{\mu\nu} d\Sigma_{N\nu} \end{aligned}$$

lze ukázat, že dostatečně daleko od náboje jsou příspěvky přes světelný kužel zanedbatelné

$$\int_{N_\tau} T_{\text{rad}}^{\mu\nu} d\Sigma_{N\nu} \rightarrow 0$$



nezávislost ΔP^r na madyloze $\Delta \Sigma$

II lze zvolit i časopodobnou plochu
zvolme:

- 1) klidovou soustavu měloje
v čase τ_{ret} vyzařemí pole
- 2) velkou sféru v této soust.
o poloměru R_{ret} kolem
měloje v okamžik vyzařemí
- 3) vezmeme časový úsek
mezi t a $t+\Delta t$ odpovídající
vyzařemí mezi τ_{ret} a $\tau_{ret}+\Delta \tau$

to tvoří 3D madylochu $\Delta \Sigma$ - 2D sféra $\times$ čas Δt

spočteme ΔP_{rad}^r pomocí této madylochy
(výsledek ale nezávisí na volbě madylochy, jen na τ_{ret} a $\Delta \tau$)
v klidové soustavě

$$\Delta \tau = \Delta t$$

integrační element $d^3 \Sigma_r$ na madyloze $\Delta \Sigma$ má radiální směr

$$d^3 \Sigma_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{dS} d\tau \end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \text{normála nemá časovou složku} \\ \text{prostorové složky odpovídá normále k 2D sféře} \end{array}$$

$$\vec{dS} = \vec{e} dS$$

integrand v ΔP^r má tvar

$$T_{rad}^{\mu r} d^3 \Sigma_r = \begin{bmatrix} u & \frac{1}{c} \vec{S} \\ \frac{1}{c} \vec{S} & \vec{T} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{e} \end{bmatrix} dS dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} \vec{S} \cdot \vec{e} \\ \vec{T} \cdot \vec{e} \end{bmatrix} dS dt$$

4-kybmost vyzařemí za krátký čas $\Delta \tau$

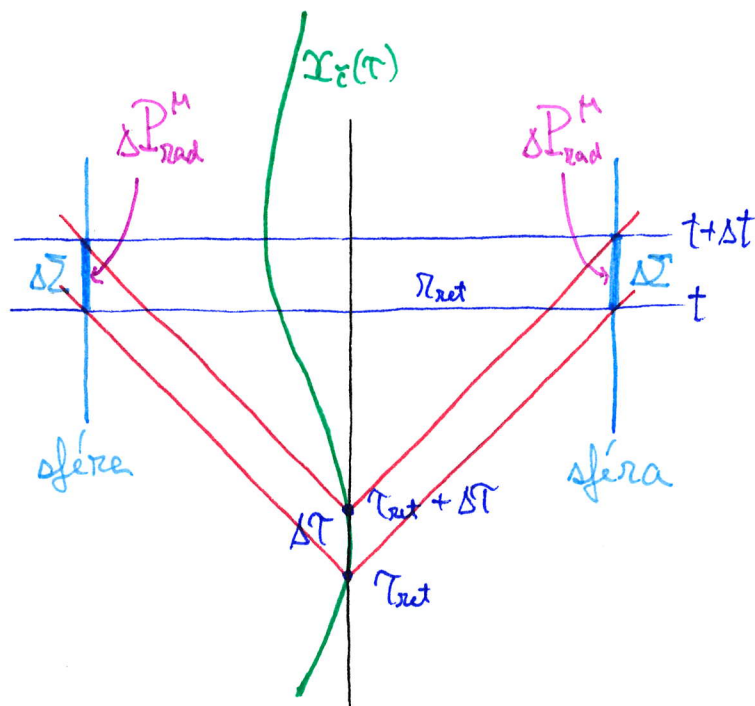
$$\Delta P^r = \int_{\text{sféra}} \begin{bmatrix} \frac{1}{c} \vec{S} \cdot \vec{e} \\ \vec{T} \cdot \vec{e} \end{bmatrix} dS \Delta \tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} R \\ \vec{0} \end{bmatrix} \Delta \tau$$

← toto jsme spočetli výše
← lze dokázat netriviální
výpočtem

(integraci přes čas jsme aproximovali násobením $\Delta \tau$)

$$= \frac{1}{c^2} R \begin{bmatrix} c \\ \vec{0} \end{bmatrix} = \frac{1}{c^2} R u_{ret}^r$$

u_{ret}^r je 4-rychlost v čase τ_{ret}



rychlost vyzařování 4-kybnosti

$$\frac{dP_{\text{rad}}^{\mu}}{d\tau} = \frac{1}{c^2} R U_{\text{ret}}^{\mu}$$

kovariantní rovnice - platí v každé soustavě

R je dáno Larmorovou formulí

$$R = \frac{2}{3} \frac{q^2 a_{\text{ret}}^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}$$

