

## Prostory pro řešení PDR pomocí slabých formulací

- když problém řešení PDR neformulujeme slabě (či variace), lze s výhodou pracovat na větších prostorech než jsme měli dosud tj. prostory spojitých fce s počítacími spojitými derivacemi (je to v těchto případech dokonce přirozenější)
- tyto prostory budou navíc vybaveny vhodným skal. součinem  $\Rightarrow$  Hilbertovy prostory

### Základní pojmy na vekt. prostorech

- lineární forma  $L: V \rightarrow \mathbb{R}$  : pro  $\forall v, w \in V$  a  $\beta, \theta \in \mathbb{R}$  platí  $L(\beta v + \theta w) = \beta L(v) + \theta L(w)$
- bilineární forma  $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  je lineární v obou argumentech
- symetrická bilin. forma :  $a(v, w) = a(w, v)$  pro  $\forall v, w \in V$
- skalární součin = symetr. bilin. f., pro kterou  $a(v, v) > 0$  pro  $\forall v \in V$
- norma  $\|\cdot\|_a$  odpovídající skal. součinu  $a(\cdot, \cdot)$  je  $\|v\|_a = \sqrt{a(v, v)}$  pro  $\forall v \in V$
- Cauchyho nerovnost pro lib. skal. součin  $|a(v, w)| \leq \|v\| \|w\|$
- vekt. prostor  $V$  se skal. součinem a odp. normou  $\|\cdot\|$  je Hilbertův prostor, pokud je  $V$  úplný, tj. konverguje každá Cauchyho posloupnost v normě  $\|\cdot\|$   
tj. pokud pro  $v_1, v_2, v_3, \dots$  platí, že pro  $\forall \epsilon > 0 \exists N$  takové, že  $\|v_i - v_j\| < \epsilon$  pro  $i, j > N$   
pak  $\exists v \in V$  takové, že  $\|v - v_i\| \rightarrow 0$  pro  $i \rightarrow \infty$

### Základní Hilbertovy prostory pro eliptické problémy formulované slabě (variace)

- pro problém na int.  $\langle a, b \rangle = I$  máme prostor kvadraticky integrovatelných fce

$$L_2(I) = \left\{ v, v \text{ je definováno na } I \text{ a } \int_I v^2 dx < \infty \right\}$$

$$(v, w) = \int_I v w dx \Rightarrow \|v\|_{L_2(I)} = \left( \int_I v^2 dx \right)^{1/2} = (v, v)^{1/2} \text{ a vidíme, že díky Cauchyho nerovnosti je } (v, w) \text{ dobře definovaný.}$$

pro řešení elipt. problému je však přirozenější prostor (neboť potřebujeme  $(v', w')$ )

$$H^1(I) = \left\{ v; v \text{ a } v' \text{ patří do } L_2(I) \right\} \text{ se skal. součinem}$$

$$(v, w)_{H^1(I)} = \int_I (vw + v'w') dx \text{ a normou } \|v\|_{H^1(I)} = \left( \int_I (v^2 + (v')^2) dx \right)^{1/2}$$

a případně jeho podprostor  $H_0^1(I) = \left\{ v \in H^1(I) : v(a) = v(b) = 0 \right\}$  se stejným skal. součinem.

- původní problém  $-u'' = f$  na  $I = \langle a, b \rangle$  s chr. podm.  $u(a) = u(b) = 0$  lze tedy přeformulovat takto: Najdeme  $u \in H_0^1(I)$  takové, že  $(u', v') = (f, v)$  pro  $\forall v \in H_0^1(I)$  (5)  
kde sk. součin  $(v', v') = \int_I v' v' dx$ .
- $H_0^1(I)$  je větší než původní  $V$  a v skutečnosti největší prostor, pro který má (5) smysl  
a navíc přiro. pro odhad chyby pomocí  $\|v\|_{H^1(I)}$

• obecněji necht'  $\Omega$  je o-reznaná oblast v  $\mathbb{R}^d$ , pak

$$L_2(\Omega) = \left\{ v : v \text{ je definována na } \Omega \text{ a } \int_{\Omega} v^2 dx < \infty \right\}$$

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L_2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L_2(\Omega), i=1, \dots, d \right\}$$

se skal. součin a normou

$$(v, w) = \int_{\Omega} vw dx \quad \Rightarrow \quad \|v\|_{L_2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} v^2 dx \right)^{1/2}$$

$$(v, w)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} [vw + \nabla v \cdot \nabla w] dx \quad \Rightarrow \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{(v, v)_{H^1(\Omega)}}$$

a dále  $H_0^1(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) : v=0 \text{ na hranici } \Gamma \text{ oblasti } \Omega \} \subset H^1(\Omega)$   
a stejný sk. součin jako  $H^1(\Omega)$

