

Konvergence a stabilita metody konečných diferencí

- podobně jako u num. řešení ODR, i zde konvergence znamená, že pro k a h jdoucí k nule dostáváme správné řešení problému a stabilita znamená, že nedochází k zvětšování chyb v průběhu výpočtu
- u ODR platí tzv. Dahlquistův teorém o ekvivalenci konvergence a stability pro konzistentní metody - šlo o obecný výsledek pro lib. jednoznačně řešitelnou nelineární ODR
- zde je obdobný výsledek, tzv. Laxův teorém, ovšem pouze pro lineární PDR a nejde o obecné metody pro lib. PDR (i lineární), ale máme specifická schémata konečných diferencí pro každou rovnici
- podrobnosti v případě hlubšího zájmu naleznete v literatuře, např.
Lax, Richtmyer: Comm. on Pure and Appl. Math 9 (1956) 267
Richtmyer, Morton: Difference Methods for Initial-Value Problems, 2ed, Wiley 1967
Trefethen: Finite Difference and Spectral Methods for ODE and PDE, 1996 (zatím neuplne)
Thomée: SIAM Review 11 (1969) 152-195
- obecná formulace problému s počáteční podmínkou
- budeme uvažovat systém PDR ve tvaru
$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = Au(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(0) = u_0$$
kde $A: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ je lineární operátor na Banachově prostoru $\mathcal{B}$ s určitou normou $\|\cdot\|$
a budeme předpokládat, že existuje jediné řešení $u(t) \in \mathcal{B}$

pro libovolnou počáteční podmínku $u(0) = u_0$ a řešení $u(t)$ závisí spojitě na u_0 .

- okrajové podmínky jsou vynucené vhodnou volbou Banachova prostoru, na kterém hledáme řešení
- funkce $u(t)$ závisí obecně na lib. počtu prostorových proměnných
- jsou zahrnuty i systémy s vyššími derivacemi v čase, pokud je lze zavedením pomocných funkcí jako např.

$$v(t) \equiv \frac{\partial u(t)}{\partial t} \text{ převést do tvaru } \frac{\partial v(t)}{\partial t} = A v(t)$$

- funkce $u(t)$ mohou být obecně vektorové

Pr: B může být např. $L^2(\mathbb{R})$ a $A = \frac{\partial}{\partial x}$ pro přenos
nebo $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ (difúze, vedení tepla) apod.

• obecná formulace schémat konečných diferencí

- obecně jde o trídu omezených lineárních operátorů

$$S_k : B \rightarrow B$$

obvykle závislé na časovém kroku k (prostorový krok h uvažujeme jako funkci časového kroku $h = h(k)$,
např. $h = \frac{k}{\lambda}$ pro přenos $u_t = u_x$, nebo $h = \sqrt{\frac{k}{\alpha}}$ pro $u_t = u_{xx}$)

- přestože jde o operátory na funkcích, jejich aplikace typicky spočívá ve vyčíslení těchto funkcí v určitých diskrétních bodech a můžeme tedy i nov. řešení zapsat pomocí S_k

$$v^{n+1} = S_k v^n \quad \text{neboli} \quad v^n = S_k^n v^0$$

index $\uparrow$ exponent
počáteční data
daná u_0

- operátory S_k by v principu mohly záviset na čase
- lze takto zapsat jak explicitní, tak implicitní metody a dokonce i více krokové metody zavedením vektoru $w^n = (v^n, \dots, v^{n+1-s})$ a vhodnou volbou B

- mohlo by se zdát, že když je T konečné, tak to bude platit vždy pro dostatečně velké C , ale to podstatné je limita pro $k \rightarrow 0$, kdy musí $n \rightarrow \infty$ aby $n_k = t \leq T$

• Laxova věta o ekvivalenci

Nechť $\{S_k\}$ je konzistentní aproximace dobře podmíněného lineárního počátečního problému $\frac{\partial u}{\partial t} = Au(t)$, $u(0) = u_0$,

Pak $\{S_k\}$ je konvergentní právě tehdy, když $\{S_k\}$ je stabilní.