$\vec{a}_{\text{ret}}$ je 3-rychlen v klidové soustavě ($\vec{v}_{\text{ret}} = 0$)

potřebujeme vyjádřit kovariantně - pomocí 4-rychlen v klidové soustavě

$$\alpha^{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{a} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \text{4-rychlen vždy kolmé na 4-rychlost} \\ \text{3-rychlen v klidové soustavě} \end{array}$$

$$\alpha^2 = a^2$$

kovariantní vyjádření

$$\frac{dP_{\text{rad}}^{\mu}}{d\tau} = \frac{1}{c^2} R U_{\text{ret}}^{\mu}$$

$$R = \frac{2}{3} \frac{q^2 \alpha^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}$$

rychlost vyzařování energie v obecné soustavě

$$U^{\mu} = \gamma \begin{bmatrix} c \\ \vec{v} \end{bmatrix}$$

$$P^{\mu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} E \\ \vec{P} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{energie} \\ \text{hybnost} \end{array}$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma$$

$$\Downarrow \quad \frac{dE_{\text{rad}}}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{dP_{\text{rad}}^0}{d\tau} = \frac{c}{\gamma} \frac{1}{c^2} R U^0 = R$$

chceme ale vyjádřit pomocí veličin v dané soustavě rozštěpení 4-rychlen v obecné soustavě - viz STR

$$\alpha^{\mu} = \begin{bmatrix} \gamma \gamma^4 a_{\parallel} \\ \gamma^4 a_{\perp} \\ \gamma^2 \vec{a}_{\perp} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{časová složka} \\ \text{složka rovnoběžná s } \vec{v} \\ \text{složka kolmá na } \vec{v} \end{array} \Rightarrow \alpha^2 = \gamma^6 \left(a^2 - \frac{v^2}{c^2} a_{\parallel}^2 \right) = \gamma^6 \left(a^2 - \left(\frac{\vec{v} \times \vec{a}}{c} \right)^2 \right)$$

$\Downarrow$

$$\frac{dE_{\text{rad}}}{dt} = \frac{2}{3} \frac{q^2 \gamma^6}{4\pi\epsilon_0 c^3} \left(a^2 - \left| \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{c} \right|^2 \right)$$

Liénardovo zobecnění Larmorovy formule

Elektrodynamika bez zdrojů

Maxwellovy rovnice bez zdrojů

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

lineární (princíp superpozice)

symetrie (dualita) $\vec{E} \rightarrow c\vec{B}$ $c\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$

vlnové rovnice

$$0 = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \underbrace{-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \Delta \vec{E}}_{\square \vec{E}} - \underbrace{\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_0 = \square \vec{E}$$

$\Downarrow$

$$\square \vec{E} = 0$$

$$0 = \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + c^2 \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \underbrace{\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{B}}_{-\square \vec{B}} + \underbrace{c^2 \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}}_0 = -\square \vec{B}$$

$\Downarrow$

$$\square \vec{B} = 0$$

Vlnové rovnice pro $\vec{E}$ a $\vec{B}$ jsou důsledkem Maxwellových rov.
ale ne dostatečnou podmínkou pro jejich splnění
nutno dosadit řešení vlnových rovnic zpět do Maxwellových rov.

vlnový operátor (d'Alembertův operátor)

$$\square = \left[-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \right] = \eta^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$$

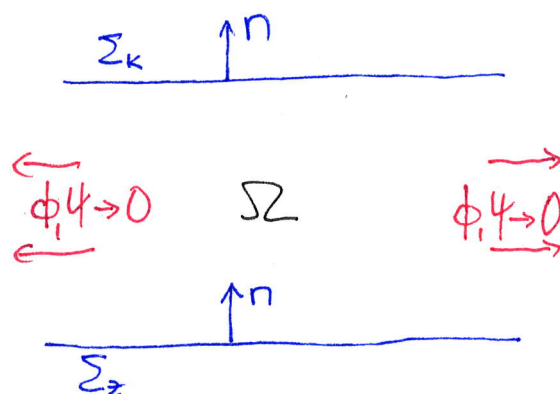
v Minkowského prostoročase lze řešit pro každou inerciální složku (čas + 3 prostoro.) zvlášť

