Základní pojmy kolem centrální limitní věty

- pravděpodobnostní funkce pro diskrétní náhodné veličiny X

  $P[X=x] = P(x)$ udává pravděpodobnost, že náhodná veličina bude mít hodnotu x

  a tedy $\sum_x P(x) = 1$. $P(x) > 0$

- distribuční funkce diskrétní náh. veličiny

  $F(x) = P[X \le x]$, je neklesající a spojitá zprava

  $= \sum_{t \le x} P(t)$ $\quad 0 \le F(x) \le 1$

  $P[x_1 \le X \le x_2] = F(x_2) - F(x_1)$

- rozdělení pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny určuje pomocí
  - hustoty pravděpodobnosti nebo hustoty rozdělení psti $\varrho(x) > 0$

    $\int_\Omega \varrho(x)\,dx = 1$, kde Ω je definiční obor X

  - pravděpodobnost, že náhodná veličina X bude mít hodnotu v $\langle x_1, x_2 \rangle$ je

    $P[x_1 \le X \le x_2] = \int_{x_1}^{x_2} \varrho(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1)$

    přičemž pst toho, že X bude např. právě x_1, je nulová.

  - distribuční fce spojité náhodné veličiny $\quad F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$

    $F(x) = P[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} \varrho(t)\,dt$

    komplementární distribuční fce je $1 - F(x)$

    a dále $\varrho(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

normální (Gaussovo) rozdělení psti $N(\mu, \sigma^2)$

$$\varrho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

- $N(0,1)$ tzv. normované (standardizované) norm. rozd.
- distrib. fce $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varrho(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{Erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)\right]$ kde $\mathrm{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2}\,dt$

- střední hodnota (vážený průměr daného rozdělení) $\quad E(x) = \sum_i x_i p_i$. (expecting value – též MX apod.)

  $= \int_\Omega x\,\varrho(x)\,dx = \mu$ (pro norm. rozdělení)

- rozptyl = střední kvadratická odchylka = variance (vždy $D(x) \ge 0$)

  $\sigma^2(x) = D(X) = \mathrm{var}(X) = \sum_i [x_i - E(x)]^2 p_i = \sum x_i^2 p_i - E(x)^2$

  $= \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(x)]^2 \varrho(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varrho(x)\,dx - [E(x)]^2$

  $= E(x^2) - E(x)^2$

Vlastnosti

$E(x+c) = c + E(x) \qquad D(x+c) = D(x)$

$E(cx) = c\,E(x) \qquad D(cx) = c^2 D(x)$

pro nezávislé veličiny $\quad E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \qquad D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

Inverzní distribuční fce $F^{-1}(x)$ = kvantilová fce

zákon velkých čísel

- říká, že při velkém počtu nezávislých pokusů je možné téměř očekávat, že relativní četnost se bude blížit teoretické hodnotě psti.

  tj. budou konvergovat střední hodnoty, rozptyly atd. k teor. hodnotám

  - ovšem jde o pravděpodobnostní konvergenci

~~Bernoulliova věta~~

slabá verze : nechť $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$, kde náhodné veličiny X_i jsou nezávislé a mají stejné rozdělení pravděpodobnosti (např. nezávislé hody kostkou) (angl. zkratka i.i.d. = independent and identically distributed)

říká, že

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu \quad \text{pro } n \to \infty$$

střední hodnota rozdělení

pstní konvergence

neboli

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - \mu| < \varepsilon) = 1 \quad \text{pro lib. } \varepsilon > 0$$

(též se nazývá slabá konvergence náhodných veličin)

silná verze : místo pstní konvergence jde o téměř jistou konvergenci

$$\overline{X}_n \xrightarrow{a.s.} \mu \quad \text{pro } n \to \infty$$

(a.s. = almost surely) (též silná konvergence)

neboli

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = \mu\right) = 1$$

- silná verze implikuje slabou verzi

---

střední hodnota funkce náhodné veličiny

- nechť $Y = f(X)$ je náhodná veličina, která je fcí X, pak lze ukázat, že

$$E(Y) = E(f(X)) = \int_{\Omega} f(x)\, g(x)\, dx \quad \left(= \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\, p_i \text{ pro diskr. náh. veličinu} \right)$$

a obecně $E(f(X)) \neq f(E(X))$

Rovnoměrné rozdělení (uniform distribution) na intervalu $\langle a, b \rangle$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } x \in \langle a, b \rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

pro $\langle 0, 1 \rangle$ je $g(x) = 1$

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad D(X) = \sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \qquad F(X) = \frac{x-a}{b-a} \quad \text{pro } x \in \langle a, b \rangle$$

