Kapitola 4

Antisymetrické formy

4.1 Zavedení antisymetrických forem

V této kapitole se budeme zabývat speciálními tenzory, tzv. *antisymetrickými p-formami*. Jedná se o antisymetrické tenzory s p kovariantními indexy. Připomeňme, že antisymetrickým tenzorům jsme již věnovali oddíl 1.4. Prostor antisymetrických forem tečných k varietě M v bodě x budeme označovat $\mathbf{\Lambda}^p_x M$.

Definice D4.1 (Antisymetrické formy)

Tečný tenzor $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{T}_x{}^0_p M$ se nazývá antisymetrickou formou stupně p (p-formou), píšeme $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{\Lambda}^p_x M$, pokud

$$\boldsymbol{\omega} = \mathcal{A}\,\boldsymbol{\omega}\ , \qquad \text{tj.} \quad \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p} = \boldsymbol{\omega}_{[\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p]}\ .$$

Prostor funkcí nabývajících hodnot v prostoru p-forem budeme značit $\mathcal{A}^p M$ (tj. $\mathcal{A}^p M = \operatorname{Sect} \mathbf{\Lambda}^p M$). ∘

M4.1 Formy nad vektorovým prostorem
Antisymetrické formy a vnější násobení lze zavést nad každým vektorovým prostorem V. Prostor forem $\mathbf{\Lambda}^p$ stupně p je tvořen antisymetrickými tenzory s p kovariantními indexy, $\mathbf{\Lambda}^p = V^0_{[p]} = \mathcal{A}\, V^0_p$. Prostor p-forem je netriviální pro $p \leq \dim V$. Direktní součet všech prostorů $\mathbf{\Lambda}^p$ tvoří *vnější algebru $\mathbf{\Lambda}$ generovanou prostorem V*.
Vnější derivaci (definovanou níže) lze však zavést pouze pro antisymetrické formy 'závisející na poloze'. Proto se v textu zabýváme hlavně antisymetrickými formami $\mathbf{\Lambda} M$ tečnými k varietě M.

Jako speciální případy dostáváme pro $p = 0$ prostor funkcí na M, tj. $\mathcal{A}^0 M = \mathfrak{F} M$. Pro $p = 1$ dostáváme prostor tečných forem (kovektorových polí) $\mathcal{A}^1 M = \mathfrak{T}^* M$, a konečně pro $p = \dim M$ prostor totálně antisymetrických tenzorových polí, které budou hrát důležitou roli při zavedení integrování na varietě (viz kapitolu 5).

Obecně, dimenze prostoru $\mathbf{\Lambda}^p_x M$ p-forem v bodě x je $\binom{d}{p}$, kde d je dimenze variety M. Pro $p > d$ je prostor p-forem triviální – neexistují tenzory s více antisymetrickými indexy než je dimenze vektorového prostoru, nad kterými jsou tenzory vybudované.

4.2 Vnější násobení

Mezi antisymetrickými formami lze zavést operaci *vnějšího násobení*. Definujeme ji pomocí tenzorové antisymetrizace

Definice D4.2 (Vnější násobení)

Nechť $\boldsymbol{\omega}^j \in \mathbf{\Lambda}^{p_j} M$, $j = 1, \dots, n$, jsou antisymetrické formy stupňů p_j. Vnější součin $\boldsymbol{\omega}^1 \wedge \boldsymbol{\omega}^2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\omega}^n$ těchto forem je antisymetrická forma $\boldsymbol{\omega}$ stupně $p = p_1 + \dots + p_n$ daná antisymetrizací tenzorového součinu forem $\boldsymbol{\omega}^j$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^1 \wedge \boldsymbol{\omega}^2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\omega}^n = \frac{p\,!}{p_1!\,p_2! \cdots p_n!}\ \mathcal{A}(\boldsymbol{\omega}^1\, \boldsymbol{\omega}^2\ \cdots\ \boldsymbol{\omega}^n)\ .$$

Tenzorové indexy vnějšího součinu forem budeme formálně psát u jednotlivých činitelů, abychom naznačili tenzorový charakter (stupeň) těchto činitelů:

$$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_p} = \boldsymbol{\omega}^1_{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_{p_1}} \wedge \boldsymbol{\omega}^2_{\boldsymbol{a}_{p_1+1}\ldots\boldsymbol{a}_{p_1+p_2}} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{\omega}^n_{\boldsymbol{a}_{p-p_n+1}\ldots\boldsymbol{a}_p} \,.$$

Pomocí indexů má definice vnějšího násobení tvar

$$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_p} = \\ = \frac{p\,!}{p_1!\,p_2!\cdots p_n!}\, \boldsymbol{\omega}^1_{[\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_{p_1}}\, \boldsymbol{\omega}^2_{\boldsymbol{a}_{p_1+1}\ldots\boldsymbol{a}_{p_1+p_2}} \cdots \boldsymbol{\omega}^n_{\boldsymbol{a}_{p-p_n+1}\ldots\boldsymbol{a}_p]} \,. \quad \circ$$

Prostor všech antisymetrických forem $\boldsymbol{\Lambda}M$ spolu s vnějším násobením tvoří tzv. *vnější algebru*. Vnější násobení je asociativní – vnější součin n činitelů můžeme libovolně ozávorkovat. Vnější násobení však není obecně komutativní. Chování vůči záměně činitelů závisí na stupni činitelů. Pro formy $\boldsymbol{\omega}$ a $\boldsymbol{\sigma}$ stupňů p a q máme

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma} = (-1)^{pq}\, \boldsymbol{\sigma} \wedge \boldsymbol{\omega} \,. \tag{4.1}$$

Znaménko vzniká při prokomutování q indexů formy $\boldsymbol{\sigma}$ přes p indexů formy $\boldsymbol{\omega}$ s uvážením antisymetrické povahy výsledné $(p+q)$-formy.

Vnější násobení se nejčastěji používá pro 1-formy. Pro 1-formy (kovektory) $\boldsymbol{\alpha}^j$, $j = 1, \ldots, n$, dostáváme speciálně

$$\boldsymbol{\alpha}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{\alpha}^n = \sum_{\text{permutace } \sigma} \operatorname{sign}\sigma \;\; \boldsymbol{\alpha}^{\sigma_1} \cdots \boldsymbol{\alpha}^{\sigma_n} \,. \tag{4.2}$$

Vidíme, že na prostoru 1-forem je vnější násobení antisymetrické. Opakuje-li se tak ve vnějším součinu vícekrát stejná 1-forma, je výsledek nulový.

