

Multigridová metoda - ilustrace na 1D problému

- základní myšlenka - přechod od hustších sítí k řídkším a zpět a na každé úrovni potlačujeme „vyšší frekvence“ v chybě řešení

- Jacobiho metoda s vahou (weighted Jacobi method) pro potlačení „vyšších frekvencí“

- jde o obdobu superrelaxační metody (SOR(ω)), ale místo Gaussovy-Seidelovy metody se použije Jacobiho metoda:

$$x_{m+1,j} = (1-\omega)x_{m,j} + \frac{\omega}{a_{jj}} \left(b_j - \sum_{k \neq j} a_{jk} x_{m,k} \right)$$

maticově: $x_{m+1} = R_{Jac}^{\omega} x_m + C_{Jac}^{\omega}$

kde $R_{Jac}^{\omega} = (1-\omega)I + \omega D^{-1}(\tilde{L} + \tilde{U})$, $C_{Jac}^{\omega} = \omega D^{-1}b$

- pro jednorozměrnou Poissonovu rovnici $\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x)$, $u(a) = u_a$, $u(b) = u_b$

jsme měli aproximaci derivace pomocí centrovane diference

vedoucí na soustavu $\sum_{k=1}^n T_{jk} v_k = -h^2 f(x_j)$ na gridu $x_1, \dots, x_n$

kde $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & & 0 \\ 0 & 1/2 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, $\tilde{L} + \tilde{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a tedy lze psát

$$R_{Jac}^{\omega} = (1-\omega)I + \omega \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & & 0 \\ 1/2 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = 1 - \omega \frac{T}{2}, \quad C_{Jac}^{\omega} = \frac{\omega b}{2}$$

- vlastní čísla:

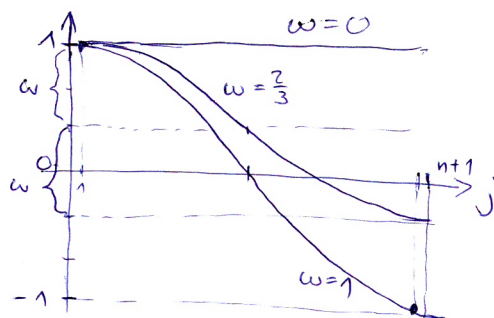
$$\lambda_j(R_{Jac}^{\omega}) = 1 - \omega \left(1 - \cos \frac{\pi j}{n+1} \right) = 1 - \omega + \omega \cos \frac{\pi j}{n+1}$$

aby metoda konvergovala, musí být $0 < \omega \leq 1$

a pro $\omega = \frac{2}{3}$ jsou všechna vlastní čísla

pro $j > \frac{n}{2}$ v intervalu $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

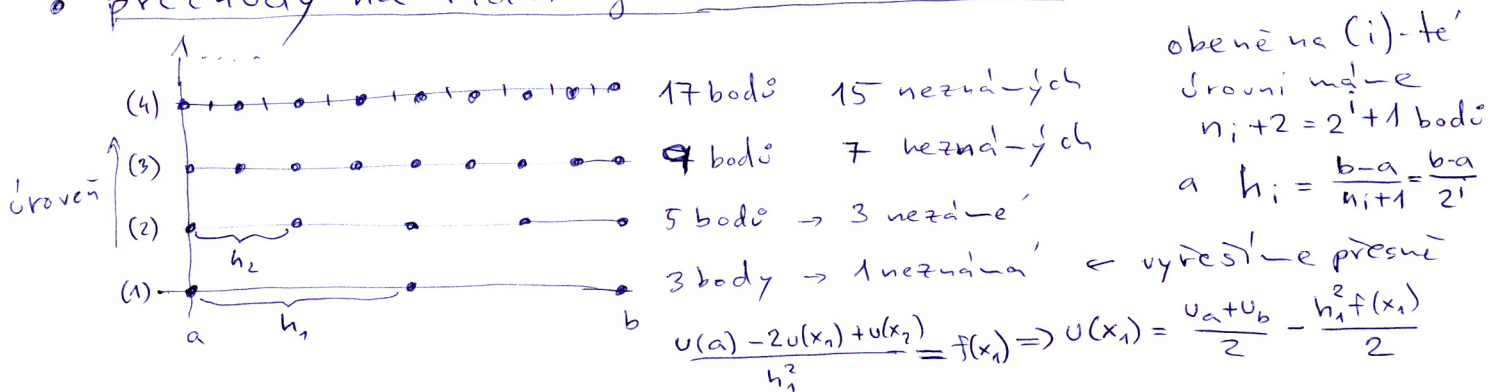
a rozvineme-li chybu $e_0 = \sum_{j=1}^n c_j \xi_j$, bude $(R_{Jac}^{\omega})^m e_0 = \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j^m \xi_j$