- toto rozdělení má např. zaokrouhlovací chyba

Normální rozdělení pravděpodobnosti $N(\mu, \sigma^2)$

$$\varrho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad , E(X) = \mu, \quad D(X) = \sigma^2$$

distribuční fce

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varrho(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{Erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] \quad \text{kde } \mathrm{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt$$

je tzv. error funkce

a tedy

$$P[x_1 < X \le x_2] = \int_{x_1}^{x_2} \varrho(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Erf}\left(\frac{x_2-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \mathrm{Erf}\left(\frac{x_1-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right]$$

$\mathrm{Erf}(-z) = -\mathrm{Erf}(z)$

- Pravidlo 3 sigma

$$P[\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma] = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Erf}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{Erf}\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right] = \mathrm{Erf}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}9973$$

tzn. že náhodné řešení téměř vždy leží v int. $\langle \mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma \rangle$

- Pravděpodobná chyba náhodné veličiny X
  - máme-li jedno řešení, pak s velkou pstí bude v int $\langle \mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma \rangle$
  a absolutní chyba od střední hodnoty μ bude řádu $r = 0{,}6745\,\sigma$
  což je číslo, pro které $P[\mu - r \le X \le \mu + r] = 0{,}5$
  neboli pst., že ~~větší~~ řešení leží v int. $\langle \mu - r, \mu + r \rangle$ je $1/2$
  číslo $r = 0{,}6745\,\sigma$ se nazývá pravděpod. chyba.

Centrální limitní věta (základní verze)

- uvažujme n nezávislých náhodných veličin $X_1, \dots, X_n$, které mají stejné rozdělení psti, tj. jejich střední hodnoty $E(X_i) = m$ a rozptyly $D(X_i) = b^2$ jsou stejné
- označme jejich součet $S_n = X_1 + \dots + X_n$

  a tedy $E(S_n) = nm$ a $D(S_n) = nb^2$
- uvažujme dále normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ kde $\mu = nm$ a $\sigma^2 = nb^2$ s hustotou psti $\varrho_n(x)$

Pak centrální limitní věta říká, že

$$P[s_1 \le S_n \le s_2] \approx \int_{s_1}^{s_2} \varrho_n(x)\,dx \quad \text{pro lib. } s_1 \text{ a } s_2 \text{ a všechna velká } n.$$

tj. rozdělení součtu S_n velkého množství nezávislých náhodných proměnných je přibližně normální

- ve skutečnosti lze tento teorém dokázat za mnohem slabších podmínek
  - proměnné $X_1, \dots X_n$ nemusí být nezávislé a stejného rozdělení
  - důležité je, že každá proměnná X_i samostatně nehraje tak důležitou roli (chybu) na výsledek na vlivu mnoha náhodných faktorů
  - to je i důvod, proč mnoho rozdělení v přírodě je normálních

- to, že $\sigma = \sqrt{n}\, b$ je důležité pro <u>odhad</u> chyby veličiny S_n a ~~chceme~~ též pro odhad chyby metody Monte Carlo, která obvykle počítá jisté veličiny typu ~~X~~ ~~[illegible]~~ pomocí průměru veličin X_i s různými pstními rozděleními

Odhad chyby metody MC

~~[illegible]~~

- nechť chceme spočítat hodnotu m neznámé veličiny a nechť nalezneme náhodnou ~~[illegible]~~ veličinu X, pro kterou $E(X) = m$ a $D(X) = b^2$
- pokud vezmeme n nezávislých náh. veličin X_i typu X, pak z centrální limitní věty víme, že $S_n = X_1 + \dots + X_n$ bude přibližně normální a tedy

$$P[nm - 3b\sqrt{n} \leq S_n \leq nm + 3b\sqrt{n}] \approx 0{,}9973$$

(pravidlo 3 sigma)

- vydělením N, tj. spočítáním průměru veličin X_i, který bude mít též normální rozdělení, dostaneme

$$P\left[m - \frac{3b}{\sqrt{n}} \leq \frac{S_n}{n} \leq m + \frac{3b}{\sqrt{n}}\right] \approx 0{,}9973$$

což přepíšeme jako

$$\boxed{P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m\right| < \frac{3b}{\sqrt{n}}\right] \approx 0{,}9973}$$