Nyní můžeme formulovat slabé a variace úlohu

$$(D) \quad \begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{na } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{na } \Gamma \end{aligned} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$$

jako (S) Nalezte  $u \in H_0^1(\Omega)$  takové, že  $a(u, v) = (f, v)$  pro  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

nebo ekvivalentně

(V) Nalezte  $u \in H_0^1(\Omega)$  takové, že  $F(u) \leq F(v)$  pro  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\text{kde } F(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v)$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = (f, v) = \int_{\Omega} f v dx$$

(Plyne z Greenovy věty:  $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\Omega} v \Delta u dx$ , kde  $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_d} n_d$  je normálová derivace.  $\overset{=0}{\text{pro } v=0 \text{ na } \Gamma}$ )

kteří plyne z Gaussovy věty  $\int_{\Omega} \operatorname{div} A dx = \int_{\Gamma} A \cdot n ds$   
dosazením za  $A = (v \frac{\partial u}{\partial x_1}, 0, \dots, 0)$   $A = (0, v \frac{\partial u}{\partial x_2}, 0, \dots)$  a sečtením)

• obecně je mnohem jednodušší dokázat existenci řešení (S) na rozdíl od (D)

a pro složitější (nelineární) problémy se často uvažuje (S)

Pozn. prostory  $H^1(\Omega)$  a  $H_0^1(\Omega)$  jsou speciální případy Sobolevových prostorů

$$W^{k,p}(\Omega) \text{ pro } p=2 \text{ (tj. vycházejí z } L_2(\Omega) \text{), obecně } L_p(\Omega) \text{ s normou } \|v\|_{L_p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} v^p dx \right)^{1/p}$$

a pro  $k=1$ , tj. stačí první derivace  $L_2$ -integrabilní

obecně pokud se Sobolevův prostor zplní pomocí slabé derivace, dostaneme

Banachův prostor a pro  $p=2$  dokonce Hilbertův prostor, neboť jen na

$L_2(\Omega)$  lze zavést skal. součin odpovídající normě  $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$

# Geometrická interpretace FEM

- pro jednodušnost uvažujeme problém

$$-\Delta u + u = f \text{ na } \Omega \text{ a } u = 0 \text{ na } \Gamma$$

- odpovídající slabou formulaci

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = (f, v) \text{ pro } \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

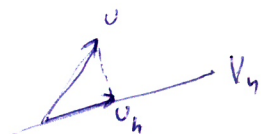
neboli  $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$  tj.  $a(u, v)$  je právě slab. součin na  $H_0^1(\Omega)$

- necht' nyní máme  $V_h \in H_0^1(\Omega)$  jako dříve a hledáme  $u_h \in V_h$ :

$$(u_h, v)_{H_0^1(\Omega)} = (f, v) \text{ pro } \forall v \in V_h$$

- odečtením dostaneme ( $v \in V_h \subset H_0^1(\Omega)$ )

$$(u - u_h, v)_{H_0^1(\Omega)} = 0 \text{ pro } \forall v \in V_h$$



- tj. chyba je kolmá na  $\forall v \in V_h$  vzhledem k  $(\cdot, \cdot)_{H_0^1(\Omega)}$

- neboli přibližné řešení FEM  $u_h$  je projekce  $u$  na  $V_h$  podle  $(\cdot, \cdot)_{H_0^1(\Omega)}$

- a tedy  $u_h$  je nejblíže k  $u$  ze všech  $v \in V_h$  vzhledem k normě  $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|u - v\|_{H_0^1(\Omega)} \text{ pro } \forall v \in V_h$$

## Jiné okrajové podmínky

- pokud máme Dirichletovy okrajové podm.  $u = u_0$  na  $\Gamma$ , pak lze ukázat, že

slabá formulace zní

$$\text{Nalezněte } u \in V(u_0) \text{ takové, že } a(u, v) = (f, v) \text{ pro } \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\text{kde } V(u_0) = \{v \in H^1(\Omega) : v = u_0 \text{ na } \Gamma\}$$

- tj. testování lze uvažovat s nulovou okr. podmínkou

- a okraj. podm. se promítá do volby prostoru, kde hledáme

řešení, zde mluvíme o podstatné okr. podmínce

- na druhou stranu můžeme Neumannovu okr. podm.  $\frac{\partial u}{\partial n} = g$  na  $\Gamma$

dostaneme:

$$\text{Nalezněte } u \in H^1(\Omega) \text{ takové, že } a(u, v) = (f, v) + \langle g, v \rangle \text{ pro } \forall v \in H^1(\Omega)$$

$$\text{kde } \langle g, v \rangle = \int_{\Gamma} g v \, ds \text{ (neboť v Greenově větě nyní nezahodíme okraj. člen a použijeme } \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{)}$$

pro  
smyšlný prostor řešení je  $H^1(\Omega)$  bez jakýchkoli omezení a okr. podmínka je

implicitně obsažena ve slabé formulaci, zde mluvíme o

Pozn. při řešení pomocí FEM bude okr. podm. splněna přibližně.