Příklad P4.1

Pro 1-formy $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ dostáváme (samozřejmě s užitím konvence (1.2))

$$\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}\,\boldsymbol{\alpha} \,.$$

Připomeňme, že použijeme-li tenzorové indexy, nezáleží na pořadí, ve které činitele napíšeme – indexy sami určují pořadí tenzorového součinu:

$$\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{a}} \wedge \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{a}} \,.$$

Vnější násobení r-formy $\boldsymbol{\omega}$ s 1-formou $\boldsymbol{\alpha}$ má explicitně tvar

$$\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{a}_0} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_r} = \sum_{0\le k\le r} (-1)^k\; \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{a}_k}\, \boldsymbol{\omega}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_0\ldots\boldsymbol{a}_r}_{\text{mimo } \boldsymbol{a}_k}} \,. \tag{4.3}$$

Násobení dvou 2-forem $\boldsymbol{\omega}$ a $\boldsymbol{\sigma}$ je komutativní a lze ho rozepsat následovně

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{ab}} \wedge \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{cd}} &= \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{ab}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{cd}} = \\ &= \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{ab}}\,\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{cd}} + \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{cd}}\,\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{ab}} \\ &\quad - \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{ac}}\,\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{bd}} - \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{ad}}\,\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{cb}} - \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{cb}}\,\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{ad}} - \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{db}}\,\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{ca}} \,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

M4.2 Explicitní tvar vnějšího násobení
Všimněme si, že vnější součin se liší od antisymetrizace tenzorového součinu normalizací. Tato normalizace zajišťuje, že vnější součin je dán součtem všech možných tenzorových součinů činitelů lišících se 'kvalitativně neekvivalentním pořadím' tenzorových indexů. Jednotlivé členy se v součtu vyskytují se znaménkem odpovídajícím znaménku permutace příslušného uspořádání indexů. Dvě různá uspořádání indexů v součinu činitelů přitom nazýváme 'kvalitativně ekvivalentní,' pokud se liší pouze permutacemi indexů jednotlivých činitelů.
Pro vnější součin dvou forem $\boldsymbol{\omega}$ a $\boldsymbol{\sigma}$ stupňů p a $r-p$ tato normalizace dává

$$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_p} \wedge \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{a}_{p+1}\ldots\boldsymbol{a}_r} = \\ = \sum_{1\le k_1<\cdots<k_p\le r} (-1)^{k_1+\cdots+k_p+\frac{p(p+1)}{2}}\; \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_{k_1}\ldots\boldsymbol{a}_{k_p}}\, \boldsymbol{\sigma}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_r}_{\text{mimo } \boldsymbol{a}_{k_1}\ldots\boldsymbol{a}_{k_p}}} \,,$$

Součet se provádí přes 'kvalitativně ekvivalentní' rozdělení indexů mezi obě formy. Důkaz tvrzení lze nalézt v dodatku 4.A.
Konkrétně, pro $p=1$ dostáváme vztah (4.3) a pro $p=2$ vztah

$$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2} \wedge \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{a}_3\ldots\boldsymbol{a}_r} = \\ = \sum_{1\le k<l\le r} (-1)^{k+l+1}\; \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{a}_l}\, \boldsymbol{\sigma}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_r}_{\text{mimo } \boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_l}} \,.$$

4.3 Souřadnice na $\boldsymbol{\Lambda}^p M$

Máme-li zadanou bázi $\{\boldsymbol{e}^j\}_{j=1,\dots,d}$ v kotečném bundlu $\boldsymbol{T}^*_x M$, můžeme zkonstruovat pomocí vnějšího součinu bázi v jednotlivých prostorech $\boldsymbol{\Lambda}^p_x M$. Díky antisymetrii vnějšího součinu 1-forem jsou součiny $\boldsymbol{e}^{a_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}^{a_p}$ lišící se pouze záměnou činitelů lineárně závislé. Za bázi v prostoru antisymetrických p-forem tak můžeme vybrat vnější součiny $\boldsymbol{e}^{a_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}^{a_p}$ s odlišným výběrem činitelů $\boldsymbol{e}^{a_1}, \dots, \boldsymbol{e}^{a_p}$:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}^{a_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}^{a_p} \\ &\qquad \text{pro všechny } a_1, \dots, a_p \text{ splňující } 1 \le a_1 < \dots < a_p \le d \,. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Vidíme, že báze má $\binom{d}{p}$ nezávislých prvků, což odpovídá dimenzi prostoru $\boldsymbol{\Lambda}^p_x M$.

Díky odlišné normalizaci vnějšího součinu a antisymetrizace tenzorového součinu jsou souřadnice vzhledem k tenzorové bázi shodné se souřadnicemi vzhledem k bázi v prostoru p-forem:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{a_1 \dots a_p}\, \boldsymbol{e}^{a_1} \cdots \boldsymbol{e}^{a_p} = \sum_{1 \le a_1 < \dots < a_p \le d} \omega_{a_1 \dots a_p}\, \boldsymbol{e}^{a_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}^{a_p} \,. \tag{4.6}$$

V součtu přes prvky tenzorové báze $\boldsymbol{e}^{a_1} \cdots \boldsymbol{e}^{a_p}$ lze totiž seskupit členy lišící se pouze pořadím činitelů. Díky antisymetrii souřadnice $\omega_{a_1 \dots a_p}$ můžeme tuto souřadnici od $\binom{d}{p}$ seskupených členů vytknout a jejich antisymetrická kombinace vytvoří vnější součin $\boldsymbol{e}^{a_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}^{a_p}$, viz (4.2) a následující příklad.

Příklad P4.2

Na třídimenzionální varietě M $(d = 3)$ s kotečnou bází $\{\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3\}$ můžeme antisymetrickou 2-formu $\boldsymbol{\omega}$ rozepsat následovně

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \omega_{ab}\, \boldsymbol{e}^a \boldsymbol{e}^b \\ &= \omega_{12} \left(\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}^2 - \boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}^1\right) + \omega_{13} \left(\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}^3 - \boldsymbol{e}^3\boldsymbol{e}^1\right) + \omega_{23} \left(\boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}^3 - \boldsymbol{e}^3\boldsymbol{e}^2\right) \\ &= \omega_{12}\, \boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^2 + \omega_{13}\, \boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^3 + \omega_{23}\, \boldsymbol{e}^2 \wedge \boldsymbol{e}^3 \,. \end{aligned}$$

Máme-li zadané souřadnice x^j na varietě M, na prostoru p-forem volíme typicky bázi $\{\, \mathbf{d}x^{a_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{a_p}\}_{1 \le a_1 < \dots < a_p \le d}$.

M4.3 Transformační vlastnosti souřadnic
Souřadnice totálně antisymetrických forem (tj. forem stupně $d = \dim M$) mají speciální transformační vlastnosti. Prostor d-forem je jednodimenzionální, tj. tyto formy mají pouze jednu nezávislou komponentu. Forma $\boldsymbol{\alpha}$ je tak charakterizována komponentou $\alpha_{1\dots d}$, všechny ostatní komponenty jsou buď nula nebo se liší pouze permutací indexů. Tato komponenta se při změně báze

$$\boldsymbol{e}^j = A^j_{i'}\, \boldsymbol{e}'^{i'}$$

mění následovně

$$\alpha'_{1'\dots d'} = \left(\det A^j_{i'}\right) \alpha_{1\dots d} \,.$$

Vskutku, díky antisymetrii formy $\boldsymbol{\alpha}$ můžeme psát

$$\begin{aligned} \alpha'_{1'2'\dots d'} &= A^{j_1}_{1'} A^{j_2}_{2'} \dots A^{j_d}_{d'}\, \alpha_{j_1 j_2 \dots j_d} \\ &= \sum_{\text{permutace } \sigma} A^{\sigma_1}_{1'} A^{\sigma_2}_{2'} \dots A^{\sigma_d}_{d'}\, \alpha_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_d} \\ &= \Big(\sum_{\text{permutace } \sigma} \operatorname{sign} \sigma\, A^{\sigma_1}_{1'} A^{\sigma_2}_{2'} \dots A^{\sigma_d}_{d'} \Big)\, \alpha_{12\dots d} \\ &= \left(\det A^j_{i'}\right) \alpha_{12\dots d} \,. \end{aligned}$$

4.4 Vnější derivace

Již jsme se zmínili, že je obtížné zobecnit operaci gradientu na obecná tenzorová pole. K derivování obecných tenzorových polí je potřeba dodatečná geometrická struktura – ať již se jedná o vektorové pole podél kterého můžeme definovat Lieovu derivaci (viz definice D3.11) nebo o paralelní přenos umožňující zavést kovariantní derivaci (viz kapitolu 7, zejména oddíl 7.2). Prostor antisymetrických polí $\mathcal{A}^p M$ však zaujímá v tomto směru speciální postavení – pro antisymetrické formy lze přirozeně zavést tzv. *vnější derivaci* a to bez použití jakýchkoli dodatečných struktur. Vnější derivace zvyšuje stupeň antisymetrické formy a jedná se o jisté zobecnění operací gradient a rotace známých z euklidovského třídimenzionálního prostoru.

