

Spektrální metody přes Fourierovu transformaci

Uvažujeme nejprve nekonečný ekvidistanční grid

$$x_j = j\Delta x, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (j \in \mathbb{Z})$$

a funkci $v(x)$ zadanou body $\{x_j, v(x_j)\}_{j \in \mathbb{Z}}$

- semidiskrétní Fourierova transformace posloupnosti v_j je spojitá (a omezená) funkce (zapředpokládáme, že $\sum_{j \in \mathbb{Z}} v_j^2 < +\infty$)

$$\hat{v}(k) = \Delta x \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-ikx_j} v_j \quad \text{pro } k \in \left(-\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}\right)$$

a inverzní F. transformace je dána pomocí

$$v_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} e^{ikx_j} \hat{v}(k) dk \quad \text{pro } j \in \mathbb{Z}$$

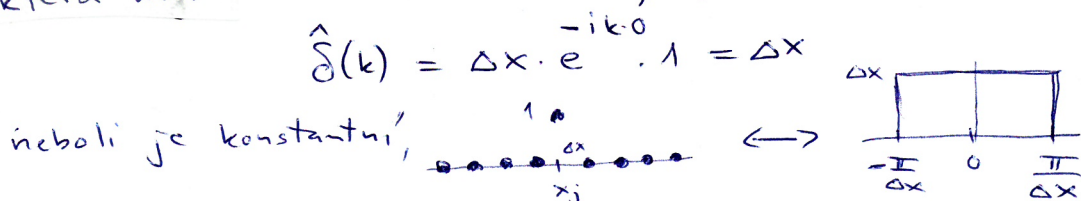
- libovolnou posloupnost (funkci) zadanou pomocí hodnot v_j můžeme rozložit do „ δ -funkcí“, tj. můžeme psát

$$v_j = \sum_{s=-\infty}^{\infty} v_s \delta_{j-s}, \quad \text{kde} \quad \delta_j = \begin{cases} 1 & \text{pro } j=0, \\ 0 & \text{pro } j \neq 0, \end{cases}$$

která má Fourierův obraz daný jednoduše

$$\hat{\delta}(k) = \Delta x \cdot e^{-ik \cdot 0} \cdot 1 = \Delta x$$

neboli je konstantní,



- pomocí $\hat{\delta}(k)$ lze určit inverzní transformaci

funkci $h_j(x)$, která má opět hodnoty $h_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i=j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j, \end{cases}$
a sice

$$\begin{aligned} h_j(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} e^{ik(x-x_j)} \hat{\delta}(k) dk = \\ &= \frac{\Delta x}{2\pi} \left[\frac{e^{ik(x-x_j)}}{ix} \right]_{k=-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} = \frac{\sin \frac{\pi(x-x_j)}{\Delta x}}{\frac{\pi(x-x_j)}{\Delta x}} \end{aligned}$$

neboli

$$h_j(x) = \text{sinc} \pi \frac{(x-x_j)}{\Delta x}$$

a interpolační funkci jdoucí všemi body V_j

vyjadruje jako

vyjádříme jako
$$\rho(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j h_j(x)$$

- odtud již opět dostáváme derivovací matici D_{ij} , tentokrát pro nekonečný ekvidistantní grid,

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x_j} = p'(x_j) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} v_s h'_s(x_j) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} D_{js} v_s.$$

- syzygium

$$h_j(x) = \frac{\cos \frac{\pi(x-x_j)}{\Delta x}}{x-x_j} - \frac{\sin \frac{\pi(x-x_j)}{\Delta x}}{\frac{\pi}{\Delta x}(x-x_j)^2}$$

dostane - e

$$D_{js} = \begin{cases} 0 & \text{pro } j=s \quad (\text{z linity } x \rightarrow x_j) \\ \frac{(-1)^{j-s}}{(j-s)\Delta x} & \text{pro } j \neq s \end{cases}$$

- pro druhé derivace obdobně

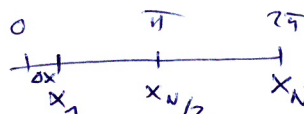
$$D_{js}^{(2)} = \begin{cases} -\frac{\pi^2}{3\Delta x^2} & \text{pro } j=s \\ 2 \frac{(-1)^{j-s+1}}{(j-s)^2 \Delta x^2} & \text{pro } j \neq s \end{cases}$$

