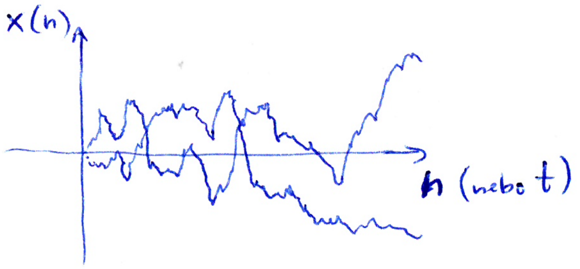
Náhodné procházky v 1D (a 2D – první zápočtová úloha)



- polohu chodce (částice apod.) bereme jako náhodnou proměnnou, ovšem nová poloha závisí na předchozí

$$x_{n+1} = x_n + d\,\xi_n$$

kde d je parametr, který udává „jak dlouhé kroky můžeme dělat" (nemusí jít nutně o maximální krok, jaký můžeme udělat, záleží na volbě ξ_n)
a ξ_n je náhodná proměnná se zvoleným pravděpodobnostím rozdělením (např. rovnoměrným na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$)

- po N krocích, pokud startujeme v počátku, budeme mít

$$x_N = d \sum_{n=1}^{N} \xi_n$$

a pokud $E(\xi_N) = z$ (obvykle nula) a $D(\xi_n) = b^2$ pro $\forall n$, pak podle centrální limitní věty bychom měli dostat

$$E(x_N) = d N E(\xi) = N d z \quad (= 0 \text{ pro } z = 0)$$

a

$$D(x_N) = N d^2 b^2 = \sigma^2$$

neboli

$$\sigma = d b \sqrt{N}$$

- speciálně pro ξ_i rovnoměrně rozdělené na $\langle -1, 1 \rangle$ bude $E(x_N) = 0$ a $D(x_N) = \frac{N d^2}{3}$; $\sigma = \frac{d}{\sqrt{3}} \sqrt{N}$

a pro mnoho náhodných procházek délky N bude jejich rozdělení dáno normálním rozdělením

$$g(x_N) \sim N\left(0, \frac{d}{\sqrt{3}} \sqrt{N}\right)$$

- vygenerujeme-li p náhodných procházek délky N,

pak můžeme ověřit, zda se

$$\sigma = \sqrt{D(X_N)} = \left[\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\left(X_N^{(i)} - E(X_N)\right)^2\right]^{1/2} =$$

$$= \left[\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\left(X_N^{(i)}\right)^2 - \underbrace{\left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}X_N^{(i)}\right)^2}_{\text{měla by být nula}}\right]^{1/2}$$

chová jako $\frac{d}{\sqrt{3}}\sqrt{N}$

- pro střední vzdálenost od počátku

$$E(\|X_N\|) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\|X_N^{(i)}\|$$

dostaneme podobnou závislost, jen s jiným koeficientem, tj. $E(\|X_N\|) \propto c\sqrt{N}$

- výše uvedené platí i ve vícerozměrném případě, jen uvažujeme X_N jako vektor a též x_n a ξ_n jsou nyní vektory

1. zápočtová úloha

- provést statistiku náhodných procházek ve 2D na diskrétní mřížce pro různé typy procházek
  - prostá (náhodně do lib. směru)
  - bez návratu (nelze se okamžitě vrátit, odkud jsme přišli)
  - bez protínání (nelze jít tam, kde už jsme někdy byli)
    - může skončit po určitém počtu kroků

- zadání na webu