Definice D4.3 (Vnější derivace)

Vnější derivace $\mathbf{d}$ je zobrazení z prostoru antisymetrických p-forem do prostoru $(p+1)$-forem definovaných na varietě M splňující následující vlastnosti:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{d} : \mathcal{A}^p M \to \mathcal{A}^{p+1} M \,, \\
&\mathbf{d}(\boldsymbol{\omega} + a\,\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} + a\,\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} \,, \qquad a \in \mathbb{R} \,, && \text{(i)} \\
&\mathbf{d}(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma} + (-1)^p\, \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} \,, && \text{(ii)} \\
&\mathbf{d} \text{ působí na } \mathcal{A}^0 M = \mathfrak{F} M \text{ jako obyčejný gradient} \,, && \text{(iii)} \\
&\mathbf{d}\,\mathbf{d}\,\boldsymbol{\omega} = 0 \,, && \text{(iv)}
\end{aligned}$$

pro $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}^p M$ a $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{A}^q M$.

Při použití tenzorových indexů budeme výsledek vnějšího derivování zapisovat $\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_0} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p}$. Složky vnější derivace $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}$ budeme označovat $\mathrm{d}_{a_0} \omega_{a_1 \dots a_p}$ nebo, s využitím lemmatu V4.1, přímo pomocí antisymetrizované parciální derivace jako $(p+1)\, \omega_{[a_1 \dots a_p, a_0]}$.∘

Poznámka

Pravidlo pro derivování vnějšího součinu obsahuje zdánlivě neintuitivní znaménko $(-1)^p$. Toto znaménko souvisí s antisymetrickou povahou výsledné formy a vymizí, pokud zachováme ve všech členech stejné pořadí indexů, tj. nejdříve index od derivace, následovaný indexy od prvního činitele a indexy od druhého činitele:

$$\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} (\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{b}\dots} \wedge \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{c}\dots}) = \mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{b}\dots} \wedge \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{c}\dots} + \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{b}\dots} \wedge \mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{c}\dots} \,.$$

Poznámka

Zdůrazněme, že zápis $\mathrm{d}_{a_0} \omega_{a_1 \dots a_p}$ značí souřadnice vnější derivace $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}$ formy $\boldsymbol{\omega}$, a ne souřadnice gradientu skalárů $\omega_{a_1 \dots a_p}$. Ty bychom zapsali přímo pomocí parciální derivace jako $\omega_{a_1 \dots a_p, a_0}$.

Poznamenejme, že z pravidla pro derivování vnějšího součinu vyplývá pravidlo pro derivování násobku formy funkcí:

$$\mathbf{d}(f\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{d}f \wedge \boldsymbol{\omega} + f\, \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} \,, \qquad f \in \mathfrak{F} M \,, \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}^p M \,. \tag{4.7}$$

Pravidla z definice D4.3 určují již vnější derivaci jednoznačně jak je vidět z rozpisu do libovolně zvolených souřadnic x^m

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} &= \mathbf{d}\Big(\sum_{a_1 < \dots < a_p} \omega_{a_1 \dots a_p}\, \mathbf{d}x^{a_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{a_p} \Big) \\
&= \sum_{a_1 < \dots < a_p} \mathbf{d}\omega_{a_1 \dots a_p} \wedge \mathbf{d}x^{a_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{a_p} \,.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Zde jsme využili linearitu vnější derivace vůči součtu, pravidlo pro derivování vnějšího součinu a fakt, že $\mathbf{d}\,\mathbf{d}\,x^a = 0$. Výsledný výraz je již součet vnějších součinů 1-forem daných obyčejnými gradienty, tj. explicitní předpis pro výpočet vnější derivace. Z (4.8) již lehce nahlédneme vztah pro souřadnice vnější derivace (nahlédněte sami či v dodatku 4.A):

Lemma V4.1 (Souřadnice vnější derivace)

Souřadnice $\mathrm{d}_{a_0} \omega_{a_1 \dots a_p}$ vnější derivace $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}$ p-formy $\boldsymbol{\omega}$ jsou

$$\mathrm{d}_{a_0} \omega_{a_1 \dots a_p} = (p+1)\, \omega_{[a_1 \dots a_p, a_0]} \,.$$ □

Poznámka

Ze souřadnicového zápisu vidíme, že vnější derivace je v nějakém smyslu ‘antisymetrizace gradientu tenzorového pole’. Přesnější význam tomuto tvrzení dáme po zavedení kovariantní derivace ve větě V7.20.

M4.4 Vnější derivace a vektorové operátory

Na třídimenzionální varietě s metrikou $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{ab}}$ a příslušně normovaným Levi-Civitovým tenzorem $\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{abc}}$ lze definovat gradient funkcí a rotaci a divergenci vektorových polí – viz oddíl 10.1, zejména marginálii M10.1. Vnější derivace je s těmito operacemi úzce spojena:

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{grad}\, f)^{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{an}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} f \,, \\
&(\mathbf{rot}\, \boldsymbol{a})^{\boldsymbol{c}} = (\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{b}})\, \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{abc}} \,, \\
&\mathbf{div}\, \boldsymbol{a} = \tfrac{1}{3!}\, \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{abc}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} (\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{bcn}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}})
\end{aligned}$$

(indexy se snižují a zvyšují pomocí metriky). Rotace je tak Hodgeův duál (viz definici D6.14) vnější derivace 1-formy metricky asociované s vektorovým polem, $\mathbf{rot}\, \boldsymbol{a} = {}^*\mathbf{d}\boldsymbol{a}$, a divergence je duál vnější derivace duálu vektorového pole, $\mathbf{div}\, \boldsymbol{a} = {}^*\mathbf{d}{}^*\boldsymbol{a}$.

PŘÍKLAD P4.3

Pro vnější derivaci 1-formy γ zúženou s dvěma vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ dostáváme

$$\boldsymbol{a}^m\,\big(\mathbf{d}_m\gamma_n\big)\,\boldsymbol{b}^n = \boldsymbol{a}^m\,\mathbf{d}_m\big(\boldsymbol{b}^n\gamma_n\big) - \boldsymbol{b}^n\,\mathbf{d}_n\big(\boldsymbol{a}^m\gamma_m\big) - [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]^c\,\gamma_c\ .$$

Analogický výraz pro formy vyššího stupně je uveden v marginálii M4.5 a dokázán v dodatku 4.A.