- základní vztah pro odhad chyby metody MC a vlastně i její použití, najdeme-li veličinu X s rozdělením takovým, že $E(X) = m$ je hledaná veličina, pak vezmeme n náhodně vybraných X_i a vidíme, že jejich průměr se bude lišit od m o maximálně $\frac{3b}{\sqrt{n}}$ s pstí $0{,}9973$
- zvyšujeme-li n, pak tento „odhad" chyby klesá jako $\frac{1}{\sqrt{n}}$

! nejde o ~~[illegible]~~ omezení chyby shora, chyba může být ve skutečnosti větší, ale pst toho je velmi malá

Generátory (pseudo) náhodných čísel (random numbers)

- deterministické programy generující posloupnost čísel, které splňují jistá kritéria (testy) náhodnosti
- při stejných počátečních podmínkách generují tytéž náhodná čísla
  - poč. podm. = random seed (náhodné seminko)
- vzhledem ke konečné aritmetice počítačů a deterministickému chování nejde o náhodná čísla, ale o pseudonáhodná
- většinou generována jako posloupnost čísel $\{x_0, x_1, x_2 \dots\}$ → nutná periodicita, kvůli konečné aritmetice ⇒ perioda generátoru = nejmenší k takové, že $x_i = x_{i+k}$ pro $\forall i$

Základní generátory

- lineární kongruentní generátor (LCG) - velmi rychlý algoritmus

$$x_{i+1} = (a x_i + c) \bmod m$$

maximální (optimální) perioda ~ většinou menší

speciální případ - multiplikativní LCG, když $c = 0$ (navržen D.H. Lehmerem)

byl velmi často používán v historii, ale má často zásadní nedostatky pro aplikace ve více dimenzích, neboť n-tice $(x_i, x_{i+1}, \dots x_{i+n-1})$ se nacházejí na relativně malém počtu $(n-1)$-rozm. nadploch

Př. Nechvalně známý generátor RANDU

$a = 65539$, $c = 0$, $m = 2^{31}$ splňuje rekur. vztah $x_{i+2} = (2^{16}+3)x_{i+1} \bmod 2^{31}$

$$x_{i+2} = (2^{32} + 6 \cdot 2^{16} + 9) x_i \bmod 2^{31} = (6 x_{i+1} - 9 x_k) \bmod 2^{31}$$

a lze ukázat, že $\forall$ trojice bodů se nacházejí na 15 paralelních rovinách

Marsaglia: Random Numbers Fall Mainly in the Planes, PNAS 61 (1968) 25

Teorem pro MLGG: Pokud $c_1, \dots c_n$ jsou přirozená čísla taková, že

$$c_1 + c_2 a + c_3 a^2 + \dots c_n a^{n-1} = 0 \pmod m$$

pak $\forall$ body $P_1 = (u_1, u_2, \dots u_n)$, $P_2 = (u_2, \dots u_{n+1})$, ... kde $u_i = x_i/m$ leží v jedné z paralelních nadploch

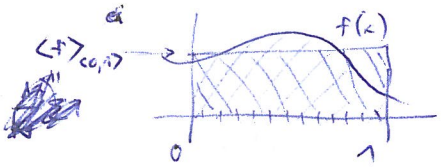
$$c_1 z_1 + c_2 z_2 + \dots + c_n z_n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Navíc nanejvýše $|c_1| + |c_2| + \dots + |c_n|$ těchto rovin protíná krychli $0 < z_1 < 1, \dots, 0 < z_n < 1$ a vždy lze vybrat taková $c_1, \dots c_n$, že $\forall$ body budou v méně než $(n!\,m)^{1/n}$ nadplochách.

Integrace pomocí metody Monte Carlo

- obecně má tato metoda velký význam především pro vícerozměrné integrály neboť její chyba nezávisí na dimenzi, ale pouze na počtu použitých bodů $\mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{N}})$
  - pro $n \lesssim 4$ je obvykle mnohem přesnější použít různé kvadratury
- pro jednoduchost si ilustrujeme metodu na jednorozm. příkladu.