(Dk: viz literatura zmíněná výše)

- definice stability nezávisí na konkrétní PDR, kterou řešíme $\Rightarrow$ význam Lax. věty je v tom, že obtížný problém důkazu konvergence převeď na mnohem snazší důkaz stability daného schématu
- v praxi se stabilita často dokáže tak, že ukážeme, že $\|S_k\| \leq 1$ pro určité k , a tedy $\|S_k^n\| \leq 1 = C$
navíc se nejčastěji používá tzv. von Neumannova analýza stability, která problém řeší v recipročním prostoru (Fourierově obrazu)
i když není tak obecná
- nikde není předpoklad parabolické nebo hyperbolické, jen dobré podmíněnosti (pokud úloha není dobře podmíněná, může i sebemenší chyba vést k exponenciálně jinému řešení než je správné, i když je metoda stabilní)

- globální přesnost - podobně jako u ODR, i zde platí, že pokud je $\{S_k\}$ konvergentní a má řád přesnosti P pro daný systém $(*)$, pak numerické řešení $v(t)$ splňuje $\|v(t) - u(t)\| = O(k^P)$ pro $k \rightarrow 0$ stejnoměrně pro $\forall t \in (0, T)$
(intuitivně aplikujeme $N = \frac{T}{k}$ krát schéma s lokální chybou $O(k^{P+1})$)

• řád metody a konzistence

- schéma $\{S_k\}$ má řád přesnosti p , pokud

$$\|u(t+k) - S_k u(t)\| = O(k^{p+1}) \text{ pro } k \rightarrow 0$$

a pro všechna $t \in \langle 0, T \rangle$, kde $u(t)$ je libovolné, dostatečně hladké řešení počáteční úlohy

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = A u(t), u(0) = u_0 \text{ pro } 0 \leq t \leq T. \quad (*)$$

- $\{S_k\}$ je konzistentní, pokud má řád přesnosti $p > 0$.

(což znamená, že dané schéma opravdu aproximuje určitou rovnici)

- příklady na výpočet řádu přesnosti pomocí Taylorova rozvoje viz výše (minulá přednáška)

• konvergence a stabilita

- schéma $\{S_k\}$ je konvergentní, pokud

$$\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ nk = t}} \|S_k^n u(0) - u(t)\| = 0$$

pro libovolné $t \in \langle 0, T \rangle$, kde $u(t)$ je řešení problému (*)
pro libovolná počáteční data.

(tj. zmenšujeme-li krok a zvyšujeme počet kroků, nakonec dostaneme správné řešení)

Pozn. rozdíl oproti ODR je v tom, že tam jsme měli navíc podmínku, že toto platí pro lib. ODR.

- schéma $\{S_k\}$ je stabilní, pokud $\exists C > 0$ takové,

$$\text{že} \quad \|S_k^n\| \leq C \text{ pro } \forall n, k \text{ takové, že } 0 \leq nk \leq T.$$

neboli musí platit

$$\|v^n\| = \|S_k^n v^0\| \leq C \|v^0\| \text{ pro } \forall v^0 \in B$$

$$\text{a } 0 \leq nk \leq T$$

Podmínky stability pro konečné difference

• máme-li schéma $v^{n+1} = S_k v^n$, neboli $v^n = S_k^n v^0$ (*)

pak je stabilní, pokud $\exists C > 0$ takové, že $\|S_k^n\| \leq C$ pro $\forall n, k$, $0 \leq nk \leq T$

neboli $\|v^n\| \leq C \|v^0\|$ pro $\forall v^0$ a $0 \leq nk \leq T$

pak lze totiž odhadnout chybu v n-tém kroku tak, že od (*)

odečteme $v^{n+1} = S_k v^n + k \tau^n$, kde $v^n = \begin{pmatrix} v(x_1, t_n) \\ \vdots \\ v(x_m, t_n) \end{pmatrix}$, $\tau^n = \begin{pmatrix} \tau(x_1, t_n) \\ \vdots \\ \tau(x_m, t_n) \end{pmatrix}$

