Metoda konečných prvků pro modelový problém

• uvažujme pro jednoduchost následující problém

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \quad , \; u(a) = u_a \quad , \; u(b) = u_b$$

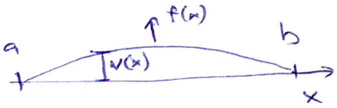
který lze substitucí $u(x) = v(x) + \ell(x)$, $\ell(x) = u_a \dfrac{x-b}{a-b} + u_b \dfrac{x-a}{b-a}$

převést na problém

(D) $$-\frac{d^2v(x)}{dx^2} = f(x) \quad , \; v(a) = v(b) = 0$$

→ toto modeluje např. vychýlení struny při působení „síly" $f(x)$

což bude náš modelový problém



• standardní předpoklady jsou, že $v(x)$ by měla být 2x diferencovatelná, neboli že $v''(x)$ je spojitá a také $v'(x)$ je spojitá ⇒ $f(x)$ může být jen po částech spojitá

⇒ obecná teorie PDR hledá řešení na různých Sobolevových prostorech

• uvažujme nyní prostor

$$V = \{ v(x) : v \text{ je spojitá na } \langle a,b\rangle ,\ v'(x) \text{ je po částech spojitá a omezená na } \langle a,b\rangle \text{ a } v(a) = v(b) = 0 \}$$

a zavedeme skalární součin (ne na tomto prostoru)

$$(v,w) = \int_a^b v(x)\, w(x)\, dx$$ pro reálné, po částech spojité fce

a dále lineární funkcionál $F : V \to \mathbb{R}$

$$F(v) = \frac{1}{2}(v',v') - (f,v)$$ „Lagrangián"

- ukažme, že řešení problému (D) je též řešením tzv. slabé formulace (integrální) téhož problému

(S) Nalezněte $v(x) \in V$ takové, že $(v',w') = (f,w)$ pro $\forall w \in V$

která je navíc ekvivalentní variačnímu problému

(V) Nalezněte $v(x) \in V$ takové, že $F(v) \leq F(w)$ pro $\forall w \in V$

neboť: (D) ⇒ (S) - stačí (D) vynásobit testovací fcí $w \in V$ a integrovat per partes

$$-(v'',w) = (f,w) \Rightarrow (v',w') = (f,v)$$ díky okraj. podmínkám

(S) ⇒ (V) - nechť $v(x)$ je řešením (S), $w \in V$ a $z = w - v \in V$

pak $$F(w) = F(v+z) = \frac{1}{2}(v'+z', v'+z') - (f,v+z) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(v',v') - (f,v)}_{F(v)} + \underbrace{(v',z') - (f,z)}_{0} + \underbrace{\frac{1}{2}(z',z')}_{\geq 0} \geq F(v) \text{ pro } \forall w \in V$$

dle předpokladu v řeší (S)

a konečně (V) $\Rightarrow$ (S) – pokud v je řešením (V), pak pro $w \in V$ a reálné ε platí

$$F(v) \le F(v+\varepsilon w) \quad \text{protože též } v+\varepsilon w \in V$$

– označme-li $g(\varepsilon) = F(v+\varepsilon w) =$

$$= \frac{1}{2}(v',v') + \varepsilon(v',w') + \frac{\varepsilon^2}{2}(w',w') - (f,v) - \varepsilon(f,w)$$

pak $g(\varepsilon)$ má minimum pro $\varepsilon = 0$ a tedy musí platit $g'(0) = 0$

z čehož $\quad 0 = (v',w') - (f,w)$ pro lib. $w \in V$

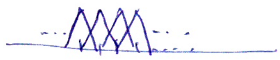
navíc lze ukázat, že je-li $f(x)$ spojitá fce, pak řešení $v(x)$ slabé formy (S) má již nutně spojitou 2. derivaci a lze udělat per partes v (S) obráceně a tedy $v(x)$ je pak i řešením (D)

a protože řešení (S) je jednoznačné

[kdyby v_1 a v_2 byly řešení (S), pak $\int_a^b (v_1'-v_2')\, w \, dx = 0$ a speciálně pro $w = v_1'-v_2'$ máme $\int_a^b (v_1'-v_2')^2 \, dx = 0 \Rightarrow v_1'-v_2' = 0$ pro $\forall x \in \langle a,b \rangle$ a odtud $v_1 - v_2 = \text{konst}$ a díky okraj. podmínkám $v_1 - v_2 = 0$]

dostáváme $\quad$ (D) $\Leftrightarrow$ (S) $\Leftrightarrow$ (V) $\quad$ pro $f(x)$ spojité.