Cauchyho úloha - vývoj počátečních dat

Greenova věta pro vlnový operátor

ϕ, ψ pole klesající dostatečně rychle
v prostorovém nekonečnu

$\Sigma = (\Sigma_k | \Sigma_z)$ 4D oblast mezi dvěma
3D prostorovými nadplochami Σ_z a Σ_k



$$\int_{\Sigma} (\phi \square \psi - \psi \square \phi) d^4 \Sigma =$$

$$= - \int_{\Sigma_k} (\phi \frac{\partial}{\partial n} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial n} \phi) d^3 V + \int_{\Sigma_z} (\phi \frac{\partial}{\partial n} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial n} \phi) d^3 V$$

kde $\frac{\partial}{\partial n} = n^\mu \nabla_\mu$ je normálová derivace

n^μ je do budoucna orientovaná normála k Σ_z a Σ_k

díky stejné jako pro Greenovu větu pro Laplaceův operátor

proto díky "časovosti" normály n^μ se obrátí znaménko

v poruchových členech

integrál přes hranici v nekonečnu spojující Σ_z a Σ_k samostatně ne

Greenovy fce G_{ret} a G_{adv} splňují

$$\square G_{ret}(x|x') = \square' G_{ret}(x|x') = -\delta(x|x') \quad G_{ret}(x|x') = 0 \text{ pro } x \text{ před } x'$$

$$\square G_{adv}(x|x') = \square' G_{adv}(x|x') = -\delta(x|x') \quad G_{adv}(x|x') = 0 \text{ pro } x \text{ po } x'$$

$$G_{adv}(x|x') = G_{ret}(x'|x)$$

Kauzální Greenova funkce (též Pauliho-Jordanova GF)

$$G_c(x|x') = G_{ret}(x|x') - G_{adv}(x|x')$$

ta splňuje

$$\square G_c(x|x') = \square' G_c(x|x') = 0$$

$$G_c(x'|x) = -G_c(x|x')$$

řešení bezobdobové vlnové rovnice

Σ_K

$$\square A_r = 0$$

užijeme Greenovu větu v argumentu x'
kde $\psi(x') \rightarrow A_r(x')$

1) x

Σ

1) $x \in \langle \Sigma_K | \Sigma \rangle$

$$\phi(x') \rightarrow G_{ret}(x|x')$$

2) x

Σ_Z

$$\int_{\langle \Sigma_K | \Sigma \rangle} [G_{ret}(x|x') \underbrace{\square A_r(x')}_0 - A_r(x') \underbrace{\square G_{ret}(x|x')}_{-\delta(x|x')}] dV' = A_r(x)$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Greenova} \\ \text{věta}}}{=} - \int_{x' \in \Sigma_K} \left(G_{ret}(x|x') \frac{\partial A_r(x')}{\partial n'} - A_r(x') \left(\frac{\partial}{\partial n'} G_{ret} \right)(x|x') \right) dV'$$

$0 \leftarrow \text{kauzální vlastnosti } G_{ret} \Rightarrow 0$

$$+ \int_{x' \in \Sigma} \left(G_{ret}(x|x') \frac{\partial A_r(x')}{\partial n'} - A_r(x') \left(\frac{\partial}{\partial n'} G_{ret} \right)(x|x') \right) dV'$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{x' \in \Sigma} \left(G_{ret}(x|x') \frac{\partial A_r(x')}{\partial n'} + \left(-\frac{\partial}{\partial n'} G_{ret} \right)(x|x') A_r(x') \right) dV' = \begin{cases} A_r(x) & x \text{ po } \Sigma \\ 0 & x \text{ před } \Sigma \end{cases}$$

$\text{kauzální vlast. } G_{ret} \Rightarrow$

nyní uvažujeme

2) $x \in \langle \Sigma | \Sigma_Z \rangle$

$$\phi(x') \rightarrow G_{adv}(x|x')$$

$\Downarrow$ obdobně

$$- \int_{x' \in \Sigma} \left(G_{adv}(x|x') \frac{\partial A_r(x')}{\partial n'} + \left(-\frac{\partial}{\partial n'} G_{adv} \right)(x|x') A_r(x') \right) dV' = \begin{cases} 0 & x \text{ po } \Sigma \\ A_r(x) & x \text{ před } \Sigma \end{cases}$$

sečtením obou vztahů dostaneme

$$A_r(x) = \int_{x' \in \Sigma} \left(G_c(x|x') \frac{\partial A_r(x')}{\partial n'} + \left(-\frac{\partial}{\partial n'} G_c \right)(x|x') A_r(x') \right) dV'$$

dává řešení vlnové rovnice $\square A_r = 0$

$\frac{\partial A_r(x)}{\partial n}$ na nadploše $x \in \Sigma$

potud položíme $x, x' \in \Sigma$ na stejnou nadplochu $\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial n} G_c(x|x') = -\frac{\partial}{\partial n'} G_c(x|x') = \delta(x|x') \leftarrow \text{3D delta fce na } \Sigma \text{ normovaná po } dV$$