Mějme $I = \int_0^1 f(x)\,dx$



[máme-li meze a, b, použijeme jednoduché lineární naporání

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 \tilde{f}(y)\,dy$$

$$\tilde{f}(y) = f[(b-a)y - a]$$]

a uvažujeme o něm jako o průměru $f(x)$ na intervalu $\langle 0,1\rangle$

Tento průměr lze aproximovat pomocí $I = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$, kde x_i jsou „rovnoměrně" rozložené v int. $\langle 0,1\rangle$, v případě metody MC uvažujeme x_i jako náhodně vybrané se stejnou pravděpodobností kdekoli v intervalu $\langle 0,1\rangle$.

- $f(x_i)$ je tedy náhodná veličina s jistým rozdělením jejíž střední hodnota je $I = \int_0^1 f(x)\,dx$ a nechť je rozptyl σ_f
  - σ_f je tím menší, čím je $f(x)$ hladší (pro konstantu je σ_f nula)
  - σ_f lze v metodě MC odhadnout (spočítat) pomocí

$$\sigma_f^2 \approx \langle f^2\rangle - \langle f\rangle^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)^2 - \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\right]^2$$

- použití centrální limitní věty dostaneme pro odhad chyby (rozptyl I)

$$\sigma_I \approx \frac{\sigma_f}{\sqrt{N}}$$

- vidíme, že chyba klesá jako $N^{-1/2}$ (tedy ne moc rychle)

porovnáme-li to s lichoběžníkovým pravidlem $\mathcal{O}(h^2) \sim \mathcal{O}(n^{-2}) \sim \mathcal{O}(N^{-2/d})$

dimenze	lichoběžník		
1	$\mathcal{O}(n^{-2}) \sim \mathcal{O}(N^{-2})$	$n = N$	N celkový počet bodů sítě a tedy počet volání fce $f(\vec{x})$
2	$\mathcal{O}(n^{-2}) \sim \mathcal{O}(N^{-1})$	$n^2 = N$	
3	$\mathcal{O}(n^{-2}) \sim \mathcal{O}(N^{-2/3})$	$n^3 = N$	n počet bodů kvadratury v 1D
4	$\mathcal{O}(n^{-2}) \sim \mathcal{O}(N^{-1/2})$	$n^4 = N$	

chyba v objemu n^d obecně $\mathcal{O}(h^{d+2})$
takový objem je n^d
a $h \sim n^{-1}$
takže chyba celková je $n^d \mathcal{O}(n^{-d-2}) \sim \mathcal{O}(n^{-2})$
a $n = N^{1/d}$
a tedy $\mathcal{O}(N^{-2/d})$

pro 4D je přesnost MC srovnatelná s lichoběžníkovým pravidlem avšak obecně pro hladké fce se používají mnohem přesnější kvadratury, takže MC je i pro vyšší dimenze méně přesné

- avšak MC má výhodu relativně snadné práce se složitými okraji integrační oblasti

- ze vztahu $\sigma_I \sim \frac{\sigma_f}{\sqrt{N}}$ je dále patrné, že chyba MC integrace bude menší pokud σ_f bude malá, tj. pokud $f(x)$ se bude blížit konstantě → možné zpřesnění integrace pomocí váhové fce $w(x)$, která je kladná a $\int_0^1 dx\, w(x) = 1$

pak $I = \int_0^1 dx\, w(x) \frac{f(x)}{w(x)}$ a přechodem k proměnné $y(x) = \int_0^x dx'\, w(x')$

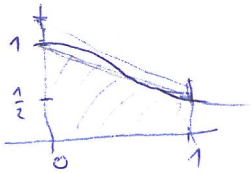
$\frac{dy}{dx} = w(x)$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$

dostaneme $I = \int_0^1 dy \frac{f(x(y))}{w(x(y))} = \int_0^1 dy\, g(y)$

a dále postupujeme stejně jako dříve

- problém je s inverzí fce $y(x)$, i když se nám podaří najít vhodné $w(x)$

Př. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

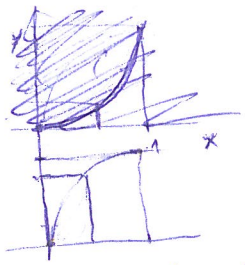


pak $y(x) = \frac{1}{3} x (4 - x)$

a $x(y) = 2 - \sqrt{4 - 3y}$

lze užít $w = \frac{1}{3}(4 - 2x)$

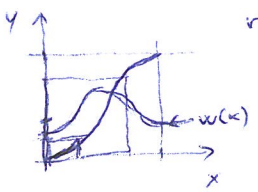
zlepšení přesnosti o řád!



