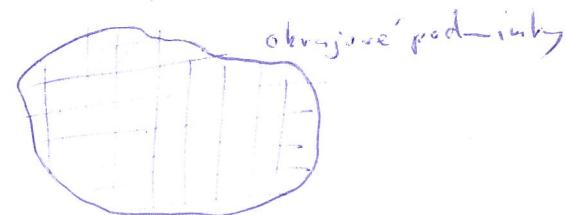
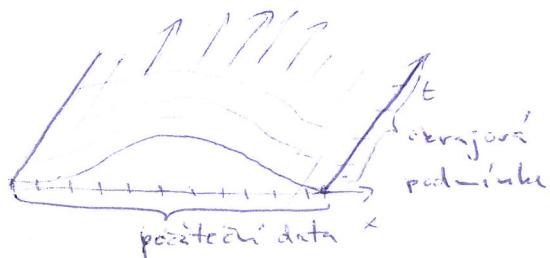


Numerické metody ve fyzice II - NTMF058

- kontakt: Karel.Houfek@gmail.com, tel. 221 91 2513, A1038
informace o přednášce a zápočtové úlohy zde na stránkách
Martina Čížka: utf.mff.cuni.cz/~mcizek/
- zápočet - za jednu úlohu
- zkouška - jistě o metodách (řád, stabilita, přesnost atď...)
- literatura - Press et al: Numerical Recipes in C, 3rd Ed. (Cambridge 2007)
(starší vydání i ve Fortanu)
 - Koonin: Computational Physics, kap. 6-8
 - Vítasek: Numerické metody
a další později dle potřeby
 - některé dostupné elektronicky: utf/~houfek/resourcesXX/
kde XX je aktuální měsíc ± 2

Parciální diferenciální rovnice a jejich numerické řešení

- většina PDR nelze řešit analyticky, navíc je řešení vedeno složitými okrajovými podmínkami \Rightarrow nutnost numerických metod
- základní dělení na elliptické, parab. a hyperbolické rovnice vyhovuje pro numerické řešení jen z částí \rightarrow lépe rozdělit na:
~~delik~~ rovnice popisující - časový vývoj - rovnice sloučené s vedením tepla
a statické řešení - Laplaceova, Poissonova
(stacionární) (elliptické)
- tj. na initial value problems (počáteční podmínky)
- boundary value problems (okrajové podmínky)
- outgoing wave boundary condition (řešení osciluje do nekonečna)



Vzorce pro konečné diference

(diskretizace prostoru a času)

- body (x_j, t_n) definiují grid (težišek mesh)
na kterém approximuje fci $u(x, t)$ pomocí hodnot v_j^n (funkce na gridu)

$$v_j^n \approx u(x_j, t_n)$$

příložení $u(x, t)$ je řešení jisté PDR

(např. $u_t = u_x$, $u_{tt} = u_{xx}$ apod.) s příslušnou počáteční ($t=0$) a okrajovou (x_0, x_J) podmínkou.

- cílem je převést PDR na konečnou soustavu lineárních rovnic a dostat pak co nejlepší approx. $u(x, t)$
- v bodech (x_j, t_n) .

- nejjednodušší diskretizace PDR pomocí konečných differencií vede obecně na tzv. s-krokové diferenční vzorce, pomocí kterých lze ne základě

zadních hodnot $v_j^{n+1-s}, v_j^{n+1-s+1}, \dots, v_j^n$ určit hodnoty v_j^{n+1} ($j=0, \dots, J$)

- Pokud vzorec obsahuje ~~jedinou~~ ~~nejen jednu~~ ~~nežádoucí~~ v_j^{n+1} v čase t_{n+1} , jde o explicitní vzorec, schéma

a pokud obsahuje několik v_j^{n+1} v čase t_{n+1} , jde o implicitní vzorec (nutno řešit soustavu lin. rovnic)

- Čím je s výšší, tím je obvykle schéma přesnejší, ovšem za cenu parétovej náročnosti (nutno uložit s předešlých kroků)

a někdy těž za cenu nestability

- těž je nutné vytestit ~~na~~ nastartování schématu, tj. zadat či nejít počáteční hodnoty $v_j^0, v_j^1, \dots, v_j^{s-1}$.

Príklad $u_t = u_x$ (zahrnuje i např. $u_{tt} = u_{xx}$, neboť lze převést na soustavu 1. řádu)

Euler, $\frac{1}{k}(v_j^{n+1} - v_j^n) = \frac{1}{2h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$
(explicitní schéma) těž $\delta^+ v = \delta_o v$

$$u_t = u_{xx}$$

$$\frac{1}{k}(v_j^{n+1} - v_j^n) = \frac{1}{h^2}(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)$$

stabilní pro $\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$

$$\delta^+ v = \delta_x v$$

Crank-Nicolson (implicitní schéma)

$$\frac{1}{k}(v_j^{n+1} - v_j^n) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) + \frac{1}{2h}(v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1})\right]$$

stabilní, užší

$$\frac{1}{k}(v_j^{n+1} - v_j^n) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{h^2}(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) + \frac{1}{h^2}(v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1})\right]$$

$$\delta^+ v = \mu^+ \delta_x v$$

Leap-frog

explicitní, stabilita pro $k/h \leq 1$ $\frac{1}{2k}(v_j^{n+1} - v_j^{n-1}) = \frac{1}{2h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$ $\delta^0 v = \delta_o v$

$$\delta^0 v = \delta_x v$$

nestabilní

~~Obrázek vzorce pro koncové diferenční počítání~~

Zápis vzorce pro účí operátory

- operator posunutí v čase (the shift operator) $\mathcal{Z} v_j^n = v_{j+1}^{n+1}$
- v prostoru (space —) $\mathcal{K} v_j^n = v_{j+1}^n$
- operator identity $\mathcal{I} v_j^n = v_j^n$
- pomocí těchto operátorů definuje se op. konečných prostor. diferenční a primární op.

operátory 1. řádu	$M_+ = \frac{1}{2}(I + K)$ forward averaging	$M_- = \frac{1}{2}(K^{-1} + I)$ backward averaging	$M_0 = \frac{1}{2}(K^{-1} + K)$ centered averaging
	$\delta_t^{(h)} = \frac{1}{h}(K - I)$	$\delta_x^{(h)} = \frac{1}{h}(I - K^{-1})$	$\delta_o^{(h)} = \frac{1}{2h}(K - K^{-1})$
	op. 2. řádu $\leftarrow \delta_x^{(h)} = \frac{1}{h^2}(K - 2I + K^{-1}) = \delta_+ \delta_- = \delta_- \delta_+ = [\delta_o(\frac{h}{2})]^2$		

