Metoda konečných prvků pro modelový problém

- uvažujme pro jednoduchost následující problém

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \quad , \; u(a) = u_a \; , \; u(b) = u_b$$

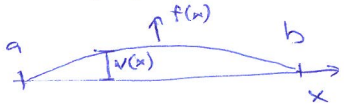
který lze substitucí $u(x) = v(x) + \ell(x)$, $\ell(x) = u_a \frac{x-b}{a-b} + u_b \frac{x-a}{b-a}$

převést na problém

$$(D) \qquad -\frac{d^2v(x)}{dx^2} = f(x) \quad , \; v(a) = v(b) = 0$$

$\rightarrow$ toto modeluje např. vychýlení struny při působení „síly" $f(x)$

což bude náš modelový problém



- standardní předpoklady jsou, že $v(x)$ by měla být 2x diferencovatelná, neboliže $v(x)$ je spojitá a také $v'(x)$ je spojitá $\Rightarrow$ $f(x)$ může být jen po částech spojitá

$\Rightarrow$ obecná teorie PDR hledá řešení na různých Sobolevových prostorech

- uvažujme nyní prostor

$$V = \{ v(x) : v \text{ je spojitá na } \langle a,b \rangle \text{, } v'(x) \text{ je po částech spojitá a omezená na } \langle a,b \rangle \text{ a } v(a) = v(b) = 0 \}$$

a zaveďme skalární součin (ne na tomto prostoru)

$$(v,w) = \int_a^b v(x)\, w(x)\, dx \quad \text{pro reálné, po částech spojité fce}$$

a dále lineární funkcionál $F : V \to \mathbb{R}$

$$F(v) = \frac{1}{2}(v',v') - (f,v) \qquad \text{„Lagransián"}$$

- ukažme, že řešení problému (D) je též řešení tzv. slabé formulace (integrální) téhož problému

$$(S) \qquad \text{Nalezněte } v(x) \in V \text{ takové, že } (v',w') = (f,w) \text{ pro } \forall w \in V$$

která je navíc ekvivalentní variačnímu problému

$$(V) \qquad \text{Nalezněte } v(x) \in V \text{ takové, že } F(v) \le F(w) \text{ pro } \forall w \in V$$

neboť: $(D) \Rightarrow (S)$ - stačí (D) vynásobit testovací fcí $w \in V$ a integrovat per partes

$$-(v'',w) = (f,w) \quad \Rightarrow \quad (v',w') = (f,v) \quad \text{díky okraj. podmínkám}$$

$(S) \Rightarrow (V)$ - nechť $v(x)$ je řešením (S), $w \in V$ a $z = w - v \in V$

pak

$$F(w) = F(v+z) = \frac{1}{2}(v'+z', v'+z') - (f, v+z) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(v',v') - (f,v)}_{F(v)} + \underbrace{(v',z') - (f,z)}_{0} + \underbrace{\frac{1}{2}(z',z')}_{\ge 0} \ge F(v) \quad \text{pro } \forall w \in V$$

dle předpokladu v řeší (S)

a konečně $(V) \Rightarrow (S)$ – pokud v je řešením (V), pak pro $w \in V$ a reálné ε platí

$$F(v) \le F(v+\varepsilon w) \quad \text{protože též } v+\varepsilon w \in V$$

– označíme-li $g(\varepsilon) = F(v+\varepsilon w) =$

$$= \frac{1}{2}(v',v') + \varepsilon(v',w') + \frac{\varepsilon^2}{2}(w',w') - (f,v) - \varepsilon(f,w)$$

pak $g(\varepsilon)$ má minimum pro $\varepsilon = 0$ a tedy musí platit $g'(0) = 0$

z čehož $\quad 0 = (v',w') - (f,w)$ pro lib. $w \in V$

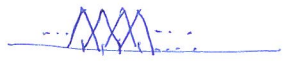
navíc lze ukázat, že je-li $f(x)$ spojitá fce, pak řešení $v(x)$ slabé formy (S) má již nutně spojitou 2. derivaci a lze udělat per partes v (S) obráceně a tedy $v(x)$ je pak i řešením (D)

a protože řešení (S) je jednoznačné

kdyby v_1 a v_2 byly řešení (S), pak $\int_a^b (v_1' - v_2')\, w\, dx = 0$ a speciálně pro $w = v_1' - v_2'$ máme $\int_a^b (v_1' - v_2')^2\, dx = 0 \Rightarrow v_1' - v_2' = 0$ pro $\forall x \in \langle a,b \rangle$ a odtud $v_1 - v_2 = \text{konst}$ a díky okraj. podmínkám $v_1 - v_2 = 0$

dostáváme $\quad (D) \Leftrightarrow (S) \Leftrightarrow (V)$ pro $f(x)$ spojité.