čímž dostaneme $e^{n+1} = S_k e^n - k \tau^n$

a po N krocích

$$e^N = S_k^N e^0 - k \sum_{n=1}^N S_k^{N-n} \tau^{n-1}$$

Odtud máte odhad

$$\|e^N\| \leq \|S_k^N\| \|e^0\| + k \sum_{n=1}^N \|S_k^{N-n}\| \|\tau^{n-1}\|$$

a pro stabilní metodu a pro $Nk \leq T$ nakonec máme

$$\|e^N\| \leq C \|e^0\| + TC \max \|\tau^{n-1}\| \rightarrow 0 \text{ pro } k \rightarrow 0, Nk \leq T$$

pokud $\|e^0\| \rightarrow 0$ pro $k \rightarrow 0$

a dostaneme konvergenci.

toto je lokální chyba
aproximace PDR
pomocí konečných
diferencí, pro
konzistentní metodu
 $\|\tau^n\| \rightarrow 0$ pro $k \rightarrow 0$

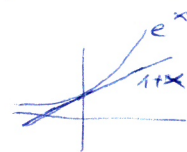
• velmi často platí, že $\|S_k\| \leq 1$ v jisté normě a tedy $C = 1$

ale to je velmi silná podmínka (tzv. silná stabilita)

stačí totiž, pokud $\|S_k\| \leq 1 + \alpha k$, kde α je jistá konstanta, neboli

$$\|S_k^n\| \leq (1 + \alpha k)^n \leq e^{\alpha T} \text{ pro } nk \leq T$$

↑ plyne z nerovnosti $1 + x \leq e^x$
pro $\forall x \in \mathbb{R}$



• von Neumannova analýza stability:

- místo přímého ověření $\|v^{n+1}\|_2 \leq (1 + \alpha k) \|v^n\|_2$

ověříme

$$\|\hat{v}^{n+1}\|_2 \leq (1 + \alpha k) \|\hat{v}^n\|_2 \text{ což platí}$$

díky Parsevalově vztahu $\|\hat{v}\|_2 = \|v\|_2 \sqrt{2\pi}$, kde v a $\hat{v}$ jsou vzájemné

Fourierovy obrazy,

$$v_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \hat{v}(\xi) e^{ijh\xi} d\xi$$

$$\hat{v}(\xi) = h \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j e^{-ijh\xi}$$

pokud v je ℓ_2 funkce
tj. $\|v\|_2$ je konečná

a normy jsou definované takto

$$\|v\|_2 = \sqrt{h \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j|^2}, \quad \|\hat{v}\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi/h}^{\pi/h} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi}$$

neboť pro Fourierův obraz $\hat{v}(\xi)$ bude platit

$$\hat{v}^{n+1}(\xi) = \hat{a}(\xi) \hat{v}^n(\xi) \quad \text{nezavisle pro } \forall \xi$$

Proč?
 neboť $(S_k v^n)_j = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m v_{j+m}^n = (a * v)_j = h \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{j-m} v_m^n$
 (alespoň pro explicitní schéma)
 prostě konvoluce
 a, konkrétně $a_m = \frac{1}{h} \alpha_{-m}$

a tedy $\widehat{v^{n+1}}(\xi) \widehat{S_k v}(\xi) = \widehat{a * v}(\xi) = \hat{a}(\xi) \hat{v}^n(\xi)$