a vidíme, že příspěvky od vyšších frekvencí (pro $j > \frac{n}{2}$) budou potlačovány faktorem $\frac{1}{3}$ nebo menším při každé iteraci, naopak nízké frekvence jsou potlačeny velmi málo (v řešení vysoké frekvence zůstávají, pokud jsou v C_{Jac})

- v metodě multigridu se tedy používá tato metoda k potlačení vyšších frekvencí v jednom kroku a přechodem na řidší grid se pak nižší frekvence stávají těmi „vyššími“ a potlačí se v následných krocích
- neprovádí se toto potlačování zbytečně dlouho (obvykle 2-5 iterací) a pak se přejde na řidší grid

• přechody na řidší grid (síť) a zpět



- pro zjednodušení se pouze na nejvyšší úrovni řeší $T^{(i)} u^{(i)} = b^{(i)}$, ale na nižších se hledá pouze oprava $d^{(i)}$ pomocí $T^{(i)} d^{(i)} = r^{(i)}$, kde pravá strana je reziduum $r^{(i)} = T^{(i)} u^{(i)} - b^{(i)}$

a hledané řešení pak je $u^{(i)} - d^{(i)}$, neboť platí

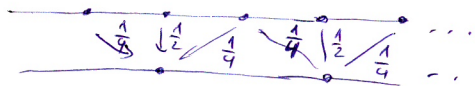
$$T^{(i)} (u^{(i)} - d^{(i)}) = b^{(i)}$$

- výhoda: $d^{(i)}$ by mělo být ideálně nulové $\Rightarrow$ snadné počáteční nastartování nulovým vektorem

a navíc $r^{(i)}$ je v bodech a, b nulové, nemusí se řešit okrajové podmínky

- přechod na nižší úroveň se provádí průběhováním

pro náš 1D problém:

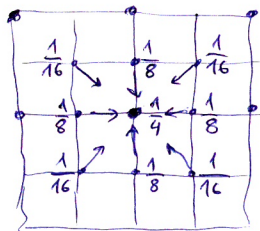


maticově:

$$r^{(i-1)} = P_{(i)}^{(i-1)} r^{(i)}$$

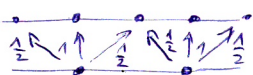
$$\text{kde } P_{(i)}^{(i-1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \dots & 0 \end{pmatrix} \left\} 2^{i-1} - 1$$

např. ve 2D bychom mohli použít



• přechod na vyšší úroveň pomocí interpolace
a prů-ěrování

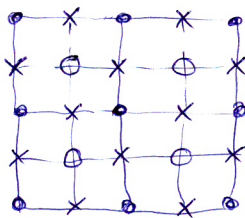
v 1D problému:



$$d^{(i)} = P_{(i-1)}^{(i)} d^{(i-1)}, \quad P_{(i-1)}^{(i)} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ve 2D



- se ponechají
- x průměr z nejbližších 2.
- o průměr z nejbližších 4.