- zcela analogicky op. časové (indexy nahore a dolu $K \rightarrow \mathcal{Z}$ a $h \rightarrow k$)

např. $\delta^+ = \frac{1}{k}(\mathcal{Z} - I)$ a $\delta^x = \frac{1}{k^2}(\mathcal{Z} - 2I + \mathcal{Z}^{-1})$

Pozn. : $\delta_o(\frac{h}{2})v_j = \frac{1}{h}(v_{j+\frac{1}{2}}^n - v_{j-\frac{1}{2}}^n)$ a $\delta_o(2h)v_j = \frac{1}{4h}(K^2 - K^{-2})v_j = \frac{1}{4h}(v_{j+2}^n - v_{j-2}^n)$

Další příklady: $U_t = U_X$

Upwind $\delta^+ v = \delta_+ v \leftrightarrow \frac{1}{h}(v_{j+1}^{n+1} - v_j^n) = \frac{1}{h}(v_{j+1}^n - v_j^n)$

Lax-Wendroff (1960) $\delta^+ v = \delta_o v + \frac{1}{2}k \delta_x^2 v \quad \frac{1}{h}(v_{j+1}^{n+1} - v_j^n) = \frac{1}{2h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) + \frac{k}{2h^2}(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)$
 dissipativní člen
 (stabil-ejší)

obecné sítirokové lineární schéma konečných diferenčí (pro lineární PDE)

je vztah $\sum_{\nu=0}^s \sum_{\mu=-r}^r \alpha_{\mu\nu} v_{j+\mu}^{n+1-\nu} = 0$ kde $\alpha_{\mu\nu}$ jsou konstanty
 a $\alpha_{00} \neq 0$, $\alpha_{-r,r} \neq 0$ pro nejake ν_1
 a $\alpha_{r,r} \neq 0$ pro nejake ν_2

Pokud $\alpha_{\mu 0} = 0$ pro $\forall \mu \neq 0$, máme explicitní schéma, pokud $\alpha_{00} \neq 0$ pro nejake $\mu \neq 0$, máme implicitní schéma.

- pro vektorové v_j^n (vektor o M složkách) je $\alpha_{\mu\nu}$ matice $M \times M$ a málo
- $\alpha_{\mu\nu} \neq 0$ lze $\det \alpha_{\mu\nu} \neq 0$

Pr.: Crank-Nicholson pro $U_t = U_{XX}$, $s=1$, tj. 1-krokové schéma, $\mu = -1, 0, 1$, tj. $\ell = 1, r = 1$
 v nabíjení hodnot 0 a 1 a $\alpha_{\mu 0} \neq 0$ pro $\mu = \pm 1 \Rightarrow$ implicitní schéma

dále $\alpha_{-1,1} = \frac{k}{2h^2}$ (koeficient u v_{j-1}^n) atd

$$\tau = \frac{k}{h^2} \quad \text{celkově} \quad \alpha_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \mu = 0 \\ \frac{-\tau}{2} & \mu = 1 \\ 1 + \tau & \mu = -1 \\ \frac{\tau}{2} & \mu = \pm 1 \end{cases}$$

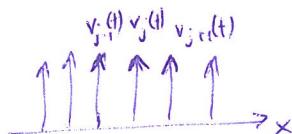
Prostorové konečné diferencie a metoda príkľuk (method of lines)

- velmi často se proces diskretizace prostor. a čas. premenlivych delší oddelené, nejprve diskretizuje prostor. \rightarrow např. konečný-diferencemi, ale že i jinak (rozvojen do báze apod.) \rightarrow a pak řešíme numericky soustavu různých obj. dif. rovnic v čase

Pr. Eulerova explicitní schéma je vlastní řešení soustavy
pro $u_t = u_{xx}$

$$\frac{\partial v_j(t)}{\partial t} = \delta_x v(t) = \frac{1}{h^2} (v_{j+1}(t) - 2v_j(t) + v_{j-1}(t))$$

Fošlne tedy PDR na príkľukách



- výhoda tohoto přístupu je, že můžeme použít metody a kódy pro soustavy ODR

• tato ~~soustava ODR~~ se též nazývá semidiskrétní approximace PDR
a metoda se nazývá metoda príkľuk

- mnohé ze standardních metod jsou také typu (Euler, Crank-Nicolson)
avšak jsou dležitě případy, kdy toto fakt není, např.

Lax-Wendroff pro $u_x = u_t$

Vzorce pro centrální konečné diferencie na ekvidistantní gridu

Pro každé $p \geq 1$ existuje jediný differenciální operátor prvního řádu D_{2p}
a druhého řádu $D_{2p}^{(2)}$ s řádu přesnosti $2p$, který poskytuje body v_{j-p}, \dots, v_{j+p}

a sice

$$D_{2p} = \sum_{k=1}^p \alpha_k \delta_x(kh), \quad D_{2p}^{(2)} = \sum_{k=1}^p \alpha_k \delta_x^{(2)}(kh)$$

$$\text{kde } \alpha_k = 2(-1)^{k+1} \frac{\binom{p-k}{p}}{\binom{p+k}{p}} = 2(-1)^{k+1} \frac{(p!)^2}{(p-k)!(p+k)!} \quad \alpha = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p (\# v_{j+k} - v_{j-k})$$

NP. pro $p=2$ (5-budovy vzorec) máme

$$\delta_x(kh)_j = \frac{1}{(kh)^2} (v_{j+2} - 2v_j + v_{j-2})$$

$$D_{2p}^{(2)} = \frac{4}{3} \delta_x(h) - \frac{1}{3} \delta_x(2h) \Rightarrow$$

$$D_{2p}^{(2)} v_j = -\frac{1}{12} v_{j+2} + \frac{4}{3} v_{j+1} - \frac{5}{2} v_j + \frac{4}{3} v_{j-1} - \frac{1}{12} v_{j-2}$$

Konečné diference pro prostorové prostory

- čím vysší přesnost diskretizace požadujeme, tím více bodové vzorce musíme použít
- pro sít složenou z ekvidistantních bodů je snadné approximant derivace použít Taylorova rozvěj, i když pro vzorce vysšího řádu pracuje → soustava lin. rovnic