- pokud bude $|\hat{a}(\xi)| \leq 1 + \alpha k$, kde α je nezávislý na ξ ,

pak půjde o stabilní metodu, neboť pak

$$|\hat{v}^{n+1}(\xi)| \leq (1 + \alpha k) |\hat{v}^n(\xi)| \quad \text{pro } \forall \xi$$

a umocněním, integrací a odmocněním máme

$$\|\hat{v}^{n+1}\|_2 \leq (1 + \alpha k) \|\hat{v}^n\|_2$$

- $\hat{a}(\xi)$ se nazývá „amplification factor“ - faktor zvětšení

a bud' ho můžeme určit pomocí Fourier. transformace vektoru a výše
 nebo dosazením do diferenciálního schématu předpokládané řešení

ve tvaru „rovinné vlny“ $v_j^{n+1} = \hat{a}(\xi) e^{ijh\xi} = \hat{a}(\xi) v_j^n$ (**)

Pr. $u_t = u_{xx}$ a explicitní Eulerovo schéma

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \sigma (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) \quad , \text{ kde } \sigma = \frac{k}{h^2}$$

dosazením (**) dostaneme

$$\hat{a}(\xi) e^{ijh\xi} = e^{ijh\xi} \left[1 + \sigma (e^{ih\xi} - 2 + e^{-ih\xi}) \right]$$

$$\hat{a}(\xi) = 1 - 2\sigma (1 - \cos h\xi) \\ = 1 - 4\sigma \sin^2 \frac{h\xi}{2} \quad , \xi \in \left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h} \right]$$

a tedy $|\hat{a}(\xi)| \leq 1$ ~~pro $\forall \xi$~~

pokud $4\sigma \leq 2$, neboli

$$\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

Fourierovou transformací

$$a = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \dots & 0 & \sigma & 1-2\sigma & \sigma & 0 & \dots \\ & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \end{pmatrix} \in \text{index } m$$

neboť má být (jde o konvoluci)

$$v_j^{n+1} = a_{-1} v_{j+1}^n + a_0 v_j^n + a_1 v_{j-1}^n + \dots$$

a tedy $\hat{a}(\xi) = h \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-ijh\xi} a_j =$
 $= \sigma (e^{ih\xi} + e^{-ih\xi}) + (1-2\sigma)1$

↖ což je stejné jako

von Neumannova analýza pro implicitní 1-krokové schéma

• obecně lze psát ve tvaru
$$\sum_{m=-L}^r \beta_m v_{j+m}^{n+1} = \sum_{m=-L}^r \alpha_m v_{j+m}^n \quad (*)$$

přičemž jde o implicitní schéma, pokud $\beta_m \neq 0$ pro nějaké $m \neq 0$

pokud máme nekonečný grid (tak jako v předchozí analýze expl. schémat)

jde o nekonečnou soustavu rovnic $B v^{n+1} = A v^n$ kde B je pásová matice

• problém je, že obecně tato soustava nemá jednoznačné řešení, ovšem pokud se omezíme na funkce $\in \mathcal{L}_h^2$ (tj. $h \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j^2 < \infty$), pak již ~~je~~ existuje jednoznačné řešení a lze ukázat, že podmínkou řešitelnosti je $\hat{b}(\xi) \neq 0$ pro $\xi \in (-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h})$

kde $\hat{b}(\xi)$ je Fourierův obraz $b_m = \frac{1}{h} \beta_{-m}$ vystupující na levé straně, která lze opět zapsat jako konvoluce
$$\sum_{m=-L}^r \beta_m v_{j+m}^{n+1} = b * v^{n+1}$$

• za tohoto předpokladu lze provést Fourierovu transf. a následně vydělit

$$\hat{b}(\xi) : \quad \begin{aligned} \widehat{b * v^{n+1}} &= \widehat{a * v^n} \\ \hat{b}(\xi) \widehat{v^{n+1}}(\xi) &= \hat{a}(\xi) \hat{v^n}(\xi) \Rightarrow \widehat{v^{n+1}}(\xi) = g(\xi) \widehat{v^n}(\xi) \end{aligned}$$

kde $g(\xi) = \frac{\hat{a}(\xi)}{\hat{b}(\xi)}$ je opět faktor zvětšení a protože jde o spojitou fci na $(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h})$, má konečné maximum $\|g\|_\infty = \max_{\xi} \left| \frac{\hat{a}(\xi)}{\hat{b}(\xi)} \right| < \infty$