přirozené okraj. podmínce

## Abstraktní formulace FEM pro eliptické rovnice

- umožňuje jednotně studovat řadu eliptických problémů  
a pochopit obecné principy FEM

• Necht'  $V$  je Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$(\cdot, \cdot)_V \text{ a odpovídající normou } \|\cdot\|_V = \sqrt{(\cdot, \cdot)_V}$$

a necht'  $a(\cdot, \cdot)$  je bilineární forma na  $V \times V$

a  $L(\cdot)$  je lineární forma na  $V$  splňující

(1)  $a(\cdot, \cdot)$  je symetrická, tj.

$$a(v, w) = a(w, v) \quad \text{pro } \forall v, w \in V$$

(2)  $a(\cdot, \cdot)$  je spojitá, tj.  $\exists \gamma > 0$ :

$$|a(v, w)| \leq \gamma \|v\|_V \|w\|_V \quad \text{pro } \forall v, w \in V$$

(3)  $a(\cdot, \cdot)$  je tzv.  $V$ -eliptická, tj.  $\exists \alpha > 0$ :

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \text{pro } \forall v \in V$$

(4)  $L(\cdot)$  je spojitá, tj.  $\exists \Lambda > 0$ :

$$|L(v)| \leq \Lambda \|v\|_V \quad \text{pro } \forall v \in V$$

pak lze obecně ukázat, že problémy

(S) Naleznete  $u \in V$  takové, že

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{pro } \forall v \in V$$

slabá  
formulace

(V) Naleznete  $u \in V$  takové, že  $F(u) \leq F(v)$

$$\text{pro } \forall v \in V, \text{ kde } F(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v)$$

variální  
formulace

jsou ekvivalentní a že existuje jediné řešení  $u \in V$ ,  
které splňuje  $\|u\|_V \leq \frac{\Lambda}{\alpha}$ .

Důk: - ekvivalence obdobně jako u 1D modelového problému

- existence z Lax-Milgramovy věty

- jednoznačnost jako u 1D problému

- vlastnost  $\|u\|_V \leq \frac{\Lambda}{\alpha}$ , tj. omezenost řešení plyne

z (5), (3) a (4):

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq a(u, u) = L(u) \leq \Lambda \|u\|_V \quad \text{a vydělením}$$

Pozn.: Pokud  $a(\cdot, \cdot)$  není symetrická, má (5) stále smysl, ale (v) už ne.

## Diskretizace a odhad chyby

• nechť  $V_h \subset V$  je konečně-rozm. podprostor s dimenzí  $n$

a bázi  $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ , tj. lib.  $v \in V_h$  lze psát jako  $v = \sum_{i=1}^n \eta_i \varphi_i$

kte  $\eta_i \in \mathbb{R}$

• pak FEM pro (5) formulujeme takto:

Nalezněte  $u_h \in V_h$  takové, že

$$a(u_h, v) = L(v) \quad \text{pro } \forall v \in V_h$$

neboli (díky linearitě)

$$a(u_h, \varphi_j) = L(\varphi_j) \quad \text{pro } j=1, \dots, n$$

• položíme-li  $u_h = \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i$ ,  $\xi_i \in \mathbb{R}$ , dostaneme

$$A \xi = b$$

kte  $A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$  a  $b_i = L(\varphi_i)$

• navíc obecně z  $V$ -eliptičnosti plyne

$$0 \leq a(v, v) = a\left(\sum_{i=1}^n \eta_i \varphi_i, \sum_{j=1}^n \eta_j \varphi_j\right) = \eta^T A \eta$$

a  $A$  je tedy pozitivně definitní, symetrická matice

a tedy regulární a existuje řešení  $A \xi = b$

• i pro přibližné řešení  $u_h$  platí (položíme  $v = u_h$ )

$$\alpha \|u_h\|_V^2 \leq a(u_h, u_h) = L(u_h) \leq \Lambda \|u_h\|_V$$

a vydělením  $\|u_h\|_V \leq \frac{\Lambda}{\alpha}$

neboli  $u_h$  je omezené jako správné řešení

(pro slušné  $L(\cdot)$  dává obvykle pravou stranou  $f$ )