Transverzální vlny šířící se jedním směrem

rozumejme šíření pouze v jednom směru (globální konstantou)

$$\vec{E}_\parallel = \text{konst} \quad \text{směr šíření}$$

souřadnice v tomto směru

$$x_\parallel = \vec{E}_\parallel \cdot \vec{r}$$

uvažujme závislost $\vec{E}$ a $\vec{B}$ pouze na kombinaci $\varphi = kx_\parallel - \omega t$

$$\vec{E} = \vec{E}(t, x_\parallel) = \vec{E}(kx_\parallel - \omega t)$$

jako důsledek máme

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \vec{k} \vec{E}' \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\omega \vec{E}'$$

kde $\vec{E}'$ je derivace $\vec{E}(\varphi)$ podle jediného argumentu $\vec{E}' = \frac{d\vec{E}}{d\varphi}(\varphi)$

vlnová rovnice

$$\square \vec{E} = \left[-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \right] \vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}' + k^2 \vec{E}' = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\omega^2}{c^2} = k^2 \quad \text{tj. } \omega = ck$$

volíme stejné znaménko ω a k
opětné znaménko lze získat změnou
orientace $\vec{E}_\parallel \rightarrow -\vec{E}_\parallel$

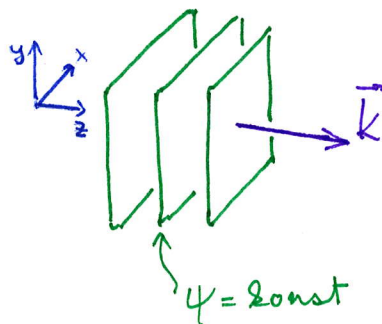
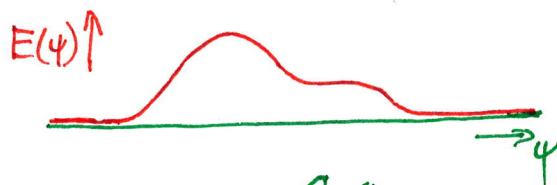
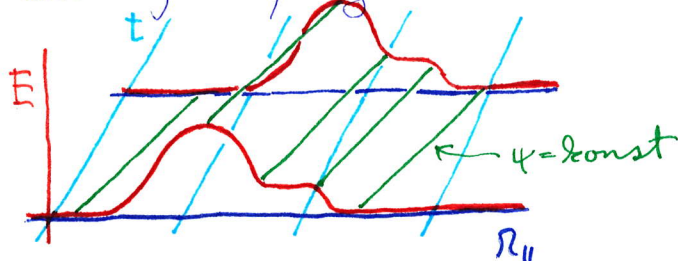
profilová funkce
 $\vec{E}(\dots)$

fáze

$$\varphi = kx_\parallel - \omega t = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \quad \vec{k} = k\vec{e}_\parallel$$

plochy konst. φ = roviny kolmé na $\vec{e}_\parallel$

časový vývoj



obdobně pro magnetickou indukci

$$\vec{B} = \vec{B}(kx_\parallel - \omega t) = \vec{B}(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

dosazení zřet do Maxwellových rovnic

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}' = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

↑
ignorujeme-li triviální konstantní pole

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{B}' = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

pole je transverzální - kolmé na směr šíření
 $\vec{E}, \vec{B} \perp \vec{k}$

derivace pár Maxwellových rovnic

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow c\vec{k} \times \vec{E}' - \omega c\vec{B}' = 0 \Rightarrow c\vec{B} = \vec{e}_u \times \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \Rightarrow c\vec{k} \times \vec{B}' + \omega \vec{E}' = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{e}_u \times c\vec{B}$$

pole má nulové invarianty

$$\vec{E} \cdot c\vec{B} = 0 \Rightarrow \tilde{L} = 0$$

$$E = cB \Rightarrow \tilde{L} = 0$$

transverzálnost souvisí s jednodimenzionálním charakterem šíření - vlna není lokalizovaná ve směrech kolmých ke směru šíření
 pro obecnou lokalizovanou vlnu nebude jednoznačný směr šíření
 a charakter vlny nebude čistě transverzální

hustota energie a tok energie

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} B^2 = \epsilon_0 E^2$$

stejně přispívá

$$\vec{S} = \epsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B} = \epsilon_0 c \vec{E} \times (\vec{e}_u \times \vec{E}) = \epsilon_0 E^2 c \vec{e}_u = u c \vec{e}_u$$

odpovídá šíření energie ve směru $\vec{e}_u$ rychlostí c

Monochromatická rovinná vlna

rozklad profilové funkce do Fourierovských módů
tj. volba systému funkcí

$$\vec{E}(\varphi) = \vec{E}_0 \cos \varphi, \vec{E}_0 \sin \varphi$$

lze sjednotit užitím komplexní báze
skutečné pole je (až dále reálnou částí komplexního řešení)
funguje bez problémů pro operace lineární a polí
speciál řeči potřebují veličiny jako energie, invarianty, ...
komplexní báze - "harmonické" závislost na fázi

$$\vec{E} = \text{Re } \vec{E}$$

$$\vec{B} = \text{Re } \vec{B}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t)$$