- ovšem je dobré si uvědomit, že slabá formulace (S) připouští řešení i pro nespojité $f(x)$ $\Rightarrow$ jde o zobecnění problému (D)
- další výhoda je, že řešení problému (S) hledáme na prostoru V a tedy funkcí, které nemusí mít spojité první derivace
  $\Rightarrow$ metoda konečných prvků používá takové báze



$\Rightarrow$ Hlavní myšlenka metody kon. prvků: místo prostoru V použij konečný prostor $V_h (\subset V)$

(h charakterizuje kompaktnost použitých funkcí)

a řeš buď problém (V_h) Nalezni $v_h \in V_h$ takové, že $F(v_h) \le F(w)$ pro $\forall w \in V_h$

klasická <u>Ritzova (-Galerkinova) metoda</u>

nebo řeš problém (S) na prostoru V_h $\Rightarrow$ tzv. <u>Galerkinova metoda</u>

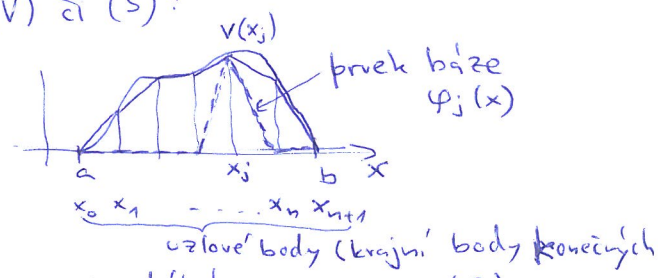
o <u>metodě konečných prvků</u> mluvíme tehdy, zvolíme-li jako bázi V_h po částech polynomy

3 kroky:
1) variační (nebo slabá) formulace daného problému
2) diskretizace, tj. konstrukce konečně-rozměrného prostoru V_h volbou vhodné báze
3) řešení diskrétního problému – typicky velká soustava lin. rovnic

zvláště na kroky 2) a 3) je vhodné použít existující balíky

Metoda konečných prvků pro modelový problém - pokračování

- volba V_h pro problém (D) přeformulovaný na (V) či (S):
  - nejjednodušší po částech lineární fce s bází s kompaktním nosičem



  - rozdělíme $\langle a,b\rangle$ na intervaly $I_j = (x_{j-1}, x_j)$ délky $h_j = x_j - x_{j-1}$, $j = 1, \dots, n+1$ a položme $h = \max_j h_j$ (h_j typicky různých délek
  - V_h bude prostor fcí, které jsou lineární na každém I_j a jsou spojité na $\langle a,b\rangle$ a splňující $v(a) = v(b) = 0 \Rightarrow V_h \subset V$
  - volbou báze $\varphi_k(x_j) = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$, $k, j = 1, \dots, n$ můžeme libovolnou fci $v \in V_h$ vyjádřit pomocí hodnot $v(x)$ v uzlových bodech neboť pro $v(x_j) = \eta_j$ bude $v(x) = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \varphi_k(x)$, $x \in \langle a,b\rangle$
  - jedná se tedy o n-rozměrný vektorový prostor
- řešme na tomto prostoru problém (Galerkinova metoda)

$$(S_h) \quad \text{Nalezněte } v_h \in V_h \text{ takové, že } (v_h', w') = (f, w) \text{ pro } \forall w \in V_h$$

  - protože w může být libovolné, musí rovnost platit i pro bázové fce

dosadíme-li navíc za $v_h(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(x)$, kde $\xi_k = v_h(x_k)$

dostaneme
$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k (\varphi_k', \varphi_\ell') = (f, \varphi_\ell), \quad \ell = 1, \dots, n$$

neboli maticově
$$A\xi = b, \quad \text{kde } a_{k\ell} = (\varphi_k', \varphi_\ell'), \quad b_\ell = (f, \varphi_\ell), \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

  - o matici A se obvykle hovoří jako o <u>matici tuhosti</u> (stiffness matrix) a o vektor b jako o <u>vektoru zatížení</u> (load vector) (podle původní aplikace FEM (finite-element method) na konstrukce)
  - v matem. literatuře se často A nazývá Gramova matice

