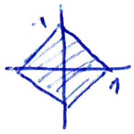
Normy na vektorových prostorech a normy matic

Def: <u>Norma $\|\cdot\|$</u> je zobrazení (funkce) obecně z $\mathbb{C}^m \to \mathbb{R}$ splňující pro $\forall x,y \in \mathbb{C}^m$ a $\alpha \in \mathbb{C}$:

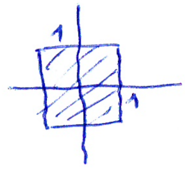
1) $\|x\| \geq 0$ a $\|x\|=0$, právě když $x=0$
2) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost)
3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

- obvykle se na $\mathbb{C}^m$ používají tzv. <u>p-normy</u>, které mají následující jednotkové „koule" $= \{x \in \mathbb{C}^m : \|x\| \leq 1\}$

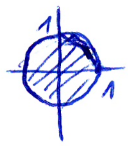
$p=1$: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$



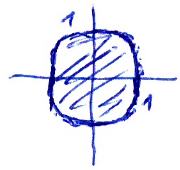
$p=\infty$: $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} |x_i|$



$p=2$: $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2\right)^{1/2}$

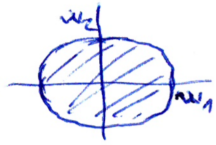


obecné p: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p}$



případně vážené p-normy

$\|x\|_{W,p} = \|Wx\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} |w_i x_i|^p\right)^{1/p}$, kde W je diagonální matice



nebo obecnějí lib. nesingulární matice W, kdy je však definici nutno upravit

<u>Maticová norma indukovaná vektorovými normami</u>

- uvažujme matici $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ jako zobrazení z vekt. prostoru s normou $\|\cdot\|_{(n)}$ do prostoru s normou $\|\cdot\|_{(m)}$ (obvykle stejná norma, jen v různě dimenzionálních prostorech)
- pak <u>indukovaná maticová norma</u> $\|A\|_{(m,n)}$ je nejmenší $C \in \mathbb{R}$ takové, že platí

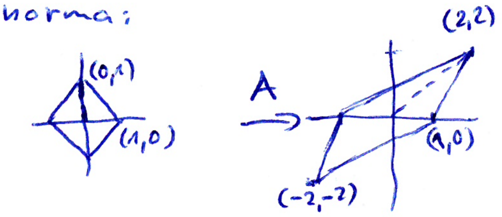
$$\|Ax\|_{(m)} \leq C \|x\|_{(n)}$$

neboli

$$\|A\|_{(m,n)} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{C}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|_{(m)}}{\|x\|_{(n)}} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{C}^n \\ \|x\|_{(n)}=1}} \|Ax\|_{(m)}$$

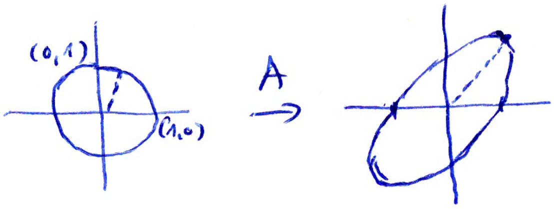
neboli jak moc se „prodlouží" při působení A jednotkové vektory (obecně změní i směr či počet složek :-)

Př. $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}$ 1-norma:



$\Rightarrow \|A\|_1 = 4$

2-norma:

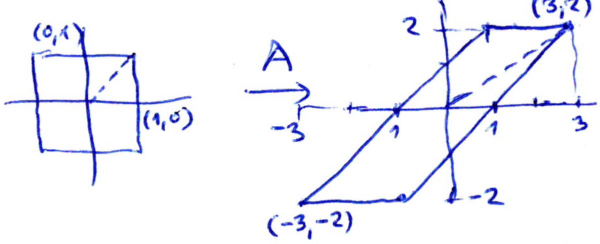


$\Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\frac{9+\sqrt{65}}{2}} \approx$

$\approx 2{,}9208$

pro bod $\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{7}{2\sqrt{65}}}, \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{7}{2\sqrt{65}}}\right)$

∞-norma:



$\|A\|_\infty = 3$

- obecně platí:

1) $\|A\|_1$ = maximum součtu absolutních hodnot sloupcových prvků

$= \max\limits_{1\le j\le n} \|a_j\|_1$, kde a_j je j-tý sloupec matice A

neboť $\|Ax\|_1 = \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j a_j\right\|_1 \le \sum_{j=1}^{n} |x_j|\,\|a_j\|_1 \le \|x\|_1 \cdot \max\limits_{1\le j\le n}\|a_j\|_1$

a volbou $x=e_j$, pro který je $\|a_j\|_1$ maximální, dostaneme rovnost a tedy $\|A\|_1 = \sup\limits_{\|x\|_1=1}\|Ax\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n}\|a_j\|_1$

2) podobně lze ukázat, že

$\|A\|_\infty$ = maximum součtu abs. hodnot řádkových prvků

$= \max\limits_{1\le i\le m}\|a_i^*\|_1$, kde a_i^* je i-tý řádek

3) 2-normu matice $\|A\|_2$ lze určit z maximálního tzv. singulárního čísla, $\max\{\sigma_i\}_{i=1}^{m}$, určených pomocí tzv. SVD rozkladu (viz později)

4) pro odhad normy součinu dvou matic platí

$$\|AB\|_{(\ell,n)} \le \|A\|_{(\ell,m)}\cdot\|B\|_{(m,n)}$$

a speciálně $\|A^n\| \le \|A\|^n$ (obecně ne rovnost)