$\vec{E}_0, \vec{B}_0$ jsou komplexní konstanty splňující

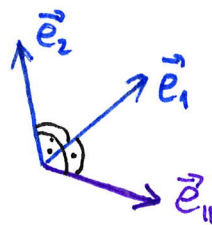
$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = \vec{k} \cdot c\vec{B}_0 = 0$$

$$c\vec{B}_0 = \vec{e}_u \times \vec{E}_0$$

$$\vec{E}_0 = -\vec{e}_u \times c\vec{B}_0$$

polarizace

zvolme dva konstantní směry $\vec{e}_1, \vec{e}_2$
kolmé na $\vec{e}_0$ tak, že $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ tvoří
pozitivně orientovanou ortonormální bázi



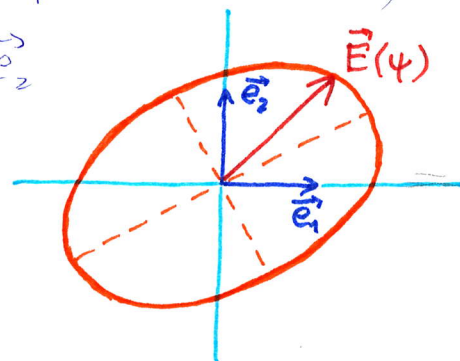
konstanta $\vec{E}_0$ lze rozložit do komplexních komponent

$$\vec{E}_0 = E_1 \exp(i\delta_1) \vec{e}_1 + E_2 \exp(i\delta_2) \vec{e}_2 \quad E_1, E_2, \delta_1, \delta_2 \text{ reálné}$$

pro reálné pole dostáváme

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \text{Re}(E_1 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t + i\delta_1) \vec{e}_1 + E_2 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t + i\delta_2) \vec{e}_2) \\ &= E_1 \cos(\varphi + \delta_1) \vec{e}_1 + E_2 \cos(\varphi + \delta_2) \vec{e}_2 \end{aligned}$$

intenzita $\vec{E}$ se pohybuje v závislosti
na fázi φ po elipse
→ obecná eliptická polarizace



speciální případy:

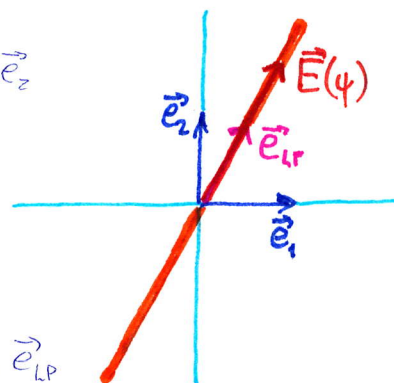
- lineární polarizace

$$\delta_1 = \delta_2 \rightarrow \delta_0 \quad \text{zavedeme } \vec{E}_{LP} = E_1 \vec{e}_1 + E_2 \vec{e}_2$$

$$\vec{E} = E \cos(\varphi + \delta_0) \vec{E}_{LP}$$

$$c\vec{B} = E \cos(\varphi + \delta_0) \vec{e}_1 \times \vec{E}_{LP}$$

intenzita $\vec{E}$ se pohybuje v závislosti
na fázi φ harmonicky po úsečce ve směru $\vec{E}_{LP}$



obecná eliptická polarizace lze chápat jako superpozici
dvou lineárních polarizací ve směrech $\vec{e}_1$ a $\vec{e}_2$ s
posunutou fází • $\delta = \delta_2 - \delta_1$

- kruhová polarizace

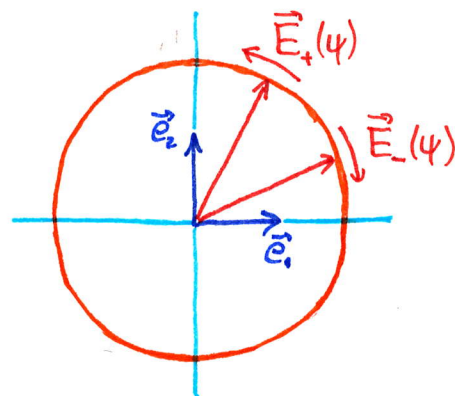
$$\delta_1 = \delta_0 \quad \delta_2 = \delta_0 \mp \frac{\pi}{2} \quad E_1 = E_2 = E$$

$$\vec{E}_\pm = E (\cos(\varphi + \delta_0) \vec{e}_1 \pm \sin(\varphi + \delta_0) \vec{e}_2)$$

$$c\vec{B}_\pm = E (\mp \sin(\varphi + \delta_0) \vec{e}_1 + \cos(\varphi + \delta_0) \vec{e}_2)$$

intenzita $\vec{E}$ se pohybuje v závislosti
na fázi φ rovnoměrně po kružnici

obecná eliptická polarizace lze rozložit na superpozici
kruhových polarizací $\vec{E}_+$ a $\vec{E}_-$