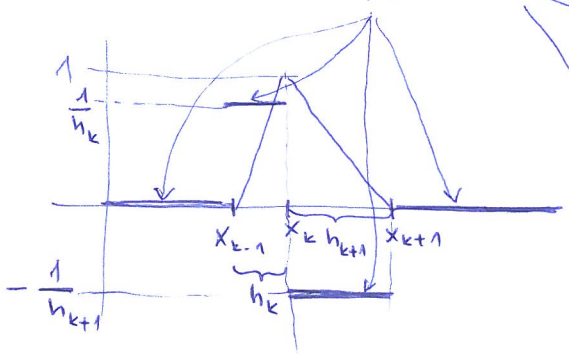
<u>Pozn:</u> také problém (D) lze řešit volbou vhodné (dostatečně hladké) báze definované na $\langle a,b\rangle$ (např. báze sinů) $\rightarrow$ též dostaneme soustavu lineárních rovnic (dosazením za $v(x) = \sum c_n \varphi_n(x)$ a projekcí rovnice (D) na $\varphi_m(x)$)

avšak zde počítáme přímo $-\int_a^b \varphi_m(x) \frac{d^2\varphi_n(x)}{dx^2}\, dx$ a neprovádíme obvyklé per partes

- pro náš problém lze matici A snadno spočítat:

  - pro bázi $\varphi_k(x)$ = lineární fce splňující $\varphi_k(x_j) = \begin{cases} 1, & k=j \\ 0, & k\neq j \end{cases}$

dostaneme $\varphi_k'(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq x_{k-1} \text{ a } x \geq x_{k+1} \\ \frac{1}{h_k} & \text{pro } x_{k-1} < x \leq x_k \\ -\frac{1}{h_{k+1}} & \text{pro } x_k < x \leq x_{k+1} \end{cases}$



a tedy $(\varphi_k', \varphi_\ell') = 0$ pro $|k-\ell| > 1$

$$(\varphi_k', \varphi_k') = \left(\frac{1}{h_k}\right)\left(\frac{1}{h_k}\right) h_k + \left(-\frac{1}{h_{k+1}}\right)\left(-\frac{1}{h_{k+1}}\right) h_{k+1} = \frac{1}{h_k} + \frac{1}{h_{k+1}}$$

délka intervalu přes který integrujeme

$$(\varphi_k', \varphi_{k-1}') = \left(\frac{1}{h_k}\right)\left(-\frac{1}{h_k}\right) h_k = -\frac{1}{h_k} = (\varphi_{k-1}', \varphi_k')$$

- speciálně pro ekvidistantní grid $h_k = h = \frac{(b-a)}{n+1}$

dostaneme $(\varphi_k', \varphi_k') = \frac{2}{h}$, $(\varphi_k', \varphi_{k-1}') = -\frac{1}{h}$

a tedy soustavy

$$\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{kde}$$

$$b_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x)\varphi_k(x)\,dx$$

pokud b_k aproximujeme pomocí lichoběžníkového pravidla $b_k \approx h\, f(x_k)$

dostaneme totéž jako základní metodou konečných diferencí

- mohli bychom též vzít jako bázi po částech kvadratické, kubické atd. fce

  $\Rightarrow$ zvýšení přesnosti

Abstraktní formulace FEM pro eliptické rovnice

- umožňuje jednotně studovat mnoho eliptických problémů a pochopit obecné principy FEM

- Nechť V je Hilbertův prostor se skal. součinem $(\cdot,\cdot)_V$ a normou $\|\cdot\|_V = \sqrt{(\cdot,\cdot)_V}$ (V-norma) a nechť $a(\cdot,\cdot)$ je bilineární forma na $V\times V$ a $L(\cdot)$ lineární forma splňující ~~tak, že~~ Př.

  (1) $a(\cdot,\cdot)$ je symetrická, tj. $a(v,w)=a(w,v)$

  (2) $a(\cdot,\cdot)$ je spojitá, tj. $\exists\, \gamma>0$:
  $$|a(v,w)| \le \gamma \|v\|_V \|w\|_V \quad \text{pro } \forall v,w\in V$$

  (3) $a(\cdot,\cdot)$ je tzv. V-eliptická, tj. $\exists\, \alpha>0$ ~~tak~~ :
  $$a(v,v) \ge \alpha \|v\|_V^2 \quad \text{pro } \forall v\in V$$

  (4) L je spojitá, tj. $\exists\, \Lambda>0$:
  $$|L(v)| \le \Lambda \|v\|_V \quad \text{pro } \forall v\in V$$

pak lze obecně ukázat, že problémy

(S) Nalezněte $u\in V$ takové, že $a(u,v)=L(v)$ $\forall v\in V$

(V) Nalezněte $u\in V$ takové, že $F(u)\le F(v)$ pro $\forall v\in V$, kde $F(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-L(v)$

jsou ekvivalentní a ~~[illegible]~~, že existuje jediné řešení $u\in V$ splňující navíc
$$\|u\|_V \le \frac{\Lambda}{\alpha}$$

Dk: ekvivalence zcela obdobně jako v 1D problému, existence z Lax-Milgramovy věty, podmínka dosazením $v=u$ do (S) a jednoznačnost jako v 1D.

Pozn: Pokud $a(\cdot,\cdot)$ není symetrické, má (S) stále smysl a řešení, avšak (V) ne.