• na prostoru $\mathcal{L}_h^2$ je funkce jednoznačně určena svým Fourier. obrazem $\Rightarrow$ jednoznačnost řešení $v^{n+1} \in \mathcal{L}_h^2$ a lze celé schéma

psát ve tvaru $v^{n+1} = S_k v^n$, kde S_k je omezený lineární operátor

přičemž $\|S_k^n\| = \|g\|_\infty^n = (\|g\|_\infty)^n$ pro $n \geq 0$

a tedy $\|v^n\| \leq (\|g\|_\infty)^n \|v^0\|$

• podobně jako pro explicitní schéma je nejsnazší najít $g(\xi)$ dosazením $v_j^n = g^n e^{i\xi jh}$ do $(*)$

Pr. Crank-Nicolson pro $u_t = u_{xx}$
$$v_j^{n+1} - v_j^n = \frac{1}{2} \sigma (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) + \frac{1}{2} \sigma (v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1})$$
 kde $\sigma = \frac{k}{h^2}$

dosazením a vydělením $g^n e^{i\xi jh}$ dostaneme

$$g - 1 = \frac{1}{2} \sigma (e^{i\xi h} - 2 + e^{-i\xi h}) + \frac{1}{2} \sigma g (e^{i\xi h} - 2 + e^{-i\xi h})$$

$$\Rightarrow g(1 + \sigma(1 - \cos \xi h)) = 1 - \sigma(1 - \cos \xi h) \Rightarrow g(\xi) = \frac{1 - 2\sigma \sin^2 \frac{\xi h}{2}}{1 + 2\sigma \sin^2 \frac{\xi h}{2}} \neq 0 \quad \checkmark$$

• podmínkou stability je opět $|g(\xi)| \leq 1 + o(k)$ pro $k \rightarrow 0$
 $\alpha + \xi \in (-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h})$

Př. Crank-Nicolson pro $U_t = U_{xx}$: $|g(\xi)| \leq 1$ vždy $\Rightarrow$ bezpodmínečně stabilní

pro $U_t = U_x$: $g(\xi) = \frac{1 + \frac{ik}{2h} \sin \xi h}{1 - \frac{ik}{2h} \sin \xi h}$ a tedy $|g(\xi)| = 1$ pro $\forall \frac{k}{h}$ a ξ

opět vždy stabilní

neboť $\left| \frac{a+ib}{a-ib} \right| = \frac{(\alpha^2 + \beta^2) e^{i\varphi}}{(\alpha^2 + \beta^2) e^{-i\varphi}} = |e^{i2\varphi}| = 1$

pro $U_t = iU_{xx}$ (Schrödinger)

$g(\xi) = \frac{1 - 2i \frac{k}{h^2} \sin^2 \frac{\xi h}{2}}{1 + 2i \frac{k}{h^2} \sin^2 \frac{\xi h}{2}}$ a tedy opět $|g(\xi)| = 1$

$\Rightarrow$ také stabilní pro $\forall k, h, \xi$

von Neumannova analýza pro vektorové řezy a více kroková schémata

• více krokové metody lze převést do tvaru jednokrokové metody, ovšem za cenu zavedení nových proměnných $\rightarrow$ lze ušetřit stejně jako jednokrot. metody pro vektorové funkce