M4.5 Zúžení vnější derivace
Pro vnější derivaci formy $\boldsymbol{\omega}$ zúženou s vektory $\boldsymbol{a}_j$ lze odvodit vztah

$$\begin{aligned}&\big(\mathbf{d}_{n_0}\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p}\big)\,\boldsymbol{a}_0^{n_0}\,\boldsymbol{a}_1^{n_1}\cdots\boldsymbol{a}_p^{n_p}\\ &= \sum_{0\le k\le p}(-1)^k\boldsymbol{a}_k^{n_k}\ \mathbf{d}_{n_k}\big(\underbrace{\boldsymbol{\omega}_{n_0\dots n_p}\,\boldsymbol{a}_0^{n_0}\cdots\boldsymbol{a}_p^{n_p}}_{\text{mimo } n_k}\big)\\ &+\sum_{0\le k<l\le p}(-1)^{k+l}\,\big[\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_l\big]^n\,\underbrace{\boldsymbol{\omega}_{nn_0\dots n_p}\,\boldsymbol{a}_0^{n_0}\cdots\boldsymbol{a}_p^{n_p}}_{\text{mimo } n_k,\,n_l}\,.\end{aligned}$$

Speciálně, pro $p=1$ dostáváme vztah z příkladu P4.3. Důkaz tvrzení viz dodatek 4.A.

4.5 Vztah vnější a Lieovy derivace

Vnější derivace lze využít při výpočtu Lieovy derivace antisymetrické formy. Za prvé, obdobně gradientu, vnější a Lieova derivace komutují.

Lemma V4.2 (Záměnnost $\mathbf{d}$ a $\pounds_{\boldsymbol{a}}$)

Pro antisymetrickou formu $\boldsymbol{\omega}$ a vektorové pole $\boldsymbol{a}$ platí

$$\mathbf{d}\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\omega} = \pounds_{\boldsymbol{a}}\,\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\ . \qquad \square$$

Důkaz lze provést pomocí tzv. Cartanovy identity vyjadřující Lieovu derivaci formy pomocí vnější derivace:

Věta V4.3 (Cartanova identita)

Pro Lieovu derivaci antisymetrické formy $\boldsymbol{\omega}$ podél vektorového pole $\boldsymbol{a}$ platí

$$\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p} = \boldsymbol{a}^n\ \mathbf{d}_n\,\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p} + \mathbf{d}_{n_1}\big(\boldsymbol{a}^n\boldsymbol{\omega}_{nn_2\dots n_p}\big)\ . \qquad \square$$

DŮKAZ:

Zde tvrzení dokážeme pouze pro 1-formy (tj. pro $p=1$). Důkaz pro obecné p je analogický a lze nalézt v dodatku 4.A.

Využitím Leibnizova pravidla pro Lieovu derivaci zúžení 1-formy γ s vektorovým polem $\boldsymbol{b}$ dostáváme

$$\big(\pounds_{\boldsymbol{a}}\gamma_r\big)\boldsymbol{b}^r = \pounds_{\boldsymbol{a}}(\gamma_r\boldsymbol{b}^r) - \big(\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}^r\big)\gamma_r = \boldsymbol{a}^n\,\mathbf{d}_n(\gamma_r\boldsymbol{b}^r) - [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]^r\gamma_r\ .$$

Použitím identity z příkladu P4.3 dostáváme

$$\big(\pounds_{\boldsymbol{a}}\gamma_r\big)\boldsymbol{b}^r = \boldsymbol{a}^n\big(\,\mathbf{d}_n\gamma_r\big)\boldsymbol{b}^r + \boldsymbol{b}^r\,\mathbf{d}_r\big(\gamma_n\boldsymbol{a}^n\big)\ .$$

Jelikož $\boldsymbol{b}$ bylo zvoleno libovolně, je lemma dokázáno. ■

DŮKAZ: (LEMMA V4.2)

Použijeme Cartanovu identitu postupně pro obě strany tvrzení:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_{n_0}\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p} &= \mathbf{d}_{n_0}\big(\boldsymbol{a}^n\,\mathbf{d}_n\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p}\big) + \mathbf{d}_{n_0}\,\mathbf{d}_{n_1}\big(\boldsymbol{a}^n\boldsymbol{\omega}_{nn_2\dots n_p}\big)\ ,\\ \pounds_{\boldsymbol{a}}\,\mathbf{d}_{n_0}\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p} &= \boldsymbol{a}^n\,\mathbf{d}_n\,\mathbf{d}_{n_0}\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p} + \mathbf{d}_{n_0}\big(\boldsymbol{a}^n\,\mathbf{d}_n\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p}\big)\ .\end{aligned}$$

Použitím $\mathbf{d}\,\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}=0$ dostaneme požadovanou rovnost

$$\mathbf{d}_{n_0}\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p} = \pounds_{\boldsymbol{a}}\,\mathbf{d}_{n_0}\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p} = \mathbf{d}_{n_0}\big(\boldsymbol{a}^n\,\mathbf{d}_n\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p}\big)\ . \qquad ■$$

Obdobně komutaci s difeomorfismy (generovanými Lieovou derivací) komutuje vnější derivace též s restrikcí na podvarietu. Na podvarietě N variety M je vnější derivace samozřejmě odlišná od analogické operace na varietě M. Jelikož je však v obou případech dána vnější derivace stejnými vlastnostmi, platí

Lemma V4.4 (Vnější derivace a restrikce na podvarietu)

Pro antisymetrickou formu $\boldsymbol{\omega}\in\mathcal{A}^pM$ platí

$$\big(\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\big)|_N = \mathbf{d}\big(\boldsymbol{\omega}|_N\big)\ . \qquad \square$$

Důkaz:
Vložení podvariety N do M zachovává vlastnosti definice D4.3. Jelikož tyto vlastnosti určují vnější derivaci jednoznačně, stačí pouze ukázat, že $\big(\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\big)|_N$ závisí pouze na restrikci $\boldsymbol{\omega}|_N$. Jinými slovy, že platí

$$\boldsymbol{\omega}|_N = 0 \quad \Rightarrow \quad \big(\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\big)|_N = 0\ .$$

Ovšem $\big(\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\big)|_N = 0$ znamená, že pro vektorová pole $\boldsymbol{a}_i$ tečná k N platí $\big(\mathbf{d}_{n_0}\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p}\big)\, \boldsymbol{a}_0^{n_0}\, \boldsymbol{a}_1^{n_1}\cdots \boldsymbol{a}_p^{n_p} = 0$. Tvrzení $\big(\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\big)|_N = 0$ pak plyne z marginálie M4.5 (viz též Lemma V4.7), užitím rozpisu předpokladu $\boldsymbol{\omega}|_N = 0$ a faktu, že Lieova závorka dvou vektorových polí tečných k podvarietě je opět vektorové pole tečné k podvarietě. ■

4.6 Uzavřené a exaktní formy

Antisymetrická forma jejíž vnější derivace vymizí se nazývá *uzavřená*, forma, jež lze napsat jako vnější derivace jiné formy, se nazývá *exaktní*.