Diskretizace a odhad chyby

- nechť $V_n \subset V$ je konečně-rozm. s dimenzí n a bází $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$, tj. lib $v\in V_n$ lze psát jako $v=\sum_{i=1}^n \eta_i\varphi_i$, $\eta_i\in\mathbb{R}$

pak FEM pro (S) formulujeme takto

Nalezněte $u_h\in V_n$ takové, že $a(u_h,v)=L(v)$ pro $\forall v\in V_n$

neboli $a(u_h,\varphi_j)=L(\varphi_j)$ pro $j=1,\dots,n$

a položíme-li $u_h=\sum \xi_i\varphi_i$ dostaneme $A\xi=b$, kde $A_{ij}=a(\varphi_i,\varphi_j)$ a $b_i=L(\varphi_i)$

navíc obecně
$$0\le a(v,v)=a\Big(\sum_{i=1}^n \eta_i\varphi_i,\sum_{j=1}^n \eta_j\varphi_j\Big)=\eta^T A\eta$$
a z V-eliptičnosti plyne, že A je pozitivně definitní symetrická matice a tedy regulární a existuje řešení

Geometrická interpretace FEM

- pro jednoduchost uvažujme problém

$$-\Delta u + u = f \quad \text{na } \Omega \quad \text{a} \quad u = 0 \quad \text{na } \Gamma$$

s odpovídající slabou formulací

$$(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = (f,v) \quad \text{pro } \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

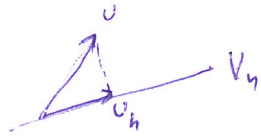
neboli $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx$ tj. $a(u,v)$ je přímo skal. součin na $H_0^1(\Omega)$

- nechť nyní máme $V_h \in H_0^1(\Omega)$ jako dříve a hledáme $u_h \in V_h$:

$$(u_h, v)_{H_0^1(\Omega)} = (f,v) \quad \text{pro } \forall v \in V_h$$

odečtením dostaneme ($v \in V_h \subset H_0^1(\Omega)$)

$$(u - u_h, v)_{H_0^1(\Omega)} = 0 \quad \text{pro } \forall v \in V_h$$



tj. chyba je kolmá na $\forall v \in V_h$ vzhledem k $(\cdot,\cdot)_{H_0^1(\Omega)}$

neboli řešení FEM u_h je projekce u na V_h pomocí $(\cdot,\cdot)_{H_0^1(\Omega)}$

a tedy u_h je nejblíže k u ze všech $v \in V_h$ vzhledem k normě $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|u - v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{pro } \forall v \in V_h$$

Jiné okrajové podmínky

- pokud máme Dirichletovy ~~prob~~ okr. podm. $u = u_0$ na Γ, pak lze ukázat, že slabá formulace zní

Nalezněte $u \in V(u_0)$ takové, že $a(u,v) = (f,v)$ pro $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

kde $V(u_0) = \{v \in H^1(\Omega) : v = u_0 \text{ na } \Gamma\}$

tj. testovací fce lze uvažovat s nulovou okr. podmínkou a okraj. podm. se promítá do volby prostoru, kde hledáme řešení, zde mluvíme o <u>podstatné okr. podmínce</u>

- na druhou stranu máme-li Neumannovu okr. podm. $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ na Γ

dostaneme:

Nalezněte $u \in H^1(\Omega)$ takové, že $a(u,v) = (f,v) + \langle g, v \rangle$ pro $\forall v \in H^1(\Omega)$

kde $\langle g, v \rangle = \int_\Gamma gv \, ds$ (neboť v Greenově větě nyní nezahodíme okraj. člen a použijeme $\frac{\partial u}{\partial n} = g$)

nyní prostor pro řešení je $H^1(\Omega)$ bez jakýchkoli omezení a okr. podmínka je implicitně obsažena ve ~~varia~~ slabé formulaci, zde mluvíme o <u>přirozené okraj. podmínce</u>

Pozn. při řešení pomocí FEM bude N. okr. podm. splněna přibližně.

Prostory pro řešení PDR pomocí slabých formulací

- když problém řešení PDR naformulujeme slabě (či variačně), lze s výhodou pracovat na větších prostorech než jsme měli dosud tj. prostory spojitých fcí s po částech spojitými derivacemi (je to v těchto případech dokonce přirozenější)
- tyto prostory budou navíc vybaveny vhodným skal. součinem => Hilbertovy prostory