Př. 5-bodová centrální approx. 2. derivace

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) + \dots$$

$$\text{podobně } u(x-h) \approx u(x+2h) \approx u(x-2h)$$

a požadujeme využití členů $u'(x)$, $u'''(x)$, $u^{(4)}(x)$ a $u^{(5)}(x)$

→ vynásobíme řecky a, b, c, d a resíme soustavu rovnic

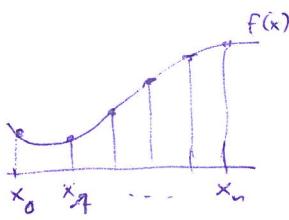
(možno položit např. $d=1$), dostali bychom

$$a=b=-16c=-16d$$

a tedy

$$u''(x) \approx \frac{1}{h^2} \left(-\frac{u(x+2h)}{12} + \frac{4}{3}u(x+h) - \frac{5}{2}u(x) + \frac{4}{3}u(x-h) - \frac{1}{12}u(x-2h) \right)$$

- Ile i jinak, např. použití derivací interpolačních polynomů



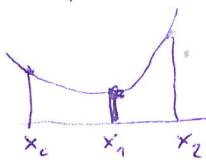
- zadáte-li funkci $f(x)$ v bodech x_0, x_1, \dots, x_n

- možno ji approximant interp. polynomem n-teho stupně, např. Lagrangeův int. pol.

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x-x_k}{x_i-x_k}$$

- derivaci funkce v bode x_j , pak approximuje derivaci tohoto polynomu

Př. 3-bodový vzorec pro 2. derivaci (centrální)



$$P_2(x) = f(x_0) \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \dots = \begin{pmatrix} \text{pro ekvidistantní} \\ \text{sít' s rozolem } h \\ \text{pozorn na znaménka} \\ x_0-x_1=-h \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{f(x_0)}{2h^2} (x-x_1)(x-x_2) + \frac{f(x_1)}{h^2} (x-x_0)(x-x_2) + \frac{f(x_2)}{2h^2} (x-x_0)(x-x_1)$$

$$\Rightarrow f''(x_1) \approx \left. \frac{d^2 P_2(x)}{dx^2} \right|_{x_1} = \frac{1}{h^2} (f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2))$$

ab. Fornberg, "Generation of finite difference formulas on arbitrary spaced grid"
Math. Comp. 51 (1988) 699 (Mathematics of Computation, JSTOR)

implementováno v Mathematici: NDsolveFiniteDifferenceDerivative...

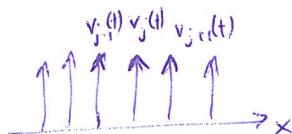
Prostorové konečné diferencie a metoda príkľuk (method of lines)

- velmi často se proces diskretizace prostor. a čas. premenlivych delí oddeleně, nejprve diskretizuje prostor. → např. konečnými diferencemi, ale že i jinak (rozvojen do báze apod.) → a pak řešíme numericky soustavu různých obj. dif. rovnic v čase

Pr. Eulerova explicitní schéma je vlastní řešení soustavy pro $u_t = u_{xx}$

$$\frac{\partial v_j(t)}{\partial t} = \delta_x v(t) = \frac{1}{h^2} (v_{j+1}(t) - 2v_j(t) + v_{j-1}(t))$$

Fošíme tedy PDR na gridech



- výhoda tohoto přístupu je, že můžeme použít metody a kódy pro soustavy ODR
- tato ~~soustava ODR~~ se též nazývá semidiskrétní approximace PDR a metoda se nazývá metoda príkľuk

- mnohé ze standardních metod jsou také typu (Euler, Crank-Nicolson)
- avšak jsou dležitě případy, kdy toto fakt není, např.

Lax-Wendroff pro $u_x = u_t$

Vzorce pro centrální konečné diferencie na ekvidistantním gridu

Pro každé $p \geq 1$ existuje jediný differenciální operátor prvního řádu D_{2p} a druhého řádu $D_{2p}^{(2)}$ a řádu přesnosti $2p$, který poskytuje body v_{j-p}, \dots, v_{j+p}

a sice

$$D_{2p} = \sum_{k=1}^p \alpha_k \delta_c(kh), \quad D_{2p}^{(2)} = \sum_{k=1}^p \alpha_k \delta_x(kh)$$

$$\text{kde } \alpha_k = 2(-1)^{k+1} \frac{\binom{p-k}{p}}{\binom{p+k}{p}} = 2(-1)^{k+1} \frac{(p)_k^2}{(p-k)!(p+k)!} \quad \alpha = \frac{1}{2} \sum_k \delta_c(kh) v_j =$$

NPR. pro $p=2$ (5-budoucí vzorec) máme

$$\delta_x(kh) v_j = \frac{1}{(kh)^2} (v_{j+2} - 2v_j + v_{j-2})$$

$$D_{2p}^{(2)} = \frac{4}{3} \delta_x(h) - \frac{1}{3} \delta_x(2h) \Rightarrow$$

$$D_{2p}^{(2)} v_j = -\frac{1}{12} v_{j+2} + \frac{4}{3} v_{j+1} - \frac{5}{2} v_j + \frac{4}{3} v_{j-1} - \frac{1}{12} v_{j-2}$$

Přesnost (řád) metody, stabilita a konvergance

vágně řečeno:

- * přesnost (řád) metody nám říká, jaká je chyba diskretizace PDR, tj. s jakou přesností approximuje dělavnice
- * konvergence: metoda je konvergentní, pokud se zmenšují chyby když se blíží k správnému řešení PDR pro libovolné okrajové podmínky.
- * stabilita: metoda je stabilní, pokud nedochází k zvětšování vznikajících chyb v důsledku aplikace diferenciálního schématu (obecněji nejen zač. chyb, ale spíše jistých komponent ve Fourier. obrazu, typický vysokofrek.)
- * konvergence a stabilita jsou mimořádně odlišné pro ODR a PDR

podrobnejší přesněji: Lax, Richter: Comm. on Pure and Appl. Math. 9 (1956) 267

podrobnejší přesněji: Lax, Richter: Comm. on Pure and Appl. Math. 9 (1956) 267

literatura: Trefethen 1994, Kapitola 4 (neúplné)

Richter a Morton

Thomée 1969: SIAM Review 11 (1969) 152-195

Obecný zpisejší diferenciální systém pro problem s počítacími podmínkami

* Uvažujme

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(0) = u_0$$

kde $A: B \rightarrow B$ je lineární operátor na Banachově prostoru B
s normou $\| \cdot \|$ (obecně fce lib. funkci prost. pro -ených)
 $u(t) \in B$ a u_0 může být v principu lib. funk. B

* Budeme předpokládat, že jde o dobře posloupný problem,
tj. že \exists jediné řešení $u(t)$ pro lib. počítací data u_0
a že $u(t)$ závisí smíšeně na u_0 .