Definice D4.4 (Uzavřené a exaktní formy)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \text{ je } \textit{uzavřená} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = 0\ ,\\ \boldsymbol{\omega} \text{ je } \textit{exaktní} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\boldsymbol{\sigma} \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}\ . \end{aligned}$$

Prostor uzavřených (anglicky *closed*) forem označíme $\mathcal{A}^p_{\mathrm{c}}M$ a prostor exaktních (anglicky *exact*) forem $\mathcal{A}^p_{\mathrm{e}}M$. Pro $p = 0$ dodefinujeme $\mathcal{A}^0_{\mathrm{e}}M = \{0\}$.

Máme tedy $\mathcal{A}^p_{\mathrm{c}}M = \ker \mathbf{d}$ a $\mathcal{A}^p_{\mathrm{e}}M = \operatorname{img} \mathbf{d}$. ◦

Zřejmě, každá d-forma ($d = \dim M$) je uzavřená – neexistuje žádná nenulová $(d{+}1)$-forma. Vnější součin dvou uzavřených forem je opět uzavřená forma (díky pravidlu pro derivování vnějšího součinu). Vnější součin uzavřené formy $\boldsymbol{\kappa}$ a exaktní formy $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}$ je exaktní forma, $\boldsymbol{\kappa}\wedge\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}(\boldsymbol{\kappa}\wedge\boldsymbol{\sigma})$.

Z vlastnosti (iv) definice D4.3 vidíme, že každá exaktní forma je uzavřená. Přirozeně se nabízí otázka, zda tomu je i naopak: "Je každá uzavřená forma exaktní?" Odpověď dává tzv. Poincarého lemma a je obecně negativní – uzavřené formy jsou exaktní pouze na 'topologicky jednoduchých' varietách. K vymezení 'topologické jednoduchosti', zavedeme několik užitečných pojmů.

Definice D4.5 (de Rhamova kohomologie)

Faktorizaci uzavřených forem stupně p modulo exaktní formy nazýváme p-tou de Rhamovou kohomologickou grupou $H^p(M)$:

$$H^p(M) = \mathcal{A}^p_{\mathrm{c}}M/\mathcal{A}^p_{\mathrm{e}}M\ .$$

Prvky kohomologické grupy se nazývají třídy kohomologie. Konkrétně, pro $\boldsymbol{\omega}\in\mathcal{A}^p_{\mathrm{c}}M$ budeme $[\boldsymbol{\omega}] = \boldsymbol{\omega} + \mathcal{A}^p_{\mathrm{e}}M$ nazývat třídou kohomologie formy $\boldsymbol{\omega}$. Grupová operace na $H^p(M)$ je přirozeně definované sčítání. $H^p(M)$ navíc tvoří vektorový prostor.

Pokud je dimenze $H^p(M)$ konečná, nazýváme ji p-té Bettiho číslo variety M,

$$b^p(M) = \dim H^p(M)\ .$$

Alternující součet Bettiho čísel nazýváme Eulerovou charakteristikou variety M

$$\chi(M) = \sum_{p=0,\dots,d} (-1)^p\, b^p(M)\ . \qquad \circ$$

M4.6 Potenciál uzavřené 1-formy
Otázkou zda uzavřená 1-forma $\boldsymbol{\omega}$ je exaktní se ptáme, zda pro formu splňující $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = 0$ existuje funkce f, nazývaná skalární potenciál, taková, že $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}f$.
Pokud je odpověď kladná, potenciál lze explicitně zkonstruovat předpisem

$$f(x) = \int_\gamma \boldsymbol{\omega} = \int_\gamma \frac{\boldsymbol{D}^a\gamma}{d\eta}\boldsymbol{\omega}_a d\eta\ , \qquad (*)$$

kde $\gamma(\eta)$ je parametrizovaná křivka začínající v nějakém fixním bodě x_0 a končící v x, a $D\gamma/d\eta$ je tečný vektor ke křivce γ. Tento předpis je konzistentní pokud nezávisí na volbě křivky γ spojující body x_0 a x. Nezávislost na volbě křivky je zajištěna, pokud integrál podél libovolné smyčky je nulový.
To lze garantovat, pokud na libovolnou smyčku λ lze napnout dvoudimenzionální plochu S topologicky homeomorfní s kruhem, $\partial S = \lambda$. Pak můžeme pomocí Gaussovy věty V10.16 převést křivkový integrál na plošný, který vymizí díky uzavřenosti formy $\boldsymbol{\omega}$:

$$\int_{\partial S}\boldsymbol{\omega} = \int_S \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = 0\ .$$

Fakt, že pro funkci f definovanou pomocí (*) platí $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}f$ plyne již z toho, že vnější derivace působí na funkcích jako obyčejný gradient. Lehce totiž nahlédneme, že pro libovolný vektor $\boldsymbol{a}$ pomoci Newtonova vzorce máme

$$\boldsymbol{a}^n\boldsymbol{\omega}_n = \boldsymbol{a}^n\,\mathbf{d}_n\int_\gamma\boldsymbol{\omega}$$

kde křivku γ zvolíme tečnou k $\boldsymbol{a}$. Užitím (*) a 'zkrácením' obecně zvoleného vektoru $\boldsymbol{a}$ dostáváme $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}f$.
Otázku existence skalárního potenciálu pro uzavřenou 1-formu jsme tedy převedli na otázku zda každá smyčka λ lze napsat jako hranice dvoudimenzionálního topologického kruhu. Jinými slovy, zda je libovolná smyčka spojitě stáhnutelná do bodu. Takové variety se nazývají jednoduše souvislé.
Podmínka jednoduché souvislosti je tak podmínkou dostatečnou pro existenci skalárního potenciálu uzavřené 1-formy. Je to ale i podmínka nutná. Konstrukce skalárního potenciálu pomocí (*) lze totiž vždy provést lokálně. Existence křivky nestáhnutelné do bodu však zabrání pro obecnou formu $\boldsymbol{\omega}$ lokálně definovanou funkci f konzistentně rozšířit na funkci jednoznačně definovanou na celé varietě.

De Rhamovy kohomologické grupy vystihují 'topologický charakter' variety. Kohomologické grupy, vágně řečeno, určují, kolik různě dimenzionálních 'děr' či 'uch' varieta obsahuje.

Nulté Bettiho číslo je např. dáno počtem souvislých komponent variety: nultá kohomologická grupa $H^0(M)$ je ekvivalentní prostoru konstantních funkcí na M a pro každou souvislou komponentu M máme jednu nezávislou konstantní funkci. Triviálnost *první kohomologické grupy* znamená, že varieta je jednoduše souvislá, tj., že každá smyčka lze spojitě stáhnout do bodu (viz marginálie M4.6).

Definice D4.6 (Kontrahovatelná varieta)

Varietu nazýváme *kontrahovatelnou (stáhnutelnou) do bodu*, pokud všechny její body lze *spojitě* stáhnout do jednoho bodu. Tj., pokud existuje *spojité* zobrazení $\phi : \langle 0,1\rangle \times M \to M$ takové, že $\phi(0,x) = x$ a $\phi(1,x) = x_0$ pro nějaký fixovaný bod x_0. ∘

POZNÁMKA

Zdůrazněme, že v této definici je klíčová *spojitost* zobrazení stahujícího varietu do bodu. Pokud varieta obsahuje 'díry', body okolo těchto děr nelze stáhnout do jednoho bodu *spojitým* způsobem.