Základní poj-y na vekt. prostorech

- lineární forma $L: V \to \mathbb{R}$: pro $\forall v, w \in V$ a $\beta, \theta \in \mathbb{R}$ platí $L(\beta v + \theta w) = \beta L(v) + \theta L(w)$
- bilineární forma $a: V \times V \to \mathbb{R}$ je lineární v obou argumentech
- symetrická bilin. forma : $a(v,w) = a(w,v)$ pro $\forall v, w \in V$
- skalární součin = symetr. bilin. f., pro kterou $a(v,v) > 0$ pro $\forall v \in V$
- norma $\|\cdot\|_a$ odpovídající skal. součinu $a(\cdot,\cdot)$ je $\|v\|_a = \sqrt{a(v,v)}$ pro $\forall v \in V$
- Cauchyho nerovnost pro lib. skal. součin $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \, \|w\|$

- vekt. prostor V se skal. součinem a odp. normou $\|\cdot\|$ je Hilbertův prostor, pokud je V úplný, tj. konverguje každá Cauchyho posloupnost v normě $\|\cdot\|$

  tj. pokud pro $v_1, v_2, v_3 \dots$ platí, že pro $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ takové, že $\|v_i - v_j\| < \varepsilon$ pro $i, j > N$

  pak $\exists v \in V$ takové, že $\|v - v_i\| \to 0$ pro $i \to \infty$

Základní Hilbertovy prostory pro eliptické problémy formulované slabě (variačně)

- pro problém na int. $\langle a, b\rangle = I$ mějme prostor kvadraticky integrabilních fcí

$$L_2(I) = \{v,\ v \text{ je definováno na } I \text{ a } \int_I v^2 dx < \infty\}$$

s $(v,w) = \int_I vw\,dx \Rightarrow \|v\|_{L_2(I)} = \left(\int_I v^2 dx\right)^{1/2} = (v,v)^{1/2}$ a vidíme, že díky Cauchyho nerovnosti je (v,w) dobře definovaný

pro řešení eliptického problému je však přirozenější prostor (neboť potřebujeme (v', w'))

$$H^1(I) = \{v;\ v \text{ a } v' \text{ patří do } L_2(I)\} \text{ se skal. součinem}$$

$$(v,w)_{H^1(I)} = \int_I (vw + v'w')\,dx \quad \text{a normou } \|v\|_{H^1(I)} = \left(\int_I [v^2 + (v')^2]\,dx\right)^{1/2}$$

a případně jeho podprostor $H_0^1(I) = \{v \in H^1(I) : v(a) = v(b) = 0\}$ se stejným skal. součinem.

- původní problém $-u'' = f$ na $I = \langle a, b\rangle$ s okr. podm. $u(a) = u(b) = 0$ lze tedy slabě přeformulovat takto: Nalezněte $u \in H_0^1(I)$ takové, že $(u', v') = (f, v)$ pro $\forall v \in H_0^1(I)$ (S)

  kde sk. součin $(u', v') = \int_I u'v'\,dx$.

- $H_0^1(I)$ je větší než původní V a ve skutečnosti největší prostor, pro který má (S) smysl a navíc př. pro odhad chyby pomocí $\|v\|_{H^1(I)}$

• obecněji nechť Ω je omezená oblast v R^d ~~[illegible]~~, pak

$$L_2(\Omega) = \{v : v \text{ je definována na } \Omega \text{ a } \int_\Omega v^2 dx < \infty\}$$

$$\cup$$

$$H^1(\Omega) = \{v \in L_2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L_2(\Omega),\ i = 1, \dots d\}$$

se skal. součiny a normami

$$(v,w) = \int_\Omega vw\,dx \quad \Rightarrow \quad \|v\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_\Omega v^2 dx\right)^{1/2}$$

$$(v,w)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega [vw + \nabla v \cdot \nabla w]\,dx \quad \Rightarrow \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{(v,v)_{H^1(\Omega)}}$$

a dále $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ na hranici } \Gamma \text{ oblasti } \Omega\} \subset H^1(\Omega)$ •
se stejným sk. součinem jako $H^1(\Omega)$

Nyní můžeme formulovat slabé a variační úlohu

$$(D) \quad \begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ na } \Omega \\ u &= 0 \text{ na } \Gamma \end{aligned} \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$$

jako (S) Nalezněte $u \in H_0^1(\Omega)$ takové, že $a(u,v) = (f,v)$ pro $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

nebo ekvivalentně

(V) Nalezněte $u \in H_0^1(\Omega)$ takové, že $F(u) \leq F(v)$ pro $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

kde $F(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - (f,v)$

a $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx$ a $(f,v) = \int_\Omega f v\,dx$

(Plyne z Greenovy věty: $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx = \underbrace{\int_\Gamma v \frac{\partial w}{\partial n}\,ds}_{=0 \text{ pro } v=0 \text{ na } \Gamma} - \int_\Omega v \Delta w\,dx$, kde $\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x_1} n_1 + \dots \frac{\partial w}{\partial x_d} n_d$ je normálová derivace.)