• základní část multigridu je tzv. V-cyklus implementovaný pomocí rekurzivní funkce, vracující řešení $u^{(i)}$ pro pravou stranu $b^{(i)}$:

$$\text{MGV}(b^{(i)}, u^{(i)}) \{$$

pokud $i=1$

$$\text{spočteme přesné řešení } u^{(1)} = \frac{b^{(1)}}{2}$$

jinak

$u^{(i)} = S(b^{(i)}, u^{(i)})$ - tzv. smoothing pomocí několika iterací Jacobiho metody svahou

$$r^{(i)} = T^{(i)} u^{(i)} - b^{(i)} \quad \text{- spočteme reziduum}$$

$$d^{(i)} = \text{Int}(\text{MGV}(4 \text{Rest}(r^{(i)}), 0)) \quad \text{- řešíme}$$

↑
interpolace
pomocí $P_{(i-1)}^{(i)}$

↑
restrikce
pomocí $P_{(i)}^{(i-1)}$

na nižších úrovních

- 0 je dobrý odhad
- 4 tam je kvůli přechodu od h^2 na $(2h)^2 = 4h^2$

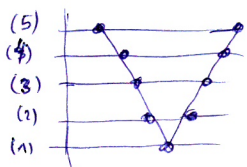
$$u^{(i)} = u^{(i)} - d^{(i)} \quad \text{- oprava řešení}$$

$$u^{(i)} = S(b^{(i)}, u^{(i)}) \quad \text{- opět smoothing pomocí Jacobiho}$$

vrať $u^{(i)}$

}

- celková náročnost jednoho V-cyklu je $\mathcal{O}(n)$, pokud začínáme s n body na začátku



náročnost: $\mathcal{O}(n) \rightarrow$
(pro náš problém)

$$\mathcal{O}(n) \rightarrow$$

neboť Int i Rest $\mathcal{O}(n) \rightarrow$
jsou $\mathcal{O}(n)$ a na nižších úrovních celkem $\mathcal{O}(\frac{n}{2}) + \mathcal{O}(\frac{n}{4}) + \dots + \mathcal{O}(1)$
tedy celkem $\mathcal{O}(n)$

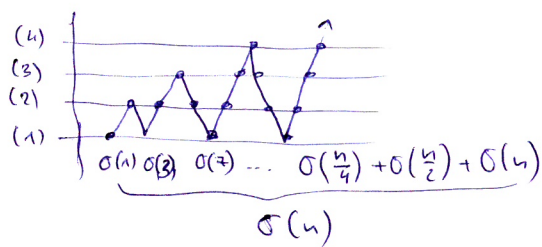
$$\mathcal{O}(n) \rightarrow u^{(i)} = u^{(i)} - d^{(i)} \quad \text{- oprava řešení}$$

$$\mathcal{O}(n) \rightarrow u^{(i)} = S(b^{(i)}, u^{(i)}) \quad \text{- opět smoothing pomocí Jacobiho}$$

• plná multigridová metoda (Full Multigrid)

- používá V-cyklus jako základ

- začne na úrovni (1) → přejde na (2) a udělá V-cyklus →
→ přejde na (3) a opět V-cyklus atd.



algoritmus:

FMG $(b^{(k)}, u^{(k)})$ { ← vrátí řešení $u^{(k)}$ na (k)-té úrovni
vyřeš přesně (1)
pro $i=2, \dots, k$
 $u^{(i)} = \text{MGV}(b^{(i)}, \text{Int}(u^{(i-1)}))$

- pokud nám stačí určitá
přesnost daná diskretizací
chybou $h^{(k)}$, nevyplatí se

zvyšovat počet bodů, ale zůstat pak na (k)-té úrovni a provést
několikrát V-cyklus z úrovně (k) k z přesnění řešení.

• poznámky ke konvergenci

- lze ukázat, že chyba řešení u multigridových metod
je většinou snížena v každém V-cyklu
stejným faktorem < 1 (obvykle podstatně menším
než u jiných metod), a to nezávisle na
tom, na jaké úrovni začínáme

- náznak důkazu je v knize J.Dennela v kap. 6.9.

- je třeba určit vlastnosti matice M odpovídající
jednomu cyklu, která potlačuje chybu $e_{m+1}^{(i)} = M e_m^{(i)}$
tedy především její vlastní čísla

- pro náš problém lze ukázat, že jsou (za jistých
předpokladů a 1 iteraci Jacobiho) $1/9$ a 0 ,
a tedy celá metoda je řádu $O(n)$ pro dosažení
určité přesnosti, neboť počet iterací nezávisí na n

- podrobněji viz Yserentant: Acta Numerica 1993, str. 285