Př. B může být např. $L^2(\mathbb{R})$, A je $\frac{d}{dx}$ (přenos), nebo $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ (difuzi, vedení tepla)
a okrajové podmínky jsou zahrnuti správnou volbou B . $u(t)$ může být velk. fce.

Obecná formulace schémat koncových differencií

- obecně jde o řadu onečných lineárních operátorů

$$S_k : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$$

které jsou abyste závislé na časovém kroku k (prostorový krok $h = h(k)$ bereme jako fixní pro krok časového k , např. $h = \frac{k}{\lambda}$ (λ je konst.))

- jeden krok časového v má pak zapsané index $\sqrt{\lambda}$ exponent

$$v^{n+1} = S_k v^n, \text{ neboť dostavíme } v^n = S_k^{-1} v^0$$

[Pozn: S_k by principu mohlo záviset tež na v]

- explicitní i implicitní metody je možné takto formulovat, dokonce i vícekrokové metody zavedením vektoru $w^n = (v^n, \dots, v^{n+1-s})$

- není však zahrnuta nelinearity

Rád metody a konzistence

Def: $\{S_k\}$ má rád přesnosti p pokud

$$\|v(t+k) - S_k v(t)\| = O(k^{p+1}) \quad \text{pro } k \rightarrow 0$$

a pro všechna $t \in [0, T]$, kde $v(t)$ je libovolně dostatečně blízké

řešení počítacího čloubu $\frac{dv(t)}{dt} = Av(t)$, $v(0) = v_0$ pro $0 \leq t \leq T$.

$\{S_k\}$ je konzistentní, pokud má rád přesnosti $p > 0$.

(konzistence říká, že metodou správně approximujeme danou PDR)

Př. Uvažujme vlnovou rovnici $v_t = v_x$ a Laxova-Wendroffova schéma

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \left(\frac{k}{2h}\right)(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) + \left(\frac{k^2}{2h^2}\right)(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) = S_k v^n$$

$$\text{zde } h = \frac{k}{\lambda}$$

Ukážme, že rád přesnosti je $p=2$

tj. jde o metodu rádu $O(k^2) + O(h^2)$

Trik: uveduji si, že $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ a že poslední člen je $\frac{k}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + O(k^3)$

Rozvojujeme do Taylova $v(x_j, t_n+k) \approx v(x_j + \frac{k}{\lambda}, t_n)$ náleží (derivace vypočítané v x_j, t_n)

$$v(x_j, t_n) + k \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + O(k^3) = v(x_j, t_n) + \frac{k}{2} \left(2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + O(k^3)$$

Však tu zůstali pouze členy rádu k^3 . ✓

Konvergencie a stabilita

Def: Schéma $\{S_k\}$ je konvergentní, pokud

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|S_k^n u(0) - u(t)\| = 0$$

pro libovolné $t \in (0, T)$, kde $u(t)$ je řešení problému

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = Au(t), u(0) = u_0 \text{ pro libovolnou počítací data } u_0.$$

- tj. zjednodušíme časový krok metody a získáme použit krokem dostaneme nakonec správné řešení.

Pozn: ~~metoda~~ u metod pro ODR se mává výhodou, že toto platí pro lib. ODR a počítací data

Def: Schéma $\{S_k\}$ je stabilní, pokud $\exists C > 0$ takové, že

$$\|S_k^n\| \leq C \text{ pro } \forall n \text{ a } k \text{ takové}, \text{že } 0 \leq nk \leq T$$

Pozn: na první pohled by se mohlo zdát, že když máme T konečné, že to bude platit vždy, když vezmeme C hodně velké, ale protože to musí platit pro libovolné n a k , tak je to OK.

Ekvivalence musí platit

$$\|v^n\| = \|S_k^n v^0\| \leq C \|v^0\| \text{ pro } \forall v^0 \in \mathcal{B} \text{ a } 0 \leq nk \leq T$$

Laxova veta o ekvivalence stability a konvergencie pro diferenciálnu schématu

Nechť $\{S_k\}$ je konzistentní approximace dobré podmienky

lineárnemu počítacímu problému $\frac{\partial u}{\partial t} = Au, u(0) = u_0$. Pak $\{S_k\}$ je konvergentní práve tehdy, když $\{S_k\}$ je stabilní.

Dk: viz např. Richtmyer, Morton 1967, Lax, Richtmyer. (PAM 9 (1958) 267)

Pozn: • definice stability nezávisí na PDR a je významně nezvláštní

\Rightarrow význam Laxovy vety spočívá v tom, že význam konzistence a stabilitu je mnohem snazší než konvergenci, takže se používá k dôkazu konvergencie metody

• v praxi se ukazuje stabilita tak, že $\|S_k\| \leq 1$ pro všechny k , z čehož plyne $\|S_k^n\| \leq 1 = C$, navíc se mnohem snazší jeho odhadovat, že von Neumannova analýza stability, i když není tak obecná

- nikde není předpoklad parabolickosti, ani hyperbolickosti
jen dobrá podmínost je zapotřebí

- může se stát, že nestabilní schéma dá pro jisté data konvergentní výsledky, avšak obecně je konvergence degradující pro všechna počítaná data

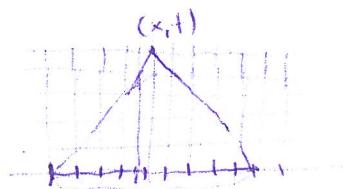
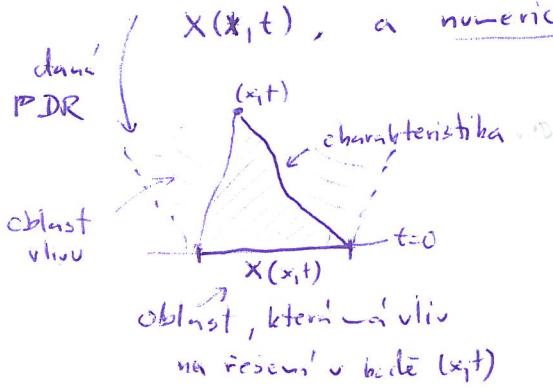


Courantova-Friedrichsova-Lewyho podmínka (též CFL podmínka)

- nutná podmínka konvergence (stability) pro některé (hyperbolické) PDR řešené li ji pomocí explicitních schémat
- zdůrazňuje, že časový krok musí být větší než doba potřebná k tomu, než vlna (řešení) projde prostorovým krokem
- pro jednorozněry problém, kde se vlna dle rychlosti v metody rozloží na $\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq C$, kde C závisí na PDR, ale ne $\max \Delta x < \Delta t$

oblast závislosti a oblast vlivu

- rozlišuje se matematická oblast závislosti $f(x,t)$, označené již $X(x,t)$, a numerickou oblast závislosti $X_k(x,t)$ která závisí na k



$\rightarrow X_k(x,t)$

- oblast vlivu je ~~oblast~~ oblast, kde jsou použitá data ovlivňující řešení

* globální presnost

- rád presnosti - etudy na filtre, jaká je lokální chyba v čase t
- pokud máme zajímat, jaká je chyba v konečné době T , využijeme následující větu

Věta Nechť je schéma konvergentní a má rád presnosti p a approximuje počítací problém $\frac{\partial u}{\partial t} = Au$, $u(0) = u_0$, kde $u(t)$ je patřičně hladké řešení.