Sférické elektromagnetické vlny

Coulombická kalibrace $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

bez zdrojů $\Rightarrow \rho = 0 \Rightarrow \Delta \phi = 0 \Rightarrow \phi = 0$

elektrické i magnetické pole je dáno vektorovým pot. $\vec{A}$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

rovnice pro potenciál (viz diskuse Coulombické kalibrace)

$$\square \vec{A} = 0$$

převědeme na řešení skalární vlnové rovnice

Debyeův potenciál ψ

$$\vec{A} = i\vec{L}\psi$$

$\vec{L} = -i\vec{r} \times \vec{\nabla}$ (v kvantové mech. operátor momentu hybnosti)
vlastnosti operátoru $\vec{L}$

$$\vec{L}\psi = -i(\vec{e}_\varphi \partial_\theta \psi - \frac{1}{\sin\theta} \vec{e}_\theta \partial_\varphi \psi) \quad \text{akce na skalár ψ }$$

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = 0$$

generuje "transverzální" vektory

$$\vec{L}r = 0$$

operátor v úhlových proměnných θ, φ

$$\vec{L} \cdot \vec{L} = L^2 = -\Delta_{\Omega} = -\left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right]$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} L^2 \quad L^2 \text{ je úhlová část Laplaceova op. } \Delta$$

$$\vec{L}\Delta = \Delta\vec{L}$$

komutace Δ

$$\vec{L}\square = \square\vec{L}$$

komutace $\square = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta$

$$\vec{e}_z \cdot \vec{L} = -i \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

z-složka je derivace v úhlu φ

$$\vec{L} \times \vec{L} = i\vec{L}$$

$$[\vec{a} \cdot \vec{L}, \vec{b} \cdot \vec{L}] = i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{L} \quad \text{vztahy důležité pro kvantovou mechaniku}$$

ansatz pro vektorový potenciál

$$\vec{A} = i\vec{L}\psi$$

$$\square \vec{A} = \square i\vec{L}\psi = i\vec{L}\square\psi$$

rovnice pro Debyeův potenciál

$$\square\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \square \vec{A} = 0$$

řešení skalární vlnové rovnice pro Debyeův potenciál ψ
indukuje řešení vektorové vlnové rovnice pro $\vec{A}$

Dodatek 7F: Własności operatora $\vec{L}$ a $\vec{L}^2$

$$\vec{L} = -i \vec{r} \times \vec{\nabla}$$

$$= -i r \vec{e}_r \times \left[dr \partial_r + r d\vartheta \partial_\vartheta + r \sin\vartheta d\varphi \partial_\varphi \right]$$

$$= -i r \vec{e}_r \times \left[\vec{e}_r \partial_r + \frac{1}{r} \vec{e}_\vartheta \partial_\vartheta + \frac{1}{r \sin\vartheta} \vec{e}_\varphi \partial_\varphi \right]$$

$$= -i \left[\vec{e}_\varphi \partial_\vartheta - \frac{1}{\sin\vartheta} \vec{e}_\vartheta \partial_\varphi \right]$$

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = -i \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla}) = 0$$

$$\vec{L} \vec{r} = -i \vec{r} \times \vec{\nabla} \vec{r} = -i r \vec{e}_r \times \vec{e}_r = 0$$

$$\vec{L} \cdot \vec{L} \psi = -(\vec{r} \times \vec{\nabla}) \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla} \psi) = -\vec{\nabla} \cdot (\underbrace{(\vec{r} \times \vec{\nabla} \psi)}_{\uparrow} \times \vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot (\underbrace{\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\nabla} \psi)}_{\uparrow})$$

$$= \vec{\nabla} \cdot (\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\nabla} \psi)) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\nabla} \psi))$$

$$= \vec{\nabla} \cdot (\vec{r} \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \psi - \vec{\nabla} \psi \vec{r} \cdot \vec{r} + \vec{r} \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \psi - \vec{\nabla} \psi \vec{r}^2)$$

$$= 3 \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \psi - \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \psi + \vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \vec{\nabla} \psi) \cdot \vec{r} - \vec{r}^2 \nabla^2 \psi$$

$$= -\vec{r}^2 \Delta \psi + \vec{e}_r \cdot \vec{\nabla} (r^2 \vec{e}_r \cdot \vec{\nabla} \psi)$$

$$\Downarrow \quad \vec{e}_r \cdot \vec{\nabla} (r^2 \vec{e}_r \cdot \vec{\nabla} \psi) = \vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \vec{\nabla} \psi) \cdot \vec{r} + \vec{e}_r \cdot \vec{\nabla} (r^2 \vec{e}_r) \cdot \vec{\nabla} \psi = \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{r} + 2 \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \psi$$