PŘÍKLAD P4.4

$\mathbb{R}^n$ je kontrahovatelná varieta, $\mathbb{R}^n - 0$ není.

Kontrahovatelnost variety do bodu dává přesný význam 'topologické jednoduchosti' zmíněné výše. Platí totiž

Věta V4.5 (Poincarého lemma)

Na varietě kontrahovatelné do bodu je každá uzavřená forma exaktní. To znamená, že $b^0(M) = 1$ a pro $p > 0$ jsou všechny de Rhamovy kohomologické grupy triviální, $b^p(M) = 0$. □

Důkaz lze nalézt ve většině učebnic diferenciální geometrie.

PŘÍKLAD P4.5

Prostor $\mathbb{R}^n$ je kontrahovatelný do bodu a tudíž na $\mathbb{R}^n$ platí $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = 0 \Rightarrow \exists\, \boldsymbol{\sigma}\;\; \boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}$.

PŘÍKLAD P4.6

Kružnice S^1 není kontrahovatelná do bodu. První kohomologická grupa je netriviální, dimenze jedna, $b^1(S^1) = 1$.

Zavedeme-li na S^1 víceznačnou úhlovou souřadnici φ s periodou 2π (tj. hodnoty $\varphi = \varphi_0$ a $\varphi = \varphi_0 + 2\pi$ popisují tentýž bod kružnice), můžeme zavést 1-formu $\boldsymbol{\omega}$, která je na libovolné jednoduše souvislé oblasti $I \subset S^1$ dána $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}\varphi$. Tato 1-forma je uzavřená, není však exaktní, jelikož vztah $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}\varphi$ nelze rozšířit na kružnici tak aby φ byla jednoznačná spojitá funkce na celém S^1. První kohomologická grupa je pak generována třídou kohomologie formy $\boldsymbol{\omega}$.

PŘÍKLAD P4.7

Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ má Bettiho čísla $b^0(T^2) = 1, b^1(T^2) = 2$ a $b^2(T^2) = 1$. Analogicky příkladu P4.6 můžeme pomocí úhlových souřadnic podél hlavních kruhů torusu zavést uzavřené formy $\boldsymbol{\omega}$ a $\boldsymbol{\sigma}$. Tyto formy generují nezávislé kohomologické třídy grupy $H^1(T^2)$. Jednodimenzionální kohomologická grupa $H^2(T^2)$ je generována třídou kohomologie formy $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma}$.

PŘÍKLAD P4.8

Obecně, n-dimenzionální sféra S^n není kontrahovatelná do bodu. Všechny kohomologické grupy mimo $H^0(M)$ a $H^n(M)$ jsou triviální a $b^0(S^n) = b^n(S^n) = 1$. Eulerova charakteristika sféry tedy je $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$. Konkrétně, $\chi(S^2) = 2$.

M4.8 Vektorový a skalární potenciál

V kontextu marginálie M4.4 lehce nahlédneme, že z $\mathbf{dd}\boldsymbol{\omega} = 0$ vyplývá $\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\, f = 0$ a $\mathbf{div}\,\mathbf{rot}\, \boldsymbol{a} = 0$. Poincarého lemma (věta V4.5) nám pak říká, že na kontrahovatelné varietě (např. na E^3) podmínky $\mathbf{rot}\, \boldsymbol{e} = 0$ a $\mathbf{div}\, \boldsymbol{b} = 0$ jsou dostatečné pro existenci skalárního a vektorového potenciálu φ a $\boldsymbol{a}$ takových, že $\boldsymbol{e} = \mathbf{grad}\,\varphi$ a $\boldsymbol{b} = \mathbf{rot}\, \boldsymbol{a}$.

Poznámka

Ve světle posledního příkladu vidíme, že obecně má varieta M netriviální kohomologickou grupu stupně n pokud obsahuje vnořenou topologickou sféru S^n nestáhnutelnou do bodu. Jednoduše nesouvislé variety obsahují nestáhnutelné smyčky, což vypovídá o existenci děr 'rozprostraněných podél $d-2$ dimenzí' ($d = \dim M$), kolem kterých jsou tyto smyčku obtočeny. Netriviální kohomologická grupa $H^2(M)$ ukazuje na existenci děr 'rozprostraněných podél $d-3$ dimenzí', které lze 'zabalit' do nestáhnutelných dvoudimenzionálních sfér. Na trojdimenzionální varietě $b^1(M) \neq 0$ tak ukazuje na přítomnost 'lineárních děr' ('chybějících křivek') a $b^2(M) \neq 0$ na přítomnost 'bodových děr'. Pojem 'díry' je zde ale užit pouze na intuitivní úrovni – odkazuje se zejména na situaci, kdy z topologicky triviálního prostoru E^d vytváříme nekontrahovatelný prostor 'vyřezáváním' různých útvarů.

4.A Některé vztahy pro antisymetrické formy

V tomto dodatku si dokážeme některé vztahy z hlavního textu. Začneme explicitní formou vnějšího násobení z marginálie M4.2:

Lemma V4.6 (Explicitní tvar vnějšího násobení)
Pro vnější součin p-formy $\boldsymbol{\omega}$ a $(r-p)$-formy $\boldsymbol{\sigma}$ platí

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p} \wedge \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{a}_{p+1}\dots\boldsymbol{a}_r} \\ &\qquad = \sum_{1\leq k_1<\dots<k_p\leq r} (-1)^{k_1+\dots+k_p+\frac{p(p+1)}{2}}\ \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_{k_1}\dots\boldsymbol{a}_{k_p}}\ \boldsymbol{\sigma}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_r}_{\text{mimo } \boldsymbol{a}_{k_1}\dots\boldsymbol{a}_{k_p}}}\ . \qquad \square \end{aligned}$$

Důkaz:
První co si uvědomíme je, že znaménko v sčítancích na pravé straně odpovídá přesně znaménku permutace

$$\sigma:\ [1,\dots,r]\ \rightarrow\ [k_1,\dots,k_p,\underbrace{1,\dots,r}_{\text{mimo } k_1,\dots,k_p}]$$

Díky podmínce $k_1 < \dots < k_p$ se jedná o po částech uspořádanou permutaci, tj. permutaci, ve které je prvních p i zbývajících $r-p$ prvků uspořádaných. Obecná permutace se liší od po částech uspořádané permutace separátními permutacemi v prvních p a zbývajících $r-p$ prvcích. Ovšem díky antisymetrii forem $\boldsymbol{\omega}$ a $\boldsymbol{\sigma}$, permutace v prvních p indexech a ve zbývajícících $r-p$ indexech může pouze změnit znaménko součinu $\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{\sigma}$. Sumu přes uspořádané permutace indexů tedy můžeme uvolnit na sumu přes všechny permutace indexů s tím, že vezmeme v úvahu změnu znaménka. Samozřejmě, jednomu členu s uspořádanou permutací indexů přísluší $p!\,(r-p)!$ členů s libovolným prohozením prvních p a zbývajících $r-p$ indexů a tak tímto faktorem musíme uvolnění podmínky uspořádanosti kompenzovat:

$$\begin{aligned} &\sum_{1\leq k_1<\dots<k_p\leq r} (-1)^{k_1+\dots+k_p+\frac{p(p+1)}{2}}\ \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_{k_1}\dots\boldsymbol{a}_{k_p}}\ \boldsymbol{\sigma}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_r}_{\text{mimo } \boldsymbol{a}_{k_1}\dots\boldsymbol{a}_{k_p}}} \\ &\quad = \sum_{\substack{\text{po částech uspořádané}\\ \text{permutace } \sigma}} \operatorname{sign}\sigma\ \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_{\sigma_1}\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_p}}\ \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{a}_{\sigma_{p+1}}\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_r}} \\ &\quad = \frac{1}{p!\,(r-p)!} \sum_{\text{permutace } \sigma} \operatorname{sign}\sigma\ \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_{\sigma_1}\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_p}}\ \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{a}_{\sigma_{p+1}}\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_r}} \\ &\quad = \tfrac{r!}{p!(r-p)!}\ \boldsymbol{\omega}_{[\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}\ \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{a}_{p+1}\dots\boldsymbol{a}_r]} = \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p} \wedge \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{a}_{p+1}\dots\boldsymbol{a}_r}\ . \end{aligned}$$