Pak numerické řešení $v(t)$ splňuje

$$\|v(t) - u(t)\| = O(k^p) \text{ pro } k \rightarrow 0$$

stejnoučerne pro $t \in [0, T]$.

Intuitivní zdroje
 $N = \frac{T}{k}$ krit. upříjemne s chybou $O(k^{p+1})$
 takže celkově máme chybu $O(k^p)$

CFL podmínka

- numerická oblast závislosti pro perný k - $X_k(x,t)$
 - množina bodů x_j sítě x_j , pro které poč. data v_j jsou v průběhu výpočtu $v(x,t)$
 - pro každý k jde o konkrétní diskrétní oblast (v případě implicitních schémat je tato oblast celý prostor. grid)

• ukazuje se, že z hlediska stability je důležitá tvar.

limitní numerická oblast závislosti pro $k \rightarrow 0$ - $X_0(x,t)$

- množina všech limitních bodů $X_k(x,t)$, když $k \rightarrow 0$.

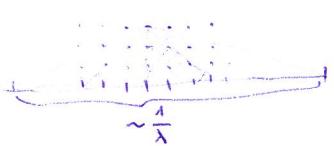
(Matematicky: je-li prostor d-rozměrný, $X_0(x,t)$ je množina $t \in \mathbb{R}^d$, kde jejich otvorené okolí obsahuje nějaký bod z $X_k(x,t)$ pro všechna k dostatečně malá)

3) když schémata

- ~~zajíždí~~ + a) $X_0(x,t)$ je celý prostor, tj. část prostoru, na které
- problém numericky řešíme, protože $X_0(x,t)$ diskretizuje celý prostor
 - to je případ implicitních metod, pro $k \rightarrow 0$ pokrývá celý prostor

- 2) $X_0(x,t)$ je jen část prostoru, na které řešíme

- to je případ explicitních metod, pro které $h = \frac{k}{\lambda}$, kde λ je konst.
- (nebo obecněji: prostor. grid se zkracuje
při užívání zásadu gridu)



- 3) $X_0(x,t)$ je celý prostor ale $X_k(x,t)$ jsou jen části prostoru (přesné)

část sítě) pro $k > 0$

- explicitní metody, kdy prostor. grid se zkracuje
- paralelní, nezávislé časové gridy

- po pravidelný grid kde $h = f(k)$ musí platit $\frac{k}{f(k)} \rightarrow 0$
tj. $f(k)$ je k nule paralelní než k např. $h \sim \sqrt{k}$
např. prost. grid nekonečný a $k \rightarrow 0$ (centrum :-))

- tato třetí situace nastává v stabilních explicitních schémat pro parabolické PDR

CFL podmínka říká, že pro každý bod (x,t) je matematická oblast

závislosti obsažena v limitní numerické oblasti závislosti

$$X(x,t) \subseteq X_0(x,t)$$

a jde o nutnou podmínku konvergence metod konečných diferencí aplikované na (lin. i nelin.) PDR pro libovolná poč. data (CFL teorema)

- někdy se říká, že metoda konverguje pro jisté specialní poč. data, i když ~~CFL podmínka není splněna~~ obecně to u tak ale není, pro je nutno uvažovat lib. poč. data

Díky Laxové větě o ekvivalence dostatečné:

Nechť $\{S_k\}$ je konzistentní approximace dobré podmínečku ~~pro lineárního~~ počítačního problému $\frac{\partial u(t)}{\partial t} = A u(t)$, $u(0) = u_0$ pro $0 \leq t \leq T$

Pak CFL podmínka je nutnou podmínkou stability $\{S_k\}$

CFL podmínka pro parabolické PDR.

- zufázíme uvedeného je zřejme' (tedy z toho, že $X(x,t)$ pro parab. PDR je celý prostor a že pro explicitní schéma je $X_k(x,t)$ konečné) že máli být explicitní schéma pro PDR konvergentní (stabilní) pak nutně musí platit $\frac{k}{h} \rightarrow 0$ pro $k \rightarrow 0$, tj. $h \sim k^\epsilon$, $\epsilon < 1$ pro $k \rightarrow 0$.

Pr. $u - u_t = u_{xx}$ a Eulerova explic. schéma je e

něli podmínku konvergence $\frac{k}{2h^2} = \frac{\alpha t}{2\varepsilon x^2} \leq 1$, ~~pro~~

Je to usečené s CFL podmínkou? Ano, neboť:

je-li $h = \varepsilon k^\epsilon$, tak máme $\frac{k}{2\varepsilon k^{2\epsilon}} \leq 1$. Je-li toto splněno pro $k \rightarrow 0$

tak je zřejme, že $2\varepsilon \leq 1$, neboli $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$

doz. je silnější podmínka než CFL.

- odhad vidíme, že parabol. rovnice musí být buď řešeny implicitními metodami, nebo explicitními, ale s malými skoky
- u hyperbolických rovnic je obecně konečná rychlosť šíření signálů a tedy se změsoucí prost. gridu se ~~změní~~ všechny změsují dozdy grid a explicitní metody nejsou taklik využite
- ! ~~gute~~ CFL podmínka je nutnou, nikoli dostačující podmínkou stability (konvergence)

Podmínky stability pro konečné diference

• matematická schéma $v^{n+1} = S_k v^n$, neboť $v^n = S_k^n v^0$ (*)

pak je stabilní, pokud $\exists C > 0$ takový, že $\|S_k^n\| \leq C$ pro $n \leq T$, $0 \leq n \leq T$

neboť $\|v^n\| \leq C \|v^0\|$ pro $\forall v^0$ a $0 \leq n \leq T$

pak i z těž odhadu očekáváme v^n n-tel kroku třikrát od (*)

odezveme

$$v^{n+1} = S_k v^n + k \tau^n, \text{ kde } v^n = \begin{pmatrix} v(x_1, t_n) \\ \vdots \\ v(x_m, t_n) \end{pmatrix}, \tau^n = \begin{pmatrix} \tau(x_1, t_n) \\ \vdots \\ \tau(x_m, t_n) \end{pmatrix}$$

