# Dodatek ke stabilitě konečných diferencí

- v poznámkách není dokončen rozbor stability metody leap-frog pro $u_t = u_x$. Je tam jen uvedena „matice zvětšení"

$$\hat{a}(\xi) = \begin{pmatrix} i2\lambda \sin \xi h & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

podobně jako u metody leap-frog 4. řádu v prostoru máme vlastní čísla $\det(z\mathbb{1} - \hat{a}(\xi)) = z^2 - ixz - 1 = 0$

$$\Rightarrow \quad z_{1,2} = i\frac{x}{2} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

která jsou obě $|z| \leq 1$ tehdy, když $\left|\frac{x}{2}\right| \leq 1$

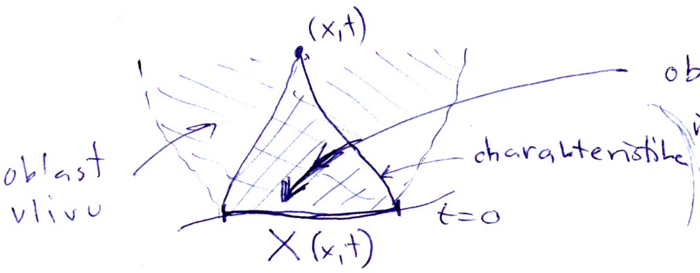
a tedy musí platit

$$|\lambda \sin \xi h| \leq 1 \Rightarrow \lambda \leq 1$$

---

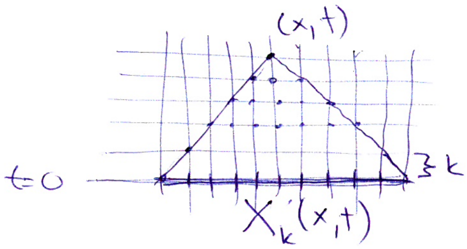
- Courantova - Friedrichsova - Lewyho podmínka (CFL)
  - historicky odvozená jako nutná podmínka stability řešení některých (hyperbolických) PDR
  - zhruba říká, že časový krok nesmí být větší než doba potřebná k tomu, aby vlna (řešení, signál) prošel prostorový krok, i když přesná podmínka závisí na PDR a zvolené metodě
  - obecná formulace je založena na tzv. oblastech závislosti a oblastech vlivu

matematická oblast závislosti $X(x,t)$ pro řešení $u(x,t)$ dané PDR pro bod $(x,t)$




oblast, která ovlivňuje řešení v bodě $(x,t)$ závisí na rychlosti šíření signálu

## numerická oblast závislosti $X_k(x,t)$ pro pevný krok $k$



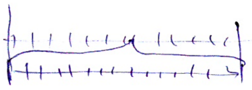

- body (počáteční), které ovlivňují num. řešení $v(x,t)$
  - tj. body sítě $x_j$, pro které jsou počáteční data $v_j^0$ použita v průběhu výpočtu $v(x,t)$
- u explicitních metod jde pro konečné $k$ o konečný počet bodů
- u implicitních metod jde o všechny body
- pro stabilitu je důležitá tzv. limitní numerická oblast závislosti $X_0(x,t)$ pro $k \to 0$

  tj. množina všech limitních bodů množin $X_k(x,t)$ pro $k \to 0$

  (Matematicky: je-li prostor $d$-rozm., $X_0(x,t)$ je množina všech bodů $s \in \mathbb{R}^d$ takových, jejichž každé otevřené okolí obsahuje nějaký bod z $X_k(x,t)$ pro všechna $k$ dostatečně malá)

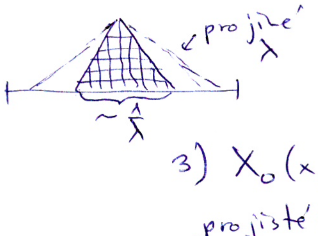
- 3 třídy schémat:

  1) $X_0(x,t)$ je celý prostor (nebo celá část prostoru, na které problém řešíme)



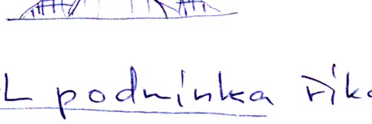
  - nastává pro všechny implicitní metody

  2) $X_0(x,t)$ je jen část prostoru, na kterém problém řešíme




  - případ explicitních metod, pro které $h = \frac{k}{\lambda}$ (tj. prostor se zhušťuje úměrně časovému gridu)

  3) $X_0(x,t)$ je celý prostor, ale $X_k(x,t)$ je konečné pro $\forall k > 0$




  - explicitní metody, kdy se prost. grid zahušťuje pomaleji než časový, např. $\frac{k}{h^2} = \sigma$ pro parabolické problémy

CFL podmínka říká, že pro každý bod $(x,t)$ musí být

$$X(x,t) \subseteq X_0(x,t)$$

aby mohla být metoda stabilní a tedy konvergentní
(jde o nutnou, nikoli dostačující podmínku stability)

## • Příklad von Neumannovy analýzy ve více dimenzích

- uvažujme Eulerovu metodu pro rovnici vedení tepla ve dvou dimenzích $\quad u_t = u_{xx} + u_{yy}$

tj.
$$v_{jl}^{n+1} = v_{jl}^{n} + \sigma\left(v_{j+1,l}^{n} + v_{j,l+1}^{n} - 4v_{jl}^{n} + v_{j-1,l}^{n} + v_{j,l-1}^{n}\right)$$

kde $\sigma = \frac{k}{h^2}$ (používáme stejný krok $h$ v $x$ i $y$)

- podmínku stability můžeme opět dostat buď spočtením Fourierova obrazu (nyní 2D posloupnosti) nebo přímo von Neumannovou anlýzou, kdy dosadíme $\quad v_{jl}^{n} = \hat{a}(\xi_x, \xi_y)^n e^{i(\xi_x jh + \xi_y lh)}$

vykrácením $v_{jl}^n$ dostaneme

$$\hat{a}(\xi_x, \xi_y) = 1 + \sigma\left(e^{i\xi_x h} + e^{i\xi_y h} - 4 + e^{-i\xi_x h} + e^{-i\xi_y h}\right) =$$

$$= 1 - 2\sigma\left(1 - \cos\xi_1 h + 1 - \cos\xi_2 h\right) =$$

$$= 1 - 4\sigma\left(\underbrace{\sin^2\frac{\xi_1 h}{2} + \sin^2\frac{\xi_2 h}{2}}_{\in\langle 0,2\rangle}\right)$$

a tedy aby $\quad |\hat{a}(\xi_x, \xi_y)| \leq 1$

musí být $\quad 4\sigma \leq 1 \quad$ (v 1D jsme měli $4\sigma \leq 2$)

$$\sigma = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{4} \quad \text{(oproti } 1/2 \text{ v 1D !)}$$