- ovšem je dobré si uvědomit, že slabá formulace (S) připouští řešení i pro nespojité $f(x)$ $\Rightarrow$ jde o zobecnění problému (D)
- další výhoda je, že řešení problému (S) hledáme na prostoru V a tedy funkcí, které nemusí mít spojité první derivace $\Rightarrow$ metoda konečných prvků používá takové báze



$\Rightarrow$ Hlavní myšlenka metody kon. prvků: místo prostoru V použij konečný prostor V_h ($\subset V$)
(h charakterizuje kompaktnost použitých funkcí)

a řeš buď problém (V_h) Nalezni $v_h \in V_h$ takové, že $F(v_h) \le F(w)$ pro $\forall\, w \in V_h$

klasická <u>Ritzova (-Galerkinova) metoda</u>

nebo řeš problém (S) na prostoru V_h $\Rightarrow$ tzv. <u>Galerkinova metoda</u>

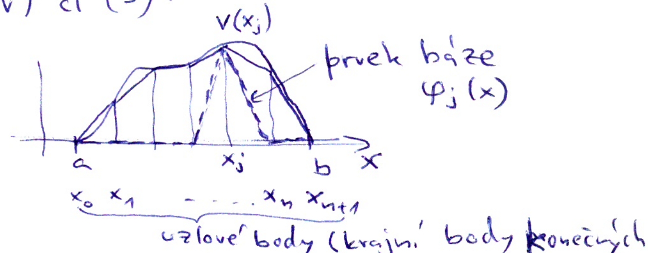
o <u>metodě konečných prvků</u> mluvíme tehdy, zvolíme-li jako bázi V_h po částech polynomy

3 kroky:
1) variační (nebo slabá) formulace daného problému
2) diskretizace, tj. konstrukce konečně-rozměrného prostoru V_h volbou vhodné báze
3) řešení diskrétního problému – typicky velká soustava lin. rovnic

zvláště na kroky 2) a 3) je vhodné použít existující balíky

Metoda konečných prvků pro modelový problém - pokračování

- volba V_h pro problém (D) přeformulovaný na (V) či (S):
  - nejjednodušší po částech lineární fce s bází s kompaktním nosičem
  - rozdělíme $\langle a,b\rangle$ na intervaly $I_j=(x_{j-1},x_j)$ délky $h_j=x_j-x_{j-1}$, $j=1,\dots,n+1$ a položme $h=\max_j h_j$ (h_j typicky různých délek



  - V_h bude prostor fcí, které jsou lineární na každém I_j a jsou spojité na $\langle a,b\rangle$ a splňující $v(a)=v(b)=0 \Rightarrow V_h\subset V$
  - volbou báze $\varphi_k(x_j)=\begin{cases}1, & k=j\\ 0, & k\neq j\end{cases}$, $k,j=1,\dots,n$ můžeme libovolnou fci $v\in V_h$ vyjádřit pomocí hodnot $v(x)$ v uzlových bodech neboť pro $v(x_j)=\eta_j$ bude $v(x)=\sum_{k=1}^n \eta_k\varphi_k(x)$, $x\in\langle a,b\rangle$
  - jedná se tedy o n-rozměrný vektorový prostor
- řešme na tomto prostoru problém (Galerkinova metoda)

$$(S_h)\quad \text{Nalezněte } v_h\in V_h \text{ takové, že } (v_h',w')=(f,w) \text{ pro } \forall w\in V_h$$