která plyne z Gaussovy věty $\int_\Omega \operatorname{div} A\,dx = \int_\Gamma A \cdot n\,ds$

dosazením za $A = (v \frac{\partial w}{\partial x_1}, 0, \dots 0)$ $A = (0, v \frac{\partial w}{\partial x_2}, 0 \dots)$ .... a sečtením)

• obecně je mnohem jednodušší dokázat existenci řešení (S) na rozdíl od (D)
a pro složitější (nelineární) problémy se často umí pouze (S)

Pozn. prostory $H^1(\Omega)$ a $H_0^1(\Omega)$ jsou speciální případy Sobolevových prostorů
$W^{k,p}(\Omega)$ pro $p=2$ (tj. vycházíme z $L_2(\Omega)$, obecně $L_p(\Omega)$ s normou $\|v\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega v^p dx\right)^{1/p}$)
a pro $k=1$, tj. stačí první derivace L_2-integrabilní

obecně pokud se Sobolevův prostor zúplní pomocí slabé derivace, dostaneme Banachův prostor a pro $p=2$ dokonce Hilbertův prostor, neboť jen na $L_2(\Omega)$ lze zavést skal. součin ~~[illegible]~~ odpovídající normě $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$

- opět jako u spojitého problému platí $\|u_h\|_V \le \frac{\Lambda}{\alpha}$ neboť pro $v = u_h$ máme $\alpha \|u_h\|_V^2 \le a(u_h, u_h) = L(u_h) \le \Lambda \|u_h\|_V$ a dělíme $\|u_h\|_V \neq 0$

Jde o důležitou vlastnost FEM metody a o „teoretický základ" úspěšnosti. Tato podmínka je „odhadem stability", pro slušné $L(v)$, tj. pravou stranu f, a dostatečně elipt. problém $\alpha > 0$, bude řešení FEM omezené stejně jako skutečné řešení.

- <u>při odhadech chyby FEM</u> se vychází z obecného vztahu

$$(*) \qquad \|u - u_h\|_V \le \frac{\gamma}{\alpha} \|u - v\|_V \quad \text{pro } \forall v \in V_h$$

který říká, že vzhledem k normě ve V je u_h z celého V_h nejblíže k hledanému řešení u. V konkrétní situaci je třeba určit γ a α a dále zvolit vhodné v a odhadnout $\|u - v\|_V$. Většinou se bere interpolované u např. po částech lin. fcí a odhad $\|u - v\|$ z teorie interpolace.

$a(u, w) = L(w) = a(u_h, w)$ pro $\forall w \in V_h$

vztah $(*)$ plyne z toho, že $a(u - u_h, w) = 0$ pro $\forall w \in V_h$

předpoklad o $a(\cdot,\cdot)$

a tedy $\alpha \|u - u_h\|_V^2 \le a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - u_h + w) =$

$= a(u - u_h, u - v) \le \gamma \|u - u_h\|_V \|u - v\|_V$ a vydělíme $\|u - u_h\|_V$

$u_h - w \in V_h$

- zavedeme-li a-normu (energetickou normu) na V pomocí

$$\|v\|_a^2 = a(v, v), \quad v \in V,$$

která je ekvivalentní s $\|\cdot\|_V$

neboť $\sqrt{\alpha}\, \|v\|_V \le \|v\|_a \le \sqrt{\gamma}\, \|v\|_V$

pak dostaneme $\|u - u_h\|_a \le \|u - v\|_a$ pro $\forall v \in V_h$ a máme opět „projekci" u do V_h na u_h (při skal. součinu $(v, w)_a = a(v, w)$)

<u>Př.</u> ukážeme, že pro náš původní 1D problém je $\alpha = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$ a $\Lambda = \|f\|_{L_2(I)}$ plyne z Cauchyho nerovnosti a že chyba $\|u - u_h\|_{H^1(I)} \le Ch$ pro dostatečně hladké u

- abstr. formulace: $V = H_0^1(I)$, $I = (a, b)$ $\quad a(v, w) = \int_I v' w' \, dx$, $L(v) = \int_I f v \, dx$

vidíme, že a je sym. bilin. forma a L je lineární

a navíc $|a(v, w)| \le \|v'\|_{L_2(I)} \|w'\|_{L_2(I)} \le \|v\|_{H^1(I)} \|w\|_{H^1(I)}$ a tedy $\gamma = 1$ a $a(\cdot,\cdot)$ je spojitá

a konečně V-eliptricita dává

$$\int_I (v')^2 dx \ge \frac{1}{2}\left(\int_I v^2 dx + \int_I (v')^2 dx\right) \text{ pro } \forall v \in H_0^1(I)$$

což plyne z $\int_I v^2 dx \le \int_I (v')^2 dx$ a α je tedy $\frac{1}{2}$

- k důkazu použijeme vztah $v(x) = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{v(a)}} + \int_a^x v'(y)\,dy$ a dle Cauchyho

$$|v(x)| \le \int_a^b |v'|\,dy \le 1^{1/2}\left(\int_a^b (v')^2\,dy\right)^{1/2} \quad \text{a tedy} \quad |v(x)|^2 \le \int_a^b (v')^2\,dy$$

a přeintegrujeme

(platí to díky okraj. podmínce $v(a)=0$)