čímž dostaneme

$$E^{n+1} = S_k E^n - k \tau^n$$

a po N krocích

$$E^N = S_k^N E^0 - k \sum_{n=1}^N S_k^{n-n} \tau^{n-1}$$

Odtud máme odhad

$$\|E^N\| \leq \|S_k^N\| \|E^0\| + k \sum_{n=1}^N \|S_k^{n-n}\| \|\tau^{n-1}\|$$

a pro stabilitu metody a pro $N k \leq T$ můžeme uvažovat

$$\|E^N\| \leq C \|E^0\| + T C \max \|\tau^{n-1}\| \rightarrow 0 \text{ pro } k \rightarrow 0, N k \leq T$$

pokud $\|E^0\| \rightarrow 0$ pro $k \rightarrow 0$

a dostaneme konvergenci.

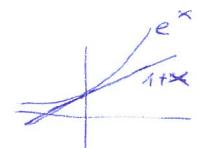
• velmi často platí, že $\|S_k\| \leq 1$ v jisté normě a tedy $C = 1$

ale to je velmi silná podmínka (tzv. silná stabilita)

stačí totiž, pokud $\boxed{\|S_k\| \leq 1 + \alpha k}$, kde α je jistá konstanta, neboť

pak $\|S_k^n\| \leq (1 + \alpha k)^n \leq e^{\alpha T}$ pro $n k \leq T$

plyne z nerovnosti $1+x \leq e^x$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$



• von Neumannova analýza stability:

-místo přímoho ověření $\|v^{n+1}\|_2 \leq (1 + \alpha k) \|v^n\|_2$

overujeme $\|\hat{v}^{n+1}\|_2 \leq (1 + \alpha k) \|\hat{v}^n\|_2$ což platí

díky Parsevalově vztahu $\|\hat{v}\|_2 = \|v\|_2$, kde $v \sim \hat{v}$ jsou vztýčené

Fourierovské obrazy,

$$v_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \hat{v}(\xi) e^{ijh\xi} d\xi \quad \text{pokud } v \text{ je } L_2 \text{ funkce}$$

$$\hat{v}(\xi) = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j e^{-ijh\xi}$$

tj. $\|v\|_2$ je konečný

a nory jsou definovány takto

$$\|v\|_2 = \sqrt{h \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j|^2}, \quad \|\hat{v}\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi/h}^{\pi/h} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi}$$

neboť pro Fourierov obraz $\hat{v}(\xi)$ bude platit

$$\hat{v}^{n+1}(\xi) = \hat{\alpha}(\xi) \hat{v}^n(\xi) \quad \text{nezávisle pro } \forall \xi$$

Proč?

$$\text{neboť } (\hat{S}_k v^n)_j = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m v_{j+m}^n = (\alpha * v)_j = h \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cancel{\alpha_{j-m}} \alpha_{j-m} v_m^n$$

projekté konvoluce
a, konkrétně $\alpha_m = \frac{1}{n} \alpha_{-m}$

$$\text{a tedy } \hat{v}^{n+1} = \hat{S}_k \hat{v}^n = \hat{\alpha} * \hat{v}^n = \hat{\alpha}(\xi) \hat{v}(\xi)$$

- pokud bude $|\hat{\alpha}(\xi)| \leq 1 + \alpha k$, kde α je nezávislý na ξ , pak pojde o stabilní metodu, neboť pak

$$|\hat{v}^{n+1}(\xi)| \leq (1 + \alpha k) |\hat{v}^n(\xi)| \quad \text{pro } \forall \xi$$

a ~~uvocení~~ integraci a odvození máme

$$\|\hat{v}^{n+1}\|_2 \leq (1 + \alpha k) \|\hat{v}^n\|_2$$

- $\hat{\alpha}(\xi)$ se nazývá „amplification factor“ - faktor zvětšení a bude ho možné určit pomocí Fourier transformace rektoru a výje nebo dosazením do diferenciálního schématu předpokládané řešení

$$\text{ve tvrdu } \hat{v}_j^{n+1} = \hat{\alpha}(\xi) e^{ijh\xi} = \hat{\alpha}(\xi) v_j^n \quad (**)$$

„rovinatý užív“

Pr. $v_t = v_{xx}$ a explicitní Eulerovo schéma

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \sigma (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n), \quad \text{kde } \sigma = \frac{k}{h^2}$$

dosažení - (**) dostane se

$$\hat{\alpha}(\xi) e^{ijh\xi} = e^{ijh\xi} \left[1 + \sigma (e^{ih\xi} - 2 + e^{-ih\xi}) \right]$$

$$\hat{\alpha}(\xi) = 1 - 2\sigma (1 - \cos h\xi)$$

$$= 1 - 4\sigma \sin^2 \frac{h\xi}{2}, \quad \xi \in \frac{-\pi}{h} \dots \frac{\pi}{h}$$

$$\text{a tedy } |\hat{\alpha}(\xi)| \leq 1 \quad \text{pro } \forall \xi$$

pokud $4\sigma \leq 2$, neboť

$$\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

Fourierovou transformaci

$$\alpha = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \dots & 0 & \sigma & 1-2\sigma & \sigma & 0 & \dots \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \in \text{index } M \end{pmatrix}$$

neboť má být (jde o konvoluci)

$$v_j^{n+1} = \alpha_{-1} v_{j+1}^n + \alpha_0 v_j^n + \alpha_1 v_{j-1}^n + \dots$$

$$\text{a tedy } \hat{\alpha}(\xi) = h \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-ijh\xi} \alpha_j =$$

$$= \sigma (e^{ih\xi} + e^{-ih\xi}) + (1-2\sigma)I$$

což je stejně jako

Von Neumannova analýza pro implicitní 1-krokové schéma

• obecně lze psát ve tvaru $\sum_{m=-r}^r \beta_m v_{j+m}^{n+1} = \sum_{m=-r}^r a_m v_j^n$ (*)

příčemž jde o implicitní schéma, pokud $\beta_m \neq 0$ pro nějaké $m \neq 0$

pokud máme nekonečný grid (tak jako v přechodí analýze expl. schémat)
jde o nekonečnou soustavu rovnic $B v^{n+1} = A v^n$ kde B je pásová matic