V posledním řádku jsme již jen užili správnou normalizaci antisymetrizace a definici vnějšího součinu. ■

Dále dokážeme lemma V4.1
Důkaz: (Lemma V4.1)
Máme dokázat, že souřadnice vnější derivace p-formy $\boldsymbol{\omega}$ jsou

$$\mathrm{d}_{a_0}\omega_{a_1\dots a_p} = (p+1)\,\omega_{[a_1\dots a_p,a_0]}\ .$$

V rovnici (4.8) se sčítá přes uspořádané hodnoty souřadnicových indexů. Díky antisymetrii souřadnic $\omega_{a_1\dots a_p}$ a vnějšího součinu $\mathbf{d}x^{a_1}\wedge\dots\wedge\mathbf{d}x^{a_p}$ jsou členy s obecnou volbou indexů buď nulové nebo se liší od členů s uspořádaným pořadím indexů pouze permutací. Permutace indexů však tyto členy nezmění, jelikož se jedná o součiny dvou veličin antisymetrických v těchto indexech. V rovnici (4.8) tedy můžeme uvolnit podmínku na uspořádání sčítacích indexů a multiplikaci členů kompenzovat faktorem $1/p!$.

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{p!}\ \mathbf{d}\omega_{a_1\dots a_p}\wedge\mathbf{d}x^{a_1}\wedge\dots\wedge\mathbf{d}x^{a_p} \\ &= \frac{1}{p!}\ \omega_{[a_1\dots a_p,a_0]}\ \mathbf{d}x^{a_0}\wedge\mathbf{d}x^{a_1}\wedge\dots\wedge\mathbf{d}x^{a_p}\ . \end{aligned} \tag{4.9}$$

V druhém řádku jsme rozepsali gradient souřadnic pomocí parciálních derivací $\mathbf{d}\omega_{a_1\dots a_p} = \omega_{a_1\dots a_p,a_0}\,\mathbf{d}x^{a_0}$ a využili toho, že vnější součin je antisymetrický. Teď již zbývá pouze opět zúžit sumu na sčítání přes různé sčítance, tj. požadovat podmínku $a_0 < \dots < a_p$, a tuto redukci sčítanců kompenzovat faktorem $(p+1)!$:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = \sum_{a_0<\dots<a_1} (p+1)\,\omega_{[a_1\dots a_p,a_0]}\;\mathbf{d}x^{a_0}\wedge\mathbf{d}x^{a_1}\wedge\dots\wedge\mathbf{d}x^{a_p}\;.$$

Srovnáním s (4.6) je lemma dokázáno. ∎

Nyní se vrátíme k tvrzení z marginálie M4.5.

Lemma V4.7 (Zúžení vnější derivace)

Zúžení vnější derivace p-formy $\boldsymbol{\omega}$ s vektorovými poli $\boldsymbol{a}_0,\ \boldsymbol{a}_1,\ \dots,\boldsymbol{a}_p$ lze vyjádřit:

$$\begin{aligned}&\big(\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_0}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\dots\boldsymbol{n}_p}\big)\;\boldsymbol{a}_0^{\boldsymbol{n}_0}\;\boldsymbol{a}_1^{\boldsymbol{n}_1}\cdots\boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p}\\ &\quad=\sum_{0\le k\le p}(-1)^k\,\boldsymbol{a}_k^{\boldsymbol{n}_k}\;\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_k}\big(\underbrace{\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_0\dots\boldsymbol{n}_p}\;\boldsymbol{a}_0^{\boldsymbol{n}_0}\cdots\boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p}}_{\text{mimo }\boldsymbol{n}_k}\big)\\ &\qquad+\sum_{0\le k<l\le p}(-1)^{k+l}\,\big[\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_l\big]^{\boldsymbol{n}}\;\underbrace{\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_0\dots\boldsymbol{n}_p}\;\boldsymbol{a}_0^{\boldsymbol{n}_0}\cdots\boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p}}_{\text{mimo }\boldsymbol{n}_k,\ \boldsymbol{n}_l}\,.\end{aligned}$$

□

DŮKAZ:

Vyjdeme opět z rovnice (4.8) a použijeme vztah (4.3), kde za 1-formu vezmeme $\mathbf{d}\omega_{a_1\dots a_p}$. Dostaneme

$$\begin{aligned}&\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_0}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\dots\boldsymbol{n}_p}\\ &\quad=\sum_{a_1<\dots<a_p}\;\sum_{0\le k\le p}(-1)^k\;\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_k}\omega_{a_1\dots a_p}\underbrace{\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_0}x^{a_1}\wedge\dots\wedge\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_p}x^{a_p}}_{\text{mimo }\boldsymbol{n}_k}\\ &\quad=\sum_{0\le k\le p}(-1)^k\;\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_k}\omega_{a_1\dots a_p}\underbrace{\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_0}x^{a_1}\cdots\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_p}x^{a_p}}_{\text{mimo }\boldsymbol{n}_k}\\ &\quad=\sum_{0\le k\le p}(-1)^k\;\omega_{\underbrace{c_0\dots c_p}_{\text{mimo }c_k},c_k}\;\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_0}x^{c_0}\cdots\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_p}x^{c_p}\;.\end{aligned}$$

V třetím řádku jsme nahradili vnější součin tenzorovým ($\omega_{a_1\dots a_p}$ je antisymetrické) a odlišnou normalizaci vnějšího součinu jsme vykompenzovali uvolněním podmínky na uspořádání hodnot souřadnicových indexů. V posledním řádku jsme vyjádřili gradient souřadnic pomocí parciálních derivací $\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_k}\omega_{a_1\dots a_p} = \omega_{a_1\dots a_p,a_0}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_k}x^{a_0}$ a přejmenovali sčítací indexy $[a_0,a_1,\dots,a_p]\to[c_k,c_0,\dots,c_p]$.