- matice vypadají takto

[illegible]

$$D^{(2)} = \frac{2}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} & & & \\ & -\frac{1}{4} & 1 & \\ & 1 & -\frac{h^2}{6} & 1 \\ & & 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

b) pro konečný grid se nyní omezíme pro jednoduchost na interval $(0, 2\pi)$ a sudý počet bodů (pro lichý bychom dostali jiné vzorce, ale nakonec stejnou D jako dříve) které vezmeme posunuté oproti lichému případu

$$x_j = j\Delta x, \text{ kde } \Delta x = \frac{2\pi}{N} \text{ neboli } \frac{\pi}{\Delta x} = \frac{N}{2}$$


- diskretní Fourierova transformace posloupnosti (vektoru) v_j zadané v bodech x_j je (viz zimní se-sestr)

$$\hat{v}_k = \Delta x \sum_{j=1}^N e^{-ikx_j} v_j \quad \text{pro vlnové vektory}$$

$$k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2}$$

(pouze celá čísla)

a inverze je

$$v_j = \frac{1}{\underbrace{2\pi}_{N\Delta x}} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} e^{ikx_j} \hat{v}_k, \quad j=1, \dots, N$$

- předtím, než pomocí x na místo x_j dostaneme opět Lagrangeovy interpolační trigon. polynomy $h_j(x)$ tentokrát pro konečný grid s N (sudý) body, je třeba dát pozor na člen pro $k = \frac{N}{2}$, kdy sice

$$e^{i\frac{N}{2}x_j} \text{ pro zvolené } x_j = j\frac{2\pi}{N} \text{ bude nulové (a tedy reálné)}$$

ovšem derivace už by byla ko-plexní

- protože však $\hat{v}_{-\frac{N}{2}} = \hat{v}_{\frac{N}{2}}$ (periodicita), můžeme

psát

$$v_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} e^{ikx_j} \hat{v}_k, \quad j=1, \dots, N$$

kde $\sum'$ znamená, že v součtu jsou krajní body ($k = \pm \frac{N}{2}$) násobené faktorem $\frac{1}{2}$

- takto již dostaneme pro reálné funkce i reálné derivace

- opět uvažuje „ δ -funkci“

$$\delta_j = \begin{cases} 1 & j=0 \pmod{N} \\ 0 & j \neq 0 \pmod{N} \end{cases}$$

abychom určili Lagrangeův int. trig. polynom

- i zde platí $\hat{\delta}_k = \Delta x$

atedy

$$h_j(x) = \frac{\Delta x}{2\pi} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} e^{ik(x-x_j)}$$

roztřídění na 2 sumy,
v první je $k = -\frac{N}{2}$ a
ve druhé $k = \frac{N}{2}$

$$= \frac{\Delta x}{2\pi} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} e^{ik(x-x_j)} + \frac{1}{2} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} e^{ik(x-x_j)} \right) =$$

posunuti
indexu o $\frac{1}{2}$
o vytknutí
 $\cos \frac{x}{2} = \frac{e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}}}{2}$

$$= \frac{\Delta x}{2\pi} \cos \frac{x-x_j}{2} \sum_{k=-\frac{N}{2}+\frac{1}{2}}^{\frac{N}{2}-\frac{1}{2}} e^{ikx}$$

opět využije-e
vzorec pro $\sum_{k=p}^q q^k$
a převod na sin...

$$= \frac{\Delta x}{2\pi} \cos \frac{x-x_j}{2} \frac{\sin \frac{N}{2}(x-x_j)}{\sin \frac{x-x_j}{2}}$$

- dostali jsme

$$h_j(x) = \frac{\sin \frac{\pi(x-x_j)}{\Delta x}}{\frac{2\pi}{\Delta x} \operatorname{tg} \frac{x-x_j}{2}}$$

a interpolační funkci opět píšeme

$$p(x) = \sum_{j=1}^N v_j h_j(x)$$

- derivovací matice tak je

$$D_{ij} = h'_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{pro } j=i \\ \frac{1}{2} (-1)^{i-j} \cotg \frac{(i-j)\Delta x}{2} & \text{pro } j \neq i \end{cases}$$

Při-e' použití Fourierovy transformace

- při i-plementaci na řešení PDR, lze vektor $V = (v_1, \dots, v_N)$

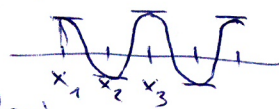
bud' násobit D , abychom dostali v' , nebo lze použít

rychlou Fourierovu transformaci (FFT - viz zinní se-estr)

k výpočtu $\hat{v}_k$, které pak násobíme ik s tím, že

pro $k = \frac{N}{2}$ násobíme 0, protože jde o funkci

kteří -a' v x_i nulové derivace



a v' spočte-e jako inverzní FT pro $\hat{w}_k = ik \hat{v}_k$, $\hat{w}_{\frac{N}{2}} = 0$