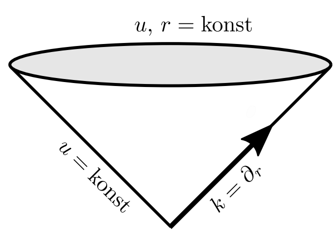
Výpočet křivosti Vaidyova prostoročasu

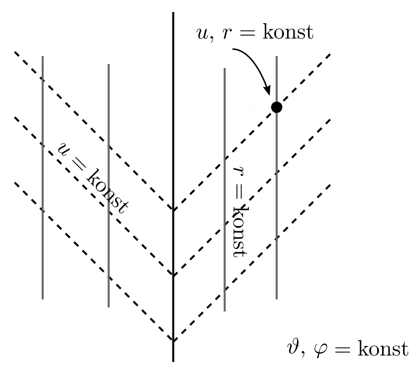
`NTMF059` – Zápočtový problém 2022

Pod *Vaidyovým*[1] *prostoročasem* rozumíme metriku ve tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2m(u)}{r}\right)\mathrm{d}u^2 - \mathrm{d}u\mathrm{d}r - \mathrm{d}r\mathrm{d}u + r^2\left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right), \tag{1}$$

kde uvažujeme signaturu $(-+++)$. Souřadnice u v metrice (1) představuje retardovaný čas a určuje nulovou foliaci prostoročasu, souřadnice r je afinním parametrem podél geodetické kongruence tečné (a zároveň kolmé) k dané nulové nadploše $u =$ konst. (pro její generátor tedy platí $k = \partial_r$), souřadnice ϑ a φ pak pokrývají 2-prostor s $u =$ konst. a $r =$ konst..





Fyzikálně se jedná o přesné sféricky symetrické *nevakuové* řešení[2] Einsteinových rovnic gravitačního pole, kde tenzor energie a hybnosti odpovídá čistému záření a může být zapsán ve tvaru

$$T = \mu(u, r)\,k\,k\,. \tag{2}$$

Jedná se tak o nestatické, viz závislost $m(u)$, zobecnění Schwarzschildova (černoděrového) řešení. Motivací k takovému zobecnění je snaha o elementární popis prostoročasu vně zářící hvězdy. Hustota vyzařované hmoty je dána funkcí $\mu(u, r)$, přičemž její vztah k parametrům metriky zjistíte v poslední části domácího úkolu.

[1] Prahalad Chunnilal Vaidya (1918–2010) byl indický matematik a fyzik.

[2] Pokud by prostoročas v obecné relativitě s nulovou kosmologickou konstantou měl být vakuový a sféricky symetrický, pak je díky Birkhoffovu teorému jedinou možností Schwarzschildova geometrie.

1. Pro prostoročas (1) je třeba vhodně zvolit *metrickou bázi 1-forem* e^m. Požadujeme tedy kostantnost výsledných komponent g_{mn} meriky (1) v takové bázi, kde $g = g_{mn}e^m e^n$. Vyjádřením g_{mn} ověřte, že jako vhodná volba se jeví

$$e^0 = \mathrm{d}u\,, \quad e^1 = \mathrm{d}r + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m(u)}{r}\right)\mathrm{d}u\,, \quad e^2 = r\,\mathrm{d}\vartheta\,, \quad e^3 = r\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,. \tag{3}$$

   Nalezněte též duální bázi vektorů e_k.

2. Spočítejte vnější derivace bázových 1-forem $\mathrm{d}e^m$. Výsledek vyjádřete v řeči vnějších součinů původních bázových 1-forem. Takto dostanete explicitní tvar pravé strany *1. Cartanových rovnic struktury*, tedy

$$\mathrm{d}e^m = -\omega^m{}_n \wedge e^n\,. \tag{4}$$

3. Řešením těchto rovnic nalezněte[3] 1-formy konexe $\omega^m{}_n$.

4. S pomocí *2. Cartanových rovnic struktury* nalezněte 2-formy křivosti $\Omega^m{}_n$,

$$\Omega^m{}_n = \mathrm{d}\omega^m{}_n + \omega^m{}_k \wedge \omega^k{}_n\,. \tag{5}$$

   Vyjádřete $\Omega^m{}_n$ pomocí vnějčích součinů bázových 1-forem.

5. Identifikujte tetrádové složky Riemannova tenzoru křivosti $R_{kl}{}^m{}_n$ ze vztahu

$$\Omega^m{}_n = \frac{1}{2}\,R_{kl}{}^m{}_n\,e^k \wedge e^l\,, \tag{6}$$

   kde faktor $\frac{1}{2}$ kompenzuje normalizaci báze $e^k \wedge e^l$ ve sčítání přes k, l.

6. Kontrakcí nalezněte tetrádové komponenty Ricciho tenzoru. Další kontrakcí pak nalezněte skalární křivost R.

7. Následně zkonstruujte i souřadnicové složky Ricciho tenzoru $R_{\bar{a}\bar{b}}$. Zde pruhované indexy odkazují na původní souřadnice $\bar{a} = u, r, \vartheta, \varphi$.

8. Dosazením výsledku do nevakuových Einsteinových rovnic $R_{\bar{a}\bar{b}} - \frac{1}{2}Rg_{\bar{a}\bar{b}} = 8\pi T_{\bar{a}\bar{b}}$ explicitně vyjádřete funkci $\mu(u, r)$ ve výrazu (2) určující hustotu záření.

[3] Nezapomeňte, že díky metricitě báze platí $\omega_{mn} = \omega_{[mn]}$, kde $\omega_{mn} = g_{mk}\omega^k{}_n$.