$$\Delta \psi = \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{\nabla} (r^2 \vec{e}_r \cdot \vec{\nabla} \psi) - \frac{1}{r^2} \vec{L}^2 \psi$$

$$\Downarrow \quad = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \psi) + \frac{1}{r \sin\vartheta} \partial_\vartheta (\sin\vartheta \partial_\vartheta \psi) + \frac{1}{r \sin^2\vartheta} \partial_\varphi^2 \psi$$

$$-\vec{L}^2 = \Delta_{\text{ang}} = \frac{1}{\sin\vartheta} \partial_\vartheta (\sin\vartheta \partial_\vartheta) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \partial_\varphi^2$$

$$i \Delta \vec{L} \psi = q^{mn} \varepsilon^{a_2 b_2} \nabla_m \nabla_n (r_{a_2} \nabla_{b_2} \psi) = \varepsilon^{a_2 b_2} ((\Delta r_{a_2}) \nabla_{b_2} \psi + r_{a_2} \nabla_{b_2} \Delta \psi + 2 q^{mn} (\nabla_m r_{a_2}) (\nabla_n \nabla_{b_2} \psi))$$

$$= i \vec{L}^a \Delta \psi + 2 \varepsilon^{a_2 b_2} \nabla_{a_2} \nabla_{b_2} \psi = i \vec{L}^a \Delta \psi$$

$$i \vec{L} \times i \vec{L} \psi = [\vec{r} \times \vec{\nabla}] \times (\vec{r} \times \vec{\nabla} \psi) = -\vec{r} \cdot \vec{\nabla} (\vec{r} \times \vec{\nabla} \psi) + (\vec{\nabla} (\vec{r} \times \vec{\nabla} \psi)) \cdot \vec{r}$$

$$= -\vec{r} (\vec{\nabla} \psi) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{r}) + \vec{r} \vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \psi) + (\vec{\nabla} \vec{r}) \cdot ((\vec{\nabla} \psi) \times \vec{r}) + (\vec{\nabla} \vec{\nabla} \psi) \cdot (\vec{r} \times \vec{r})$$

$$\Downarrow \quad \vec{L} \times \vec{L} = i \vec{L}$$

TE - pole

pro elektrickou intenzitu a magnetickou indukcii dostaneme

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} i\vec{\Pi} \psi^{TE}$$

$$\square \psi^{TE} = 0$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times i\vec{\Pi} \psi^{TE}$$

platí

$$\vec{r} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{tj. transverzální elektrické (TE) pole}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{B} = \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \times i\vec{\Pi} \psi^{TE} = i\vec{r} \times \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} \psi^{TE} = -\vec{\Pi} \cdot \vec{\Pi} \psi^{TE} = -\Pi^2 \psi^{TE}$$

TM - pole

pro EM pole bez zdrojů máme symetrii $\vec{E} \rightarrow -c\vec{B}$ $\vec{B} \rightarrow \frac{1}{c}\vec{E}$
 mohli bychom zavést duální vektorový potenciál a jeho
 Debyeův potenciál ψ^{TM}

pro elektrickou intenzitu a magnetickou indukcii dostaneme

$$\frac{1}{c}\vec{E} = \vec{\nabla} \times i\vec{\Pi} \psi^{TM}$$

$$\square \psi^{TM} = 0$$

$$c\vec{B} = \frac{\partial}{\partial t} i\vec{\Pi} \psi^{TM}$$

platí

$$\vec{r} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{tj. transverzální magnetické (TM) pole}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{E} = -c \Pi^2 \psi^{TM}$$

Rěšení skalární vlnové rovnice

$$\square \psi = 0$$

separace proměnných ve sférických souřadnicích

$$\psi = R(r) \mathcal{Y}(\vartheta, \varphi) \mathcal{E}(t) \quad \text{viz separace pro } \Delta$$

$$\frac{1}{4} \square \psi = - \underbrace{\frac{1}{c^2} \frac{1}{\mathcal{E}} \frac{d^2 \mathcal{E}}{dt^2}}_{-\omega^2} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} - \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{1}{\mathcal{Y}} \mathcal{L}^2 \mathcal{Y}}_{l(l+1)} = 0$$