Př. leap-frog pro $U_t = U_x$

$$v_j^{n+1} = v_j^{n-1} + \frac{k}{h} (v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$$

lze převést na

$$\begin{pmatrix} v_j^{n+1} \\ v_j^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{j-1}^n \\ v_{j-1}^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_j^n \\ v_j^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{j+1}^n \\ v_{j+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

neboli $w_j^{n+1} = \alpha_{-1} w_{j-1}^n + \alpha_0 w_j^n + \alpha_1 w_{j+1}^n$ kde $w_j^n = \begin{pmatrix} v_j^n \\ v_j^{n-1} \end{pmatrix}$

což je opět ve tvaru konvoluce $w^{n+1} = a * w^n$

kde ovšem a jsou matice 2×2 $a_n = h^{-1} \alpha_{n,m}$

• Fourierův obraz dává $\widehat{w}^{n+1}(\xi) = \hat{a}(\xi) \widehat{w}^n(\xi)$ &

kde $\hat{a}(\xi)$ jsou opět matice 2×2 a jejich prvky dostaneme

Fourierových transf. příslušných prvků matice a , např. $\hat{a}_n(\xi) = h \sum_{j=-\infty}^{\infty} (a_{j,n}) e^{-ijh\xi}$

Př. pro leap-frog metodu pro $U_t = U_x$ dostaneme

$$\hat{a}(\xi) = \begin{pmatrix} 2i\lambda \sin \xi h & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

jde o tzv. „amplification matrix“ – „matice zvětšení“

foto je obecně i pro implicitní metody spodnímkou $\downarrow \det \hat{b}(\xi) \neq 0$

• pro „růst“ vektoru v^n platí $\|v^n\| \leq (\|G\|_\infty)^n \|v^0\|$, kde $G(\xi) = \hat{b}^{-1}(\xi) \hat{a}(\xi)$
 $\max_{\xi} \|G(\xi)\|_\infty$ přes ξ $\parallel$ pro explicitní metody

• von Neumannovy podmínky pro stabilitu vektorových konečných diferencí

- jak jsme si ukázali, stačí uvažovat 1-krokové metody $v^{n+1} = S_k v^n = a * v^n$
kde nyní v je vektorová fce (tj. kromě indexu j - diskretizace v prostoru -
o M složkách potřebujeme další index pro složky této fce)

- pokud použijeme Fourierovu transformaci, dostaneme obecně

$$\widehat{v}^{n+1}(\xi) = G_k(\xi) \widehat{v}^n(\xi)$$

kde $G(\xi)$ je matice $M \times M$. Má-li být metoda stabilní,

musí být $\|G_k(\xi)^n\|_2 \leq C$ pro $\forall \xi \in (-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h})$ a n, k takové, že $0 \leq nk \leq T$

kde C je jistě konstanta $< \infty$ nezávislá na ξ .

- odhady normy matic $G_k(\xi)^n$ jsou nejčastěji založeny na nerovnostech

$$S(G_k(\xi))^n \leq \|G_k(\xi)^n\| \leq \|G_k(\xi)\|^n$$

kde $S(A)$ je spektrální poloměr matice A , tj. $\max_j |\lambda_j|$, kde λ_j jsou vlastní čísla A

- z těchto obecných nerovností lze odvodit následující podmínky pro stabilitu metody konečných diferencí, a sice

(1) $S(G_k(\xi)) \leq 1 + O(k)$ je nutná podmínka stability

(2) $\|G_k(\xi)\| \leq 1 + O(k)$ je dostačující podmínka stability
pro $k \rightarrow 0$ pro všechna ξ stejnoměrně

Podmínka (1) se nazývá von Neumannova podmínka.

Pozn: 1) podmínka (2) je sice dostačující, což znamená, že pokud je splněna, pak je metoda stabilní, ale není nutnou podmínkou a tedy, pokud není splněna, pak stále může metoda být stabilní.