- problém je, že obecně tato soustava nemá jednoznačné řešení, avšem pokud se onežle na funkce $\in L_h^2$ (tj. $\sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j^2 < \infty$), pak již ~~existuje~~ existuje jednoznačné řešení a lze ukázat, že podmínka pozitnosti

$$\hat{b}(\xi) \neq 0 \text{ pro } \xi \in \left(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right)$$

kde $\hat{b}(\xi)$ je Fourierov obraz $b_M = \frac{1}{h} \beta_{-M}$ vystupující na levé straně, kdežto

$$\text{lze opět zapsat jako konvoluce } \sum_{m=-r}^r \beta_m v_{j+m}^{n+1} = b * v^{n+1}$$

- za tohoto předpokladu lze provést Fourierovo transf. a následně vydělit

$$\hat{b}(\xi) :$$

$$* \widehat{b * v^{n+1}} = \widehat{a * v^n}$$

$$\hat{b}(\xi) \widehat{v^{n+1}}(\xi) = \hat{a}(\xi) \widehat{v^n} \Rightarrow \widehat{v^{n+1}}(\xi) = g(\xi) \widehat{v^n}(\xi)$$

kde $g(\xi) = \frac{\hat{a}(\xi)}{\hat{b}(\xi)}$ je opět faktor zvětšení, protože jde o spojitu fci na $(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h})$, má konečné maximum $\|g\|_\infty = \max_{\xi} \left| \frac{\hat{a}(\xi)}{\hat{b}(\xi)} \right| < \infty$

- na prostoru L_h^2 je funkce jednoznačně určena sým Fourier. obrazem \Rightarrow jednoznačnost řešení $v^{n+1} \in L_h^2$ a lze celé schéma psít ve tvaru $v^{n+1} = S_k v^n$, kde S_k je směry lineální operátor

$$\text{příčemž } \|S_k\| = \|g\|_\infty = (\|g\|_\infty)^n \text{ pro } n \geq 0$$

$$\text{a tedy } \|v^n\| \leq (\|g\|_\infty)^n \|v^0\|$$

- podobně jako pro explicitní schéma je nejsnazší najít $g(\xi)$ dosazením $v_j^n = g^n e^{i\xi j h}$ do (*)

$$\text{Pr. Crank-Nicolson } v_j^{n+1} - v_j^n = \frac{1}{2} \sigma (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) + \frac{1}{2} \tau (v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1})$$

pro $u_t = u_{xx}$

$$\text{dosazení a vydělení } g^n e^{i\xi j h} \text{ dostaneme } g - 1 = \frac{1}{2} \sigma (e^{i\xi h} - 2 + e^{-i\xi h}) + \frac{1}{2} \tau g (e^{i\xi h} - 2 + e^{-i\xi h})$$

kde $\tau = \frac{k}{h^2}$

$$\Rightarrow g(1 + \sigma(1 - \cos \xi h)) = 1 - \sigma(1 - \cos \xi h) \Rightarrow g(\xi) = \frac{1 - 2 \sigma \sin^2 \frac{\xi h}{2}}{1 + 2 \sigma \sin^2 \frac{\xi h}{2}} \neq 0 \checkmark$$

• podmíinkou stability je opět $|g_k(\xi)| \leq 1 + \sigma(k)$ pro $k \rightarrow 0$
 $\alpha + \xi \in (-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h})$

Př. Crank-Nicolson pro $U_t = U_{xx}$: $|g(\xi)| \leq 1$ vždy \Rightarrow bezpodmínečná stabilita'

pro $U_t = U_x$: $g(\xi) = \frac{1 + ik}{2h} \sin \xi h$ atdy $|g(\xi)| = 1$ pro $\pm \frac{k}{h} \neq \xi$

opět vždy stabili'

neboli $\left| \frac{a+ib}{a-ib} \right| = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)}} e^{i\arg} = |e^{i\arg}| = 1$

pro $U_t = iU_{xx}$ (Schrödinger)

$$g(\xi) = \frac{1 - 2i \frac{k}{h^2} \sin^2 \frac{\xi h}{2}}{1 + 2i \frac{k}{h^2} \sin^2 \frac{\xi h}{2}}$$

atdy opět $|g(\xi)| = 1$
 \Rightarrow také' stabili' pro $\pm k, h, \xi$

von Neumannova analýza pro vektorové rce a vícekrokové schémata

• vícekrokové metody lze převést do tvary jednokrokové metody, ovšem za cenu zavedení nových prověrňacích → lze vysvětlit stejně jako jednokrok. metody pro vektorové funkce

Př. leap-frog pro $U_t = U_x$

$$v_j^{n+1} = v_j^{n-1} + \frac{k}{h} (v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$$

lze převést na

$$\begin{pmatrix} v_j^{n+1} \\ v_j^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{j+1}^n \\ v_{j-1}^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_j^n \\ v_j^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{j+1}^n \\ v_{j-1}^n \end{pmatrix}$$

neboli $w_j^{n+1} = \alpha_{-1} w_{j-1}^n + \alpha_0 w_j^n + \alpha_1 w_{j+1}^n$ kde $w_j^n = \begin{pmatrix} v_j^n \\ v_{j-1}^n \end{pmatrix}$

což je opět vektorová konvoluce $w^{n+1} = a * w^n$

kde ovšem a jsou matice 2×2 $a_{ij} = h^{-1} \alpha_{ij}$

• Fourierův obraz díl $\widehat{w^{n+1}}(\xi) = \widehat{a}(\xi) \widehat{w^n}(\xi)$

kde $\widehat{a}(\xi)$ jsou opět matice 2×2 a jejich průhy dostane se Fourierových transf. patřících proti matice a, např. $\widehat{a}_n(\xi) = h \sum_{j=0}^n (a_j)_j e^{-ijh\xi}$

Př. pro leap-frog metodu pro $U_t = U_x$ dostane se

$$\widehat{a}(\xi) = \begin{pmatrix} 2i \lambda \sin \xi h & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

jde o tzv. „amplification matrix“ - „matice zvětšení“ $\downarrow \det \widehat{a}(\xi) \neq 0$

• pro „růst“ vektoru v^n platí $\|v^n\| \leq (\|G\|_\infty)^n \|v^0\|$, kde $G(\xi) = \begin{pmatrix} b(\xi) & a(\xi) \\ a(\xi) & b(\xi) \end{pmatrix}$
 All pro explicitivní metody

toto je obecně
 i pro implicitní
 metody spodníkové

von Neumannovy podmínky pro stabilitu vektorových konečných differencí'

- jak jsou si užívali, stačí uvažovat 1-krokové metody $v^{n+1} = S_k v^n = a * v^n$
 kde nyní v je vektorová fce o M složkách (tj. kromě indexu j - diskrefitace v prostoru - potřebuje další index pro složky této fce)

