• Jacobiho metoda

- základní jednoduchá metoda pro reálné symetrické matice
- základní myšlenka: <u>nulování mimodiagonálních prvků pomocí rotace</u>, tj. ortogonální transformace

Př.: pro matici 2x2 lze diagonalizovat přesně

máme $A = \begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix}$ a hledáme $J = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$ $\quad c = \cos\varphi$, $s = \sin\varphi$

takové, aby $J^T A J = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$

dostaneme podmínku $\quad d(c^2 - s^2) - cs(b-a) = 0$

neboli $\quad \operatorname{tg} 2\varphi = \dfrac{2d}{b-a}$

- pro větší matice iteračně nulujeme prvky pod a nad diagonálou pomocí matic typu

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & c & \cdots & s & & \\ & & \vdots & 1 & \vdots & & \\ & & -s & \cdots & c & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

, avšak použitím takového matice sice vynulujeme prvek na příslušném řádku a sloupci, ale zrušíme nuly z předchozím iteraci (přesto to funguje)

- provádíme-li toto nulování postupně několikrát pro všechny mimodiagonální prvky, dostaneme nakonec diagonální matici
- nulujeme-li prvek a_{pq} (a též a_{qp}) na p-tém řádku a v q-tém sloupci, pak se změní p-tý a q-tý řádek a sloupec takto:

$$\left.\begin{aligned} a'_{rp} &= a'_{pr} = c\,a_{rp} - s\,a_{rq} \\ a'_{rq} &= a'_{qr} = c\,a_{rq} + s\,a_{rp} \end{aligned}\right\} \text{ pro } r \neq p \text{ a } r \neq q$$

$$a'_{pp} = c^2 a_{pp} + s^2 a_{qq} - 2cs\,a_{pq}$$

$$a'_{qq} = s^2 a_{pp} + c^2 a_{qq} + 2cs\,a_{pq}$$

$$a'_{pq} = a'_{qp} = (c^2 - s^2)\,a_{pq} + cs\,(a_{pp} - a_{qq}) = 0$$

neboli musí být $\quad \operatorname{cotg}(2\varphi) = \dfrac{c^2 - s^2}{2cs} = \dfrac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$

- tato základní verze se ovšem nepoužívá kvůli stabilitě
- zaokrouhlovací chyby se méně projeví, pokud vše přepíšeme následovně:

označme $t = \frac{s}{c}$ a $\Theta = \cotg(2\varphi) = \frac{c^2 - s^2}{2sc} = \frac{1-t^2}{2t}$

- t lze vyjádřit přímo pomocí $\Theta = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$ řešením

$$t^2 + 2t\Theta - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\Theta \pm \sqrt{\Theta^2+1}$$

přičemž se ukazuje, že stabilnější volbou je menší ze dvou kořenů

$$t = \begin{cases} -\Theta + \sqrt{\Theta^2+1} = \dfrac{1}{\Theta + \sqrt{\Theta^2+1}} & \text{pro } \Theta > 0 \\ -\Theta - \sqrt{\Theta^2+1} = \dfrac{-1}{-\Theta + \sqrt{\Theta^2+1}} & \text{pro } \Theta < 0 \end{cases} = \frac{\operatorname{sign}(\Theta)}{|\Theta| + \sqrt{\Theta^2+1}}$$

kvůli odečítání dvou blízkých čísel pro velké Θ

- pokud Θ je moc velké a Θ^2 by přeteklo, pak $t = \frac{1}{2\Theta}$
- s a c lze vyjádřit z t takto

$$t^2 = \frac{1-c^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}, \quad s = tc$$

a dostaneme nakonec (s využitím $a_{qq} = a_{pp} + \frac{c^2-s^2}{cs} a_{pq}$)

$$a'_{pq} = a'_{qp} = 0 \qquad a'_{rp} = a'_{pr} = a_{rp} - s(a_{rq} + \tau a_{rp})$$
$$a'_{pp} = a_{pp} - t\, a_{pq} \qquad a'_{rq} = a'_{qr} = a_{rq} + s(a_{rp} - \tau a_{rq})$$
$$a'_{qq} = a_{qq} + t\, a_{pq} \qquad \text{kde } \tau = \frac{s}{1+c}.$$

- lze spočítat, že suma mimodiagonálních prvků $S = \sum_{r \neq s} |a_{rs}|^2$ se změní na $S' = S - 2|a_{pq}|^2$ (zmenší se!)

a postupně zmenšujeme S na nulu (je-li a_{pq} „malé", vynechává se)

- jak rychle? Pokud bychom vždy volili největší $a_{pq} > \frac{S}{n^2}$

pak by platilo $S' < \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) S \Rightarrow S^{(k)} < \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^k S$

a protože každý krok vyžaduje $O(n)$ operací, bude celkem $O(n^3)$ operací

(obecně o něco složitější diskuze)

- vlastní vektory lze získat jako sloupce

$$V = \mathbb{1} \cdot P_1 P_2 \cdots P_k$$

postupnou změnou $V = \mathbb{1}$ pomocí

$$v'_{rs} = v_{rs}, \quad s \neq p,\ s \neq q$$
$$v'_{rp} = c v_{rp} - s v_{rq} = v_{rp} - s(v_{rq} + \tau v_{rp})$$
$$v'_{rq} = s v_{rp} + c v_{rq} = v_{rq} + s(v_{rp} - \tau v_{rq})$$