  - protože w může být libovolné, musí rovnost platit i pro bázové fce dosadíme-li navíc za $v_h(x)=\sum_{k=1}^n \xi_k\varphi_k(x)$, kde $\xi_k=v_h(x_k)$ dostaneme

$$\sum_{k=1}^n \xi_k(\varphi_k',\varphi_l')=(f,\varphi_l),\quad l=1,\dots,n$$

neboli maticově $\qquad A\xi=b$, kde $a_{kl}=(\varphi_k',\varphi_l')$, $b_l=(f,\varphi_l)$, $\xi=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$

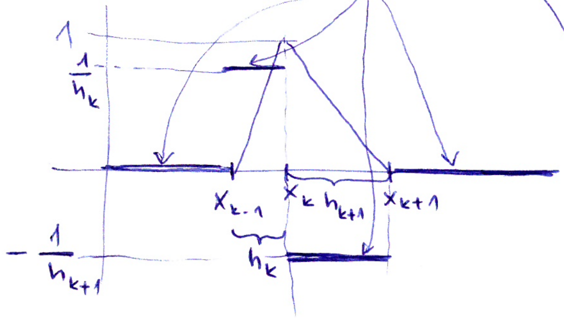
  - o matici A se obvykle ~~mluví~~ jako o matici tuhosti (stiffness matrix) a o vektor b jako o vektoru zatížení (load vector) (podle původní aplikace FEM (finite-element method) na konstrukce)
  - v matem. literatuře se často A nazývá Gramova matice

Pozn: také problém (D) lze řešit volbou vhodné (dostatečně hladké) báze definované na $\langle a,b\rangle$ (např. báze sinů) $\to$ též dostaneme soustavu lineárních rovnic (dosazením za $v(x)=\sum c_n\varphi_n(x)$ a projekcí rovnice (D) na $\varphi_m(x)$) avšak zde počítáme přímo $-\int_a^b \varphi_m(x)\frac{d^2\varphi_n(x)}{dx^2}dx$ a neprovádíme obvykle per partes

• pro náš problém lze matici A snadno spočítat:

- pro bázi $\varphi_k(x)$ = lineární fce splňující $\varphi_k(x_j) = \begin{cases} 1, & k=j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$

dostaneme $\varphi_k'(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq x_{k-1} \text{ a } x \geq x_{k+1} \\ \frac{1}{h_k} & \text{pro } x_{k-1} < x \leq x_k \\ -\frac{1}{h_{k+1}} & \text{pro } x_k < x \leq x_{k+1} \end{cases}$



a tedy $(\varphi_k', \varphi_\ell') = 0$ pro $|k-\ell| > 1$

$$(\varphi_k', \varphi_k') = \left(\frac{1}{h_k}\right)\left(\frac{1}{h_k}\right) h_k + \left(-\frac{1}{h_{k+1}}\right)\left(-\frac{1}{h_{k+1}}\right) h_{k+1} = \frac{1}{h_k} + \frac{1}{h_{k+1}}$$

délka intervalu přes který integrujeme

$$(\varphi_k', \varphi_{k-1}') = \left(\frac{1}{h_k}\right)\left(-\frac{1}{h_k}\right) h_k = -\frac{1}{h_k} = (\varphi_{k-1}', \varphi_k')$$

• speciálně pro ekvidistantní grid $h_k = h = \frac{(b-a)}{n+1}$

dostaneme $(\varphi_k', \varphi_k') = \frac{2}{h}$, $(\varphi_k', \varphi_{k-1}') = -\frac{1}{h}$

a tedy soustavy
$$\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & -1 & 0 \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$
kde

$$b_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x)\varphi_k(x)\,dx$$

pokud b_k aproximujeme pomocí lichoběžníkového pravidla $b_k \approx h\, f(x_k)$

dostaneme totéž jako základní metodou konečných diferencí

• mohli bychom též vzít jako bázi po částech kvadratické, kubické atd. fce

$\Rightarrow$ zvýšení přesnosti