- pokud použijeme Fourierovu transformaci, dostaneme obecně

$$\widehat{v^{n+1}}(\xi) = G_k(\xi) \widehat{v^n}(\xi)$$

kde $G(\xi)$ je matici $M \times M$. Má-li být metoda stabilní,

musi být $\|G_k(\xi)\|^n \leq C$ pro $\forall \xi \in \left(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right)$ a n, k takové, že $0 \leq nk \leq T$

kde C je jistá konstanta $< \infty$ nezávislá na ξ ,

- odhad normy matice $G_k(\xi)^n$ jsou nejčastěji založeny na nerovnostech

$$g(G_k(\xi))^n \leq \|G_k(\xi)\|^n \leq \|G_k(\xi)\|^n$$

kde $g(A)$ je spektrální polomer matice A , tj. $\max_j |\lambda_j|$, kde λ_j jsou vlastní čísla A

- těchto ~~je~~ nerovností lze odvodit následující

podmínky pro stabilitu metod konečných differencí, a sice

(1) $g(G_k(\xi)) \leq 1 + O(k)$ je nutná podmínka stability

(2) $\|G_k(\xi)\| \leq 1 + O(k)$ je dostatečná podmínka stability
 pro $k \rightarrow 0$ pro všechna ξ stejnoučně

Podmínka (1) se nazývá von Neumannova podmínka.

Pozn: 1) podmínka (2) je sice dostatečná, což znamená, že pokud je splněna, pak je metoda stabilní, ale není nutnou podmínkou a tedy, pokud není splněna, pak stále může metoda být stabilní.

Pr. takovou metodou je leap-frog pro $u_t = u_x$, kde $g(G(\xi)) \leq 1$
 pro $\lambda \leq 1$

avšak $\|G(\xi)\| > 1$ pro většínu ξ

přestože metoda stabilní pro $\lambda < 1$

2) nutnou a dostatečnou podmínkou je až $g_{\epsilon}(G_k(\xi)) \leq 1 + O(\epsilon) + O(k)$ pro $\epsilon \xrightarrow{k \rightarrow 0}$
 pro $\forall \xi \in \left(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right)$

kde $g_{\epsilon}(A) = \sup_{\lambda_{\epsilon} \in \Lambda_{\epsilon}(A)} |\lambda_{\epsilon}|$ je tzv. ϵ -pseudo spektrální polomer

a $\Lambda_{\epsilon}(A)$ známe ϵ -pseudo spektrum matice A

což jsou vlastní čísla matice $A + E$ pro jistou $E \in \mathbb{C}^{M \times M}$, pro kterou $\|E\| \leq \epsilon$
 (viz Trefethen, kap. 4.5)

Pr.

von Neumannova analýza metody leap-frog 4. řádu pro $U_L = U_X$

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{4}{3}\lambda(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) - \frac{1}{6}\lambda(v_{j+2}^n - v_{j-2}^n) \quad (\star)$$

- jde o 2-krokovou metodu \Rightarrow zapište ji jako jedno-krokovou

zaveděte w^n jako $w_j^n = \begin{pmatrix} v_j^n \\ v_{j+1}^n \\ v_{j-1}^n \end{pmatrix}$

pak

$$w_j^{n+1} = \begin{pmatrix} v_j^{n+1} \\ v_{j+1}^n \\ v_{j-1}^n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \frac{\lambda}{6} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matrix }} \begin{pmatrix} v_{j+2}^n \\ v_{j+1}^n \\ v_{j-1}^n \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -\frac{4\lambda}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matrix }} \begin{pmatrix} v_j^n \\ v_{j+1}^n \\ v_{j-1}^n \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matrix }} \begin{pmatrix} v_{j+1}^n \\ v_{j+2}^n \\ v_{j-1}^n \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \frac{4\lambda}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matrix }} \begin{pmatrix} v_{j+1}^n \\ v_{j+2}^n \\ v_{j-1}^n \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ -\frac{\lambda}{6} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matrix }} \begin{pmatrix} v_{j+2}^n \\ v_{j+1}^n \\ v_{j-1}^n \end{pmatrix}$$

je ekvivalentní (\star) (druhá roe je triviale $v_j^n = v_j^{n+1}$)

- aby w_j^{n+1} byla koncovce, tj. $w_j^{n+1} = \alpha * w^n$, musíte užít $\alpha_M = \frac{1}{h} \alpha_{-M}$

Fourierovou transformaci dostaneme $\widehat{w}^{n+1}(\xi) = \widehat{\alpha}(\xi) \widehat{w}^n(\xi)$

kde $\widehat{\alpha}(\xi)$ je matici 2×2 a její průkly určí Fourier.transf. odpovídajících průklo matic α_m :

$$\widehat{w}(\xi) = h \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j e^{-ijh\xi} \Rightarrow \widehat{\alpha}(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{6}(e^{i2jh\xi} - e^{i2jh\xi}) - \frac{4\lambda}{3}(e^{i3h\xi} - e^{-i3h\xi}) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} i\lambda \sin 2jh\xi - \frac{8i\lambda}{3} \sin 3h\xi & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{"amplification matrix"}$$

- vlastní čísla $\widehat{\alpha}(\xi)$: $\det(zI - \widehat{\alpha}(\xi)) = z^2 - z \frac{1}{h} x - 1 = 0$

$$z = \frac{i\xi \pm \sqrt{x^2 + 4}}{2} = \frac{i\xi}{6} \sin 2jh\xi - \frac{4}{3} i \lambda \sin 3h\xi \pm \frac{1}{6} \sqrt{36 - 8(\sin 2jh\xi - 8 \sin 3h\xi)^2}$$

neboli $z = i \frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}$

pokud bude $\left|\frac{\lambda}{2}\right| \leq 1$, pak bude $|z| \leq 1$ pro všechna ξ , jinak to přejde na imaginární osu

tj. musí platit $|\lambda(\frac{1}{6} \sin 2jh\xi - \frac{4}{3} \sin 3h\xi)| \leq 1$

funkce $f(\xi) = \frac{1}{6} \sin 2jh\xi - \frac{4}{3} \sin 3h\xi$ máby má maxima, když

$$f' = \frac{1}{3}(\cos 2jh\xi - 4 \cos 3h\xi) = 0 \Rightarrow \cos \xi = 1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \sin \xi = \pm \sqrt{7/2 - 3/2}$$

a tedy $\lambda \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2} - 1} \left[\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}} \right] = 0,728795\dots$

nutra' podmínka stability, ukazuje se, že je též dosažitelná