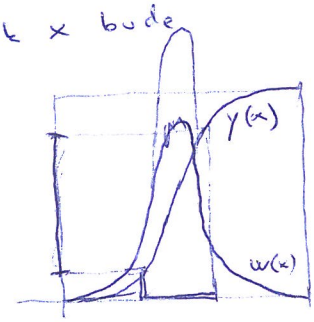
- protože najít $x(y)$ je často náročné a ve vícerozměrném případě kdy máme Jacobián $\left|\frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}}\right| = w(x)$ prakticky nemožné

je dobré se na vztah $dy = w(x)\,dx$ podívat jako na změnu rovnoměrného rozdělení $g(y) = 1$ na rozdělení $w(x)$

- vidíme, že je-li y rovnoměrně rozdělené na $\langle 0, 1 \rangle$, pak x bude rozdělené podle $w(x)$ a tedy budou se brát x převážně tam, kde $w(x)$ má např. peak



neboť tam $y(x)$ rychle roste →



- místo toho abychom provedli změnu proměnných můžeme stále používat x, ale namísto rovnoměrného rozdělení pro x použít $w(x)$

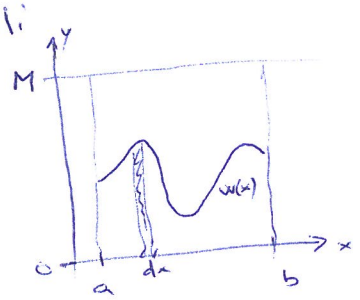
→ problém generování náhodné veličiny s daným rozdělením psti

Generování náhodných proměnných s danou rozdělovací fcí

- jak z rovnoměrného rozdělení udělat jiné, aniž bychom invertovali vztah typu $\int_0^x w(x')\,dx' = y(x)$?
- existují speciální postupy pro určité rozdělení, pro obecné rozdělení lze použít von Neumannovu metodu či Metropolisův - Hastingsův algoritmus

von Neumannova metoda

- jde o jednoduchou metodu, kdy generujeme vždy dvojici náhodných čísel s rovnoměrným rozdělením a rozhodneme dle $w(x)$, zda je ponecháme, či nikoli



1) 2 náhodná čísla $\xi_i, \eta_i \in \langle 0,1\rangle$ namapujeme na interval $\langle a,b\rangle$ a $\langle 0,M\rangle$, kde M je konstanta pro kterou $w(x) < M$ pro $\forall x \in \langle a,b\rangle$

dostaneme $x_i = a + \xi_i (b-a)$, $y_i = M\eta_i$

2) pokud $y_i \leq w(x_i)$, pak x_i použijeme
pokud $y_i > w(x_i)$, pak x_i zahodíme

protože η_i je generováno s rovnoměrným rozdělením, bude pst, že přijaté hodnota bude v intervalu $\langle x, x+dx\rangle$, úměrná $w(x)\underbrace{dx}_{\text{toto je za } x_i \text{ vybrané rovnoměrně z } \langle a,b\rangle}$, neboť pst, že hodnota η_i je akceptována je $w(x_i)/M$

- čím je M menší, tím méně hodnot zahazujeme a celý proces je efektivnější

generování normálního rozdělení

- buď lze využít centrální limitní věty a počítat součty rovnoměrně rozdělených náhodných veličin
  $\Rightarrow$ aproximace norm. rozdělení
- nebo trikem: uvažujeme Gaussovo rozdělení ve 2D (normované)
  tj. $e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}\,dx_1\,dx_2$ (x_1 a x_2 jsou 2 náhodné veličiny s norm. rozdl.)