a máme stabilitu FEM

- odhad chyby FEM vychází z obecného vztahu

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\gamma}{\alpha} \|u - v\|_V \text{ pro } \forall v \in V_h$$

kteřý plyne z toho, že

$$a(u - u_h, w) = 0 \text{ pro } \forall w \in V_h \quad \left( \begin{array}{l} \text{odčtením (S)} \\ \text{pro } u \text{ a } u_h \end{array} \right)$$

a tedy  $\alpha \|u - u_h\|^2 \overset{V\text{-eliptičnost}}{\leq} a(u - u_h, u - u_h) =$

$$= a(u - u_h, u - u_h + w) = \text{(položíme } v = u_h - w \in V_h)$$

$$= a(u - u_h, u - v) \leq \gamma \|u - u_h\|_V \|u - v\|_V$$

a vydělíme  $\|u - u_h\|_V$

- tento odhad říká, že vzhledem k normě ve  $V$

je  $u_h$  z celého  $V_h$  nejbližší k řešení  $u$

- pro konkrétní úlohu je třeba určit  $\gamma$  a  $\alpha$

a zvolit vhodné  $V$ , kdy lze odhadnout  $\|u - v\|_V$ ,

za  $u$  se obvykle volí po částech lin. (či kvadr. atd.)

fce a odhad lze provést z chyby interpolace

- zavedeme-li  $a$ -normu (tež někdy energetickou normu)

na  $V$  pomocí  $\|v\|_a^2 = a(v, v)$  pro  $v \in V$

kteří je (díky  $V$ -eliptičnosti) ekvivalentní s  $\|\cdot\|_V$

neboť  $\sqrt{\alpha} \|v\|_V \leq \|v\|_a \leq \sqrt{\gamma} \|v\|_V$

pak dostaneme přímo

$$\|u - u_h\|_a \leq \|u - v\|_a \text{ pro } \forall v \in V_h$$

a máme tak projekci  $u$  do  $V_h$  při skalárním součinu  $(\cdot, \cdot)_a = a(\cdot, \cdot)$

Př. ilustrace na modelovém 1D problému na  $I = (a, b)$

$$\int_a^b u' \cdot v' dx = a(u, v) = (f, v) \text{ pro } \forall v \in H_0^1(I) = V$$

$$L(u) = \int_a^b f \cdot v dx$$

- zde  $a(\cdot, \cdot)$  je symetrický a  $L(\cdot)$  lineární

$$\text{a navíc } |a(v, w)| \leq \|v'\|_{L_2(I)} \|w'\|_{L_2(I)} \leq \|v\|_{H^1(I)} \|w\|_{H^1(I)}$$

a tedy  $\gamma = 1$

dále z Cauchyho nerovnosti plyne

$$L(v) = \int_a^b f \cdot v \, dx \leq \|f\|_{L_2(I)} \|v\|_{L_2(I)} \quad \text{a tedy} \quad \Lambda = \|f\|_{L_2(I)}$$

a konečně  $\alpha = \frac{1}{1+(b-a)}$ , neboli  $a(u, v)$  je  $V$ -eliptická,

neboť ze vztahu  $v(x) = v(a) + \int_a^x v'(y) \, dy$

máme díky Cauchyho nerovnosti odhad

$$|v(x)| \leq \int_a^b 1 \cdot |v'(y)| \, dy \leq 1^{1/2} \left( \int_a^b (v'(y))^2 \, dy \right)^{1/2}$$

$$\text{a tedy} \quad \int_a^b |v(x)|^2 \, dx \leq (b-a) \int_a^b (v'(y))^2 \, dy$$

$$\text{z čehož plyne} \quad \|v\|_{H^1(I)}^2 = \int_a^b [(v(x))^2 + v'(x)^2] \, dx \leq \underbrace{(1+(b-a))}_{\frac{1}{\alpha}} \int_a^b (v'(x))^2 \, dx$$

- pro chybu v to-to případě dostaneme

$$\|u - u_h\|_{H^1(I)} \leq (1+(b-a)) \|u - v\|_{H^1(I)} \quad \text{pro } \forall v \in V_h$$

a vezmeme-li za  $v$  interpolovanou  $u$  pomocí po částech lineárních funkcí, pak z chyby interpolace bude

$$|u'(x) - \tilde{u}'_h(x)| \leq h \max_{a \leq y \leq b} |u''(y)|$$

$$\text{a} \quad |u(x) - \tilde{u}_h(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{a \leq y \leq b} |u''(y)|$$

$$\text{a dostáváme (integrací)} \quad \|u - u_h\|_{L_2(I)} \leq C_2 h^2$$

$$\text{ovšem} \quad \|u - u_h\|_{H^1(I)} \leq C_1 h$$