- pro chybu tedy v tomto případě dostaneme

$$\|u-u_n\|_{H^1(\Omega)} \le 2\,\|u-v\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{pro } \forall v \in V_h$$

a vezmeme-li si za $v = \pi_h u = \tilde{u}_n$ = interpolované u pomocí po částech lin. fcemi

pak z chyby interpolace

$$|u'(x) - \tilde{u}_n'(x)| \le h \max_{a\le y\le b} |u''(y)|$$

$$|u(x) - \tilde{u}_h(x)| \le \frac{h^2}{8} \max_{a\le y\le b} |u''(y)|$$

dostáváme $\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)} \le Ch$, kde C závisí na

což plyne z $\|(u-u_n)'\| \le 2\|(u-\tilde{u}_n)'\| \le Ch$ a integrujeme stím, že $u(a)-u_n(a)=0$, $u(b)-u_n(b)=0$

V 1D se ovšem dá ukázat, že platí $\|u-u_n\|_{H^1(\Omega)} \le Ch^2$

neboť vyčíslíme-li pravou stranu přesně, tj. (f,φ_i) nebudeme aproximovat

pak $u_h(x_i) = u(x_i)$ přesně! (souvisí stím, že Greenova funkce je též po částech lineární, viz úloha 1.19. v C. Johnsonové knize, str. 43)

a tedy lze ~~pouz~~ integrovat přímo $|u(x)-\tilde{u}_h(x)| \le Ch^2$

Konstrukce prostoru V_h pro FEM

- nejčastěji se využívá tzv. triangularizace (rozdělení Ω na $\triangle$, příp. $\square$ (čtyřstěny)) i druhé derivace
  ale mohou být i obdélníkové a jiné elementy
- pro problémy (D) 2. řádu budeme chtít $V_h \subset H^1(\Omega)$ a pro problémy 4. řádu $V_h \subset H^2(\Omega)$
  a budeme uvažovat V_h složené z fcí, které jsou po částech polynomy, pak

$$V_h \subset H^1(\Omega) \iff V_h \subset C^0(\overline{\Omega})$$
$$V_h \subset H^2(\Omega) \iff V_h \subset C^1(\overline{\Omega})$$

kde $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$

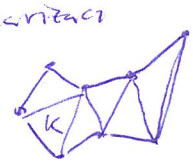
a $C^0(\overline{\Omega}) = \{v;\ v$ je spojitá fce na $\overline{\Omega}\}$

$C^1(\overline{\Omega}) = \{v \in C^0(\overline{\Omega})$ a $D^\alpha v \in C^0(\overline{\Omega})$ pro $|\alpha| = 1\}$

$D^\alpha v$ značí lib. derivaci do α-tého řádu

- abychom zadali V_h musíme určit
  1) triangularizaci $T_h = \{K\}$ oblasti Ω, K jsou jednotlivé elementy (automatické generování - Delaunay-Voronoi)
  2) jaké fce $v \in V_h$ uvažujeme na každém elementu K, tj. zda lineární, kvadratické...
  3) parametry, které použijeme při popisu fcí z V_h = tzv. stupně volnosti

Př. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ má polygonální hranici Γ → lze přímo provést triangularizaci



- označme $P_r(K) = \{v_K : v$ je polynom stupně nejvýše r na elementu $K\}$

  a tedy např. $P_1(K) = \{v(x) = a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}x_2;\ x \in K,\ a_{ij} \in \mathbb{R}\}$

  bázi tvoří $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} = \{1, x_1, x_2\}$, tj. $\dim P_1(K) = 3$

  a obecně $P_r(K) = \{v(x) = \sum_{0 \le i+j \le r} a_{ij} x_1^i x_2^j$ pro $x \in K,\ a_{ij} \in \mathbb{R}\}$, $\dim P_r(K) = \frac{(r+1)(r+2)}{2}$

- jako parametry lze použít hodnoty fce v jednotlivých uzlech, příp. v dalších význ. bodech elementů a nebo též derivace fce

  pro $P_1(K)$ stačí hodnoty ve vrcholech elementů, neboť lin. fce v 1D, resp. 2D, 3D jsou jednoznačně určeny hodnotami na konci intervalů, resp. ve vrcholech $\triangle$ příp. čtyřstěnu