v polárních souř. máme $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $\theta = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}$ $\Rightarrow$ $e^{-1/2 r^2}\,r\,dr\,d\theta$ a pro $u = 1/2 r^2$

dostáváme $e^{-u}\,du\,d\theta$ pokud tedy vygenerujeme $u \in \langle 0,\infty\rangle$ s rozdělením e^{-u} (např. pomocí $y = 1-e^{-u} = \int_0^u e^{-u}du$ $\Rightarrow$ $u = -\ln(1-y)$)

a $\theta \in \langle 0, 2\pi\rangle$ s rovnoměrným rozdělením

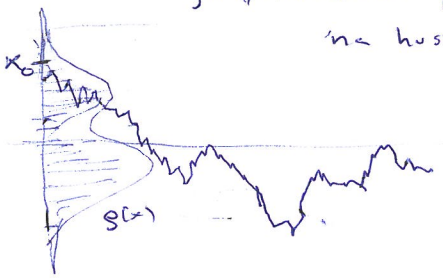
pak $x_1 = \sqrt{2u}\cos\theta$ a $x_2 = \sqrt{2u}\sin\theta$ budou s normálním rozdělením $N(0,1)$

- chceme-li norm. rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, pak provedeme ještě transformaci

$$x_i' = \mu + \sigma x_i$$

Metropolisův - Hastingsův algoritmus

- základní myšlenka: jít „náhodnou" procházkou v prostoru v závislosti na hustotě psti, tj.



nechť jsme ~~zadáme~~ v nějakém x_k

učiníme náhodný krok o $\delta x_k = \xi_k \delta$ (δ je zadaný parametr)

a tento krok přijmeme, pokud $\rho(x_k + \delta x_k) \geq \rho(x_k)$

pokud $\rho(x_k + \delta x_k) < \rho(x_k)$, pak vygenerujeme ještě jedno náh. číslo $\eta \in \langle 0, 1 \rangle$ a krok učiníme, pokud $\rho(x_k + \delta x_k) / \rho(x_k) \geq \eta$

jinak krok neuděláme a $x_{k+1} = x_k$

ve nD dostaneme algoritmus $r(:) = \text{random}(:)$

$\text{xtrial}(:) = x(:) + \delta\,(2r(:) - 1)$ ← pokud r je $\langle 0,1 \rangle$

$\text{ratio} = \rho(\text{xtrial}) / \rho(x(:))$ ← toto si lze pamatovat z minulého kroku

```
if [(ratio ≥ 1)
   or (ratio > random)]
then
   x(:) = xtrial(:)
return x(:)
```

- Proč to funguje? v limitě dlouhé náh. procházky tento algoritmus generuje body rozložené podle $\rho(x)$

  - označme $N_n(x)$ hustotu náhodných nezávislých chodců startujících v různých bodech po n krocích
  - pak počet chodců jdoucích z x do y v následujícím kroku je

$$\Delta N(x) = N_n(x) P(x \to y) - N_n(y) P(y \to x) =$$

$$= N_n(y) P(x \to y) \left[\frac{N_n(x)}{N_n(y)} - \frac{P(y \to x)}{P(x \to y)} \right]$$

kde $P(x \to y)$ je pravděpodobnost, že chodec přejde z x do y

  - rovnováha nastává pro $\frac{N_n(x)}{N_n(y)} = \frac{P(y \to x)}{P(x \to y)}$ a lze ukázat, že pro velké n jde $N_n(x) \to N_e(x)$, což je rovnovážné ~~hustota~~ rozdělení chodců v x

- zbývá ukázat, že $N_e(x) \sim \rho(x)$
  - $P(x \to y)$ lze vyjádřit jako $P(x \to y) = T(x \to y) A(x \to y)$

    kde $T(x \to y)$ je pst ~~dělat~~ náhodného vykročení z x do y

    a $A(x \to y)$ je pst přijmutí tohoto kroku

a pokud bude $\frac{\rho(x)}{\rho(y)} = \frac{T(y \to x) A(y \to x)}{T(x \to y) A(x \to y)}$ pak $N_e(x)$ bude ustálitu $\sim \rho(x)$

- to nastane např. pokud y lze dosáhnout v jediném kroku, tj. $\varrho = W$

y leží v $x + \delta\xi$, protože pak $T(x \to y) = T(y \to x)$

a navíc v našem algoritmu ~~více~~ pro $\varrho(x) > \varrho(y)$ bude $A(y \to x) = 1$

$$A(x \to y) = \frac{\varrho(y)}{\varrho(x)}$$

a pro $\varrho(y) > \varrho(x)$ bude $A(x \to y) = 1$

$$A(y \to x) = \frac{\varrho(x)}{\varrho(y)}$$

a tedy bude v každém případě

$$\frac{A(y \to x)}{A(x \to y)} = \frac{\varrho(x)}{\varrho(y)}$$