

Poznámky k předpodmínění

- pro urychlení konvergence lze použít předpodmínění

tj. místo $Ax=b$, řešíme $\tilde{M}^{-1}Ax = \tilde{M}^{-1}b$

kde M je vhodná matice, snadno (nebo spíše rozumně efektivně) invertovatelná

- explicitní použití jsme viděli u CG a BiCG metod, používá se však i u ostatních metod, např. metoda GMRES se modifikuje přibližně:

1) jako q_1 se vezme normovaný vektor $r_0 = \tilde{M}^{-1}(b - Ax_0)$

2) místo $v = Ag_k$ použijeme $v = \tilde{M}^{-1}Ag_k$

- Obecné předpodmínovače (nezávislé na problému)

1) Jacobiho předpodmínovač $M = \text{diag}(A)$

- pokud existuje $\tilde{M}^{-1}$ a znění se $\kappa : \kappa(\tilde{M}^{-1}A) \ll \kappa(A)$
pak často funguje velmi dobře

2) neúplný Choleského nebo LU rozklad (IC nebo ILU)

- pokud je A hodně řídká, tak obecně Choleského rozklad $R^T R$ nebo LU rozklad už řídké nejsou

- idea neúplných rozkladů spočívá v tom, že se jako M použije $\tilde{R}^T \tilde{R}$ nebo $\tilde{L} \tilde{U}$, kde se ponechají nenulové prvky pouze na pozicích, kde jsou prvky A nenulové kvůli efektivitě

- ukazuje se, že pro řadu matic toto velmi dobře funguje

3) blokový Jacobiho předpodmínovač

- pokud má matice výraznou „blokově diagonální“ strukturu

$$A = \begin{pmatrix} \square & & \\ & \square & \\ & & \square \end{pmatrix}$$

může posloužit jako dobrý předpodmínovač

$$M = \begin{pmatrix} \square & & 0 \\ & \square & \\ 0 & & \square \end{pmatrix}$$

kde lze každý blok invertovat zvlášť

• Problemově závislé předpodmiňování

- velmi často pracujeme se soustavami $Ax=b$, které pochází z diskretizace PDR popisujících určitý fyzikální systém, jako vhodný předpodmiňovač pak může sloužit „zjednodušený“ systém, nebo „hrubší“ diskretizace

- aproximace na hrubším gridu

- myšlenka podobná jako u multigridu

$$\tilde{M}^{-1} = \text{Interpolace} \circ A_{\text{hrubší}}^{-1} \circ \text{Redukce}$$

kde Redukce přejde z x na hustším gridu na

$\tilde{x}$ na řídkším gridu, tam vyřešíme $A_{\text{hrubší}} \tilde{x} = \tilde{x}$ a interpoluje se zpět na hustší grid

- jako u multigridu se vyřeší „nižší“ frekvence a doiterovávané „vyšší“ na hustším gridu

- lokální, nebo krátkodosahová aproximace

- pokud „vzdálené“ části systému interagují slabě, pak při vhodné uspořádání budou silnější interakce „lokalizovány“ v okolí diagonály matice A a vypnutí dlouhodosahových interakcí může vést na $\tilde{A}$, které lze snadněji invertovat a posloužit jako předpodmiňovač

- diskretizace nižšího řádu

- aproximujeme-li např. derivace v PDR pomocí

konečných diferencí vyššího řádu kvůli přesnosti, často dostáváme „hustší“ matice než u aproximací nižšího řádu, tyto řídkší matice mohou být snáze invertovatelné a lze je tedy považovat jako předpodmiňovač

- další techniky viz např. Trefethen, str. 316-318,

nebo kniha Templates for... dostupná na netlib.org a mnoho dalších