Př. takovou metodou je leap-frog pro $u_t = u_x$, kde $S(G(\xi)) \leq 1$
pro $\lambda \leq 1$

avšak $\|G(\xi)\| > 1$ pro většinu ξ

přesto je metoda stabilní pro $\lambda < 1$

2) nutnou a dostačující podmínkou je až $S_\varepsilon(G_k(\xi)) \leq 1 + O(\varepsilon) + O(k)$ pro $\varepsilon \rightarrow 0$
pro $\forall \xi \in (-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h})$

kde $S_\varepsilon(A) = \sup_{\lambda \in \Lambda_\varepsilon(A)} |\lambda|$ je tzv. ε -pseudo spektrální poloměr

a $\Lambda_\varepsilon(A)$ značí ε -pseudospektrum matice A

což jsou vlastní čísla matice $A + E$ pro jistou $E \in \mathbb{C}^{M \times M}$, pro kterou $\|E\| \leq \varepsilon$
(viz Trefethen, kap. 4.5)

Pr. von Neumannova analýza metody leap-frog 4. řádu pro $u_t = u_x$

$$v_j^{n+1} = v_j^{n-1} + \frac{4}{3} \lambda (v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) - \frac{1}{6} \lambda (v_{j+2}^n - v_{j-2}^n) \quad (*)$$

• jde o 2-krokovou metodu $\Rightarrow$ zapišme ji jako jednokrokovou

zavedme w^n jako $w_j^n = \begin{pmatrix} v_j^n \\ v_{j-1}^n \end{pmatrix}$

pak $w_j^{n+1} = \begin{pmatrix} v_j^{n+1} \\ v_{j-1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{6} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{j-2}^n \\ v_{j-2}^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4\lambda}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{j-1}^n \\ v_{j-1}^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_j^n \\ v_j^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4\lambda}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{j+1}^n \\ v_{j+1}^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{6} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{j+2}^n \\ v_{j+2}^{n-1} \end{pmatrix}$

je ekvivalentní (*) (druhá rce je triviálně $v_j^n = v_j^n$)

• aby w_j^{n+1} byla konvoluce, tj. $w_j^{n+1} = a * w^n$, musíme vzít $a_m = \frac{1}{h} \alpha_{-m}$

Fourierovou transformací dostaneme $\widehat{w}^{n+1}(\xi) = \hat{a}(\xi) \widehat{w}^n(\xi)$

kde $\hat{a}(\xi)$ je matice 2×2 a její prvky udává Fourier. transf. odpovídajících prvků matice a_m :

$$\hat{a}(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{6}(e^{i2\xi h} - e^{-i2\xi h}) - \frac{4\lambda}{3}(e^{i\xi h} - e^{-i\xi h}) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i\lambda}{3} \sin 2\xi h - \frac{8i\lambda}{3} \sin \xi h & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{"amplification matrix"}$$

• vlastní čísla $\hat{a}(\xi)$: $\det(zI - \hat{a}(\xi)) = z^2 - z \frac{i\lambda}{3} \sin 2\xi h - 1 = 0$

$$z = \frac{i\lambda \sin 2\xi h \pm \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{9} \sin^2 2\xi h}}{2} = \frac{i\lambda}{6} \sin 2\xi h \pm \frac{1}{6} \sqrt{36 - \lambda^2 (\sin 2\xi h - 8 \sin \xi h)^2}$$

neboli $z = i \frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}$

pokud bude $|\frac{\lambda}{2}| \leq 1$, pak bude $|z| \leq 1$ pro všechna ξ , jinak to přeleze na imaginární ose

tj. musí platit $|\lambda(\frac{1}{6} \sin 2\xi h - \frac{4}{3} \sin \xi h)| \leq 1$

funkce $f(\xi h) = \frac{1}{6} \sin 2\xi h - \frac{4}{3} \sin \xi h$ má svůj maxim. a, když

$$f' = \frac{1}{3} (\cos 2\xi h - 4 \cos \xi h) = 0 \Rightarrow \cos \xi = 1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \sin \xi = \pm \sqrt{1 - \frac{3}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}$$

a tedy $\lambda \leq \left[\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{6}\right) \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}} \right]^{-1} = 0,728745 \dots$

nutná podmínka stability, ukazuje se, že je též dostatečná