Konstrukce báze V_h pro $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dané triangulaci T_h

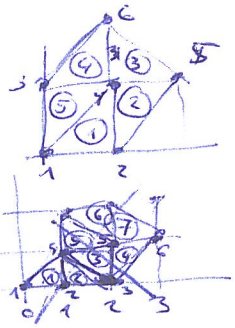
- bázi tvoří po částech lin. fce
- v každém elementu K máme 3 nezávislé lin. fce určené tak, že jsou nenulové jen v jednom uzlu K, kde jsou rovny 1

Obecný program pro FEM se skládá z těchto subroutines

1) input - zadání fcí f, g, Ω atd.
2) konstrukce a reprezentace triangularizace T_h v počítači
3) výpočet matice tuhosti a^K pro jednotlivé elementy a též vektoru zatížení b^K
4) výpočet globální matice tuhosti A a vektoru b
5) řešení (řídké) ~~rovnice~~ systému $A\xi = b$
6) prezentace (uložení) výsledků

2) Reprezentace triangularizace T_h ve 2D (obdobně ve 3D apod.)

- označme N_i, $i=1,\dots M$ uzly a K_n, $n=1,\dots N$ elementy



pak T_h může být zadáno pomocí 2 polí

$Z(1:2, 1:M)$ a $T(1:3, 1:N)$ kde $1:3$ je pro vrcholy K_n

- v Z jsou souřadnice uzlů např. $Z = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$

příp. hranice $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$

a T obsahuje čísla uzlů pro jednotlivé elementy

$$T = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

- obecně netriviální, ale existují obecné algoritmy pro triangularizaci

3) matice tuhosti pro jednotlivé elementy

$$a(\varphi_i, \varphi_j) = a_{ij}^K = \int_K [\nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j]\, dx \quad \text{příp. další členy}$$

jeden element

$$b_i^K = L(\varphi_i) = \int_K f\varphi_i\, dx \quad \left(+ \int_{K\cap\Gamma} g\varphi_i\, ds \right)$$

přitom víme, že $a_{ij}^K = 0$ pro $\forall$ uzly N_i nebo N_j, které nejsou vrcholy K

a tedy pro 2D problém bude a^K matice 3×3, a obecně v nD to bude $(n+1)\times(n+1)$ matice

a dále ~~$\varphi_i(N_{T(k,n)})$~~, pokud máme element K_n a φ_i je nenulové v K_n

pak je φ_i lin. fce v K_n určená ~~tedy~~ hodnotami

$$\varphi_i(N_{T(k,n)}) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i=k \\ 0 & \text{pro } i\neq k \end{cases}$$

4) celou matici tuhosti A a vektor zatížení b pak dostaneme algoritmem

```
A = 0 , b = 0
for n = 1,...,N
    for i,j = 1,...,3
        A(T(i,n), T(j,n)) = A(T(i,n), T(j,n)) + a_ij^{K_n}
        b(T(i,n)) = b(T(i,n)) + b_i^{K_n}
    end
end
```

~~matice~~ řídké matice - takže ukládáme jen nenulové prvky (většinou)

Parabolický a hyperbolický problém pomocí FEM

- uvažujme nejprve rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sigma \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\Delta u} = f(x,t) \quad \text{s příslušnými okraj. a poč. podmínkami} \quad u(0) = u^0$$

dále prostor $V = H_0^1(\Omega)$ a $v \in V$ vynásobme tuto rovnici a integrujme

$$\Rightarrow \quad \int_\Omega v(x) \frac{\partial u}{\partial t} d^n x - \underbrace{\int_\Omega v(x)\, \sigma \overbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}^{\Delta u} d^n x}_{\text{aplikujeme Greenovu větu}} = \int f(x,t)\, v(x)\, d^n x$$

$$\Rightarrow$$

$$(v, \dot{u}(t)) + \underbrace{a(v,u)}_{\int_\Omega \sigma \nabla v \cdot \nabla u \, d^n x} = (f, v)$$

a nyní použijeme Galerkinovu metodu, kdy vybereme $V_h \subset V$ s bází $\varphi_i(x)$ a rozvineme $u(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \xi_i(t)\, \varphi_i(x)$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \quad B\dot{\xi}(t) + A\xi(t) = F(t) \qquad t \in \langle 0, T \rangle \\ &\qquad B\xi(0) = U^0 \\ &\text{kde} \quad b_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j), \quad a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) \\ &\qquad F_i(t) = (f(t), \varphi_i), \quad U_i^0 = (u^0, \varphi_i) \end{aligned}\right\} \text{systém ODR}$$

- typicky se silným tlumením (stiff problem)

pro časovou diskretizaci můžeme použít metody pro ODR

- většinou implicitní jako zpětný Euler či Crank-Nicolson