Výsledný vztah zúžíme s $(p+1)$ vektory $\boldsymbol{a}_0,\dots,\boldsymbol{a}_p$ a použijeme pravidlo pro derivování součinu

$$\begin{aligned}&\big(\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_0}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\dots\boldsymbol{n}_p}\big)\,\boldsymbol{a}_0^{\boldsymbol{n}_0}\boldsymbol{a}_1^{\boldsymbol{n}_1}\cdots\boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p}\\ &\quad=\sum_{0\le k\le p}(-1)^k\,\omega_{\underbrace{c_0\dots c_p}_{\text{mimo }c_k},c_k}\;a_0^{c_0}\cdots a_p^{c_p}\\ &\quad=\sum_{0\le k,\le p}(-1)^k\,a_k^{c_k}\,\big(\underbrace{\omega_{c_0\dots c_p}\,a_0^{c_0}\cdots a_p^{c_p}}_{\text{mimo }c_k}\big)_{,c_k}\\ &\qquad-\sum_{\substack{0\le k,\,l\le p\\ l\ne k}}(-1)^k\,a_k^{c_k}\,(a_l^{c_l})_{,c_k}\;\;\omega_{\underbrace{c_0\dots c_p}_{\text{mimo }c_k}}\;\;\underbrace{a_0^{c_0}\cdots a_p^{c_p}}_{\text{mimo }a_k^{c_k},\,a_l^{c_l}}\;.\end{aligned}$$

V druhé sumě přejmenujeme sčítací indexy $c_k\to m$, $c_l\to n$ a prokomutujeme index n v souřadnici $\omega_{c_0\dots c_p}$ na první místo. To přispěje pro $l<k$

faktorem $(-1)^{(l+1)}$ a pro $l > k$ faktorem $(-1)^l$ (index c_k chybí!). Ve sčítancích s $l < k$ přejmenujeme $l \leftrightarrow k$ a tím převedeme sumu na součet přes uspořádané indexy $k < l$.

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{d}_{n_0} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\ldots\boldsymbol{n}_p} \boldsymbol{a}_0^{\boldsymbol{n}_0} \boldsymbol{a}_1^{\boldsymbol{n}_1} \cdots \boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p} \\
&\quad = \sum_{0\le k,\le p} (-1)^k\, a_k^{c_k} \big(\underbrace{\omega_{c_0\ldots c_p}\, a_0^{c_0} \cdots a_p^{c_p}}_{\text{mimo } c_k}\big)_{,c_k} \\
&\qquad - \sum_{0\le k<l\le p} (-1)^{k+l} \Big(a_k^m\, (a_l^n)_{,m} - a_l^m\, (a_k^n)_{,m}\Big)\, \underbrace{\omega_{nc_0\ldots c_p}\, a_0^{c_0} \cdots a_p^{c_p}}_{\text{mimo } c_k,\; c_l}\,.
\end{aligned}
$$

Ovšem závorka v druhé sumě je přesně n-tá souřadnice Lieovy závorky $[\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_l]$. Obdrželi jsme tak tvrzení lemmatu v souřadnicovém zápisu. ∎

Nakonec dokážeme Cartanovu identitu V4.3. V textu jsme uvedli důkaz pro $p = 1$. Pro formy vyššího stupně probíhá důkaz analogicky, pouze s využitím obecného tvrzení z marginálie M4.5 – tj. s použitím právě dokázaného lemmatu V4.7.

Důkaz: (Věta V4.3)
Aplikací Leibnizova pravidla pro Lieovu derivaci zúžení p-formy $\boldsymbol{\omega}$ s vektorovými poli $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ dostaneme

$$
\begin{aligned}
&\big(\pounds_{\boldsymbol{a}_0} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\ldots\boldsymbol{n}_p}\big)\, \boldsymbol{a}_1^{\boldsymbol{n}_1} \ldots \boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p} \\
&\quad = \boldsymbol{a}_0^{\boldsymbol{n}_0}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_0} \big(\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\ldots\boldsymbol{n}_p} \boldsymbol{a}_1^{\boldsymbol{n}_1} \ldots \boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p}\big) \\
&\qquad - \sum_{1\le k\le p} (-1)^{k+1} \big(\pounds_{\boldsymbol{a}_0} \boldsymbol{a}_k^{\boldsymbol{n}}\big)\, \underbrace{\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_1\ldots\boldsymbol{n}_p} \boldsymbol{a}_1^{\boldsymbol{n}_1} \ldots \boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p}}_{\text{mimo } \boldsymbol{n}_k}\,.
\end{aligned}
$$

Znaménko $(-1)^{k+1}$ vzniklo prokomutováním indexu $\boldsymbol{n}$ (přejmenovaný index $\boldsymbol{n}_k$) na první pozici. Nyní použijeme lemma V4.7 pro formu $\boldsymbol{\omega}$ a lemma V3.7 k převedení Lieovy derivace na Lieovu závorku:

$$
\begin{aligned}
&\big(\pounds_{\boldsymbol{a}_0} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\ldots\boldsymbol{n}_p}\big)\, \boldsymbol{a}_1^{\boldsymbol{n}_1} \ldots \boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p} \\
&\quad = \big(\boldsymbol{a}_0^{\boldsymbol{n}_0}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_0} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\ldots\boldsymbol{n}_p}\big)\, \boldsymbol{a}_1^{\boldsymbol{n}_1} \ldots \boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p} \\
&\qquad - \sum_{1\le k\le p} (-1)^k \boldsymbol{a}_k^{\boldsymbol{n}_k}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_k} \big(\underbrace{\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_0\ldots\boldsymbol{n}_p} \boldsymbol{a}_0^{\boldsymbol{n}_0} \ldots \boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p}}_{\text{mimo } \boldsymbol{n}_k}\big) \\
&\qquad - \sum_{0\le l<k\le p} (-1)^{l+k} \big[\boldsymbol{a}_l, \boldsymbol{a}_k\big]^{\boldsymbol{n}}\, \underbrace{\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_0\ldots\boldsymbol{n}_p} \boldsymbol{a}_0^{\boldsymbol{n}_0} \ldots \boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p}}_{\text{mimo } \boldsymbol{n}_l,\; \boldsymbol{n}_k} \\
&\qquad + \sum_{1\le k\le p} (-1)^k \big[\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_k\big]^{\boldsymbol{n}}\, \underbrace{\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_1\ldots\boldsymbol{n}_p} \boldsymbol{a}_1^{\boldsymbol{n}_1} \ldots \boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p}}_{\text{mimo } \boldsymbol{n}_k}\,.
\end{aligned}
$$

Poslední řádek se vyruší s členy $l = 0$ z předchozího řádku. Zbývající členy na druhém a třetím řádku lze identifikovat jako členy z pravé strany lemmatu V4.7 aplikovaného na $(p-1)$-formu $\boldsymbol{a}_0^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_2\ldots\boldsymbol{n}_p}$. Dostaneme tak

$$
\begin{aligned}
&\big(\pounds_{\boldsymbol{a}_0} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\ldots\boldsymbol{n}_p}\big)\, \boldsymbol{a}_1^{\boldsymbol{n}_1} \ldots \boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p} \\
&\quad = \Big(\boldsymbol{a}_0^{\boldsymbol{n}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\ldots\boldsymbol{n}_p} + \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_1} \big(\boldsymbol{a}_0^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_2\ldots\boldsymbol{n}_p}\big)\Big)\, \boldsymbol{a}_1^{\boldsymbol{n}_1} \ldots \boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p}\,.
\end{aligned}
$$

Vektorová pole $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ mohou být libovolná a můžeme je tedy 'zkrátit'. Tím dostáváme Cartanovu identitu pro obecnou p-formu $\boldsymbol{\omega}$. ∎