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{dt^2} + \omega^2 \mathcal{E} = 0 \quad \text{zvolíme řešení } \exp(-i\omega t) \text{ a označíme } k = \frac{\omega}{c}$$

$$\mathcal{L}^2 \mathcal{Y} = l(l+1) \mathcal{Y} \quad \text{řeší sférické harmoniky } Y_l^m$$

pro radiální závislost

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0$$

řeší tzv. sférické Besselovy funkce

$$R_{kl}(r) = \begin{cases} j_l(kr) = \left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(kr) & j_l(\xi) = (-\xi)^l \left[\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \right]^l \frac{\sin \xi}{\xi} \approx \frac{\xi^l}{(2l+1)!!} \quad \text{pro } \xi \ll 1 \\ n_l(kr) = \left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{\frac{1}{2}} N_{l+\frac{1}{2}}(kr) & n_l(\xi) = -(-\xi)^l \left[\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \right]^l \frac{\cos \xi}{\xi} \approx -\frac{(2l-1)!!}{\xi^{l+1}} \quad \text{pro } \xi \ll 1 \end{cases}$$

souvislost s Besselovými funkcemi

substituce $R = \frac{f}{\sqrt{r}}$ vede na Besselovu rovnici

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{(l+\frac{1}{2})^2}{r^2} \right] f = 0$$

kteřou řeší Besselovy funkce J_ν a N_ν

řešení $j_l(kr)$ a $n_l(kr)$ se liší chováním v počátku a asymptotickým chováním

Rěšení musí zvolit ve shodě s chováním hledaného pole v počátku či v nekonečnu

systém funkcí řešících skalární vlnovou rovnici

$$\psi_{klm} = R_{kl}(r) Y_l^m(\vartheta, \varphi) \exp(-i\omega t)$$

$$\omega = ck \in \mathbb{R}^+ \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad m = -l, \dots, l$$

Rěšení vektorové vlnové rovnice

$$\square \vec{A} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A} = i\vec{\nabla} \psi \quad \square \psi = 0$$

systém funkcí

$$\vec{A}_{k\ell m}^{\text{TE}} = i\vec{\nabla} \psi_{k\ell m}^{\text{TE}}$$

$$\vec{A}_{k\ell m}^{\text{TM}} = i\vec{\nabla} \psi_{k\ell m}^{\text{TM}}$$

$\psi_{k\ell m}^{\text{TE}}$ a $\psi_{k\ell m}^{\text{TM}}$ se mohou lišit volbou
okrajových podmínek pro $R_{k\ell}^{\text{TE}}$ a $R_{k\ell}^{\text{TM}}$

pro EM pole dostáváme rozklad (při fixovaném ω tj. k)

$$\frac{1}{c} \vec{E} = \sum_{\ell m} \left(-a_{k\ell m}^{\text{TE}} \underbrace{\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}}_{-ik} i\vec{\nabla} \psi_{k\ell m}^{\text{TE}} + a_{k\ell m}^{\text{TM}} \vec{\nabla} \times i\vec{\nabla} \psi_{k\ell m}^{\text{TM}} \right)$$

$$\vec{B} = \sum_{\ell m} \left(a_{k\ell m}^{\text{TE}} \vec{\nabla} \times i\vec{\nabla} \psi_{k\ell m}^{\text{TE}} + a_{k\ell m}^{\text{TM}} \underbrace{\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}}_{-ik} i\vec{\nabla} \psi_{k\ell m}^{\text{TM}} \right)$$

Koeficienty $a_{k\ell m}^{\text{TE}}, a_{k\ell m}^{\text{TM}}$ lze získat z radiální komponenty polí

$$\frac{1}{c} \vec{r} \cdot \vec{E} = - \sum_{\ell m} a_{k\ell m}^{\text{TM}} \ell^2 R_{k\ell}^{\text{TM}} Y_{\ell}^m e^{-i\omega t} = - \sum_{\ell m} \ell(\ell+1) a_{k\ell m}^{\text{TM}} R_{k\ell}^{\text{TM}} Y_{\ell}^m e^{-i\omega t}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{B} = - \sum_{\ell m} a_{k\ell m}^{\text{TE}} \ell^2 R_{k\ell}^{\text{TE}} Y_{\ell}^m e^{-i\omega t} = - \sum_{\ell m} \ell(\ell+1) a_{k\ell m}^{\text{TE}} R_{k\ell}^{\text{TE}} Y_{\ell}^m e^{-i\omega t}$$

ortonormalita

$$\int Y_{\ell}^m Y_{\ell'}^{m'} d\Omega = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

↓

$$a_{k\ell m}^{\text{TM}} R_{k\ell}^{\text{TM}}(r) = -\frac{1}{\ell(\ell+1)} \int \frac{1}{c} \vec{r} \cdot \vec{E} Y_{\ell}^{m*} d\Omega e^{i\omega t}$$

$$a_{k\ell m}^{\text{TE}} R_{k\ell}^{\text{TE}}(r) = -\frac{1}{\ell(\ell+1)} \int \vec{r} \cdot \vec{B} Y_{\ell}^{m*} d\Omega e^{i\omega t}$$

stačí vyčíslit pro r , kde máme zadání okrajové podmínky
pro pole

v těchto výrazech předpokládáme, že $\vec{E}$ a $\vec{B}$ mají harmonickou
závislost na čase

$$\vec{E}, \vec{B} \propto \exp(-i\omega t)$$

tj. že se jedná o Fourierův obraz obecných $\vec{E}$ a $\vec{B}$