Kapitola 3

Diffeomorfismy variet a Lieova derivace

3.1 Zobrazení mezi varietami

Nejdříve uvedem několik elementárních definic zavádějících pojem zobrazení mezi varietami.

Definice D3.1 (Zobrazení variet)

ϕ nazýváme hladké zobrazení variety M dimenze m na varietu N dimenze n, pokud pro každou mapu $(U,[x^i])$ na M a mapu $(V,[y^j])$ na N je složené zobrazení

$$[\tilde{\phi}^j] = [y^j] \circ \phi \circ [x^i]^{-1} \; : \; \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \; ,$$

definované na oblasti $[x^j](U \cap \phi^{-1}(V))$, hladké ve smyslu normální hladkosti zobrazení z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$. Těchto n reálných funkcí $\tilde{\phi}^j(x^i)$ od m reálných proměnných nazýváme souřadnicové vyjádření zobrazení ϕ. ◦

Poznámka

Připomeňme, že pod $[x^i]$ míníme zobrazení $M \to \mathbb{R}^m$, tj. uspořádanou m-tici souřadnicových funkcí x^i. Pak $[x^i]^{-1}$ je inverzní zobrazení z oblasti $[x^i](U)$ na $U \subset M$. Definiční obor $[x^i](U \cap \phi^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^m$ funkcí $\tilde{\phi}^j$ je vybrán tak, aby $y^j(\phi([x^i]^{-1}))$ mělo smysl.

Definice D3.2 (Diffeomorfismy)

Hladké vzájemně jednoznačné zobrazení, jehož inverze je také hladká, nazýváme *diffeomorfismus*. Diffeomorfismy variety M na sebe s operací skládání tvoří grupu, kterou označíme $\mathrm{Diff}\, M$. ◦

Velmi často budeme operovat ne s jedním diffeomorfismem, ale se sadou diffeomorfismů parametrizovanou reálným parametrem tvořící grupu.

Definice D3.3 (Tok – jednoparametrická grupa diffeomorfismů)

ϕ_τ nazýváme *jednoparametrickou grupou diffeomorfismů* či také *tok* na varietě M s parametry z $\mathbb{R}$, pokud pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí

$$\phi_\alpha \in \mathrm{Diff}\, M \; , \qquad \phi_{\alpha+\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta \; .$$

Zřejmě $\phi_0 = \mathrm{id}$ a $\phi_{-\alpha} = {\phi_\alpha}^{-1}$. ◦

Libovolný bod $x \in M$ se pod vlivem toku ϕ_τ 'pohybuje' po varietě (tj., při měnícím se τ se zobrazuje se na $\phi_\tau x$), a to po orbitě, která nezávisí na τ. Jinými slovy, body x a $y = \phi_\alpha x$ probíhají stejnou orbitu.

Posun o obecnou hodnotu parametru lze poskládat z menších posunů. Tok tak lze charakterizovat diferenciálně.

Definice D3.4 (Generátor toku)

Vektorové pole $\boldsymbol{a}$ se nazývá *generátorem* toku ϕ_τ, pokud

$$\boldsymbol{a}(x) = \frac{\boldsymbol{D}}{d\tau}\phi_\tau x\Big|_{\tau=0} \ .$$

Naopak, jednoparametrickou grupu diffeomorfismů, jejíž generátor je pole $\boldsymbol{a}$ nazveme $\operatorname{diff}_\tau[\boldsymbol{a}]$. ∘

Tok určuje svůj generátor jednoznačně. Ale je tomu i naopak. Z vět o existenci řešení obyčejných diferenciálních rovnic plyne, že ke každému vektorovému poli existuje jednoparametrická grupa diffeomorfismů s tímto generátorem.

3.2 Zobrazení indukovaná na tečnou strukturu

Zobrazení z variety M do N indukuje zobrazení funkcí na těchto varietách a zobrazení tečných a kotečných prostorů nazývaná *push-forward* (‘*postrč vpřed*’) a *pull-back* (‘*stáhni zpět*’). Hlavní rozdíl mezi zobrazeními push-forward a pull-back je, že působí mezi varietami opačným směrem.

Začněme s indukovaným zobrazením funkcí

Definice D3.5 (Indukované zobrazení funkcí)

Nechť ϕ je hladké zobrazení M do N. Pak definujeme *indukované zobrazení pull-back*

$$\phi^* : \mathfrak{F}N \to \mathfrak{F}M \ , \quad \tilde{f} \to f = \phi^*\tilde{f}$$

požadavkem

$$(\phi^*\tilde{f})(x) = \tilde{f}(\phi x) \ , \qquad \text{tj.} \quad \phi^*\tilde{f} = \tilde{f}\circ\phi \ .$$

Pokud je ϕ diffeomorfismus variet M a N, můžeme zavést *indukované zobrazení push-forward*

$$\phi_* : \mathfrak{F}M \to \mathfrak{F}N \ , \quad f \to \tilde{f} = \phi_* f$$

jako

$$\phi_* f = (\phi^{-1})^* f = f\circ\phi^{-1} \ .$$

∘

Slovy: transformovaná (‘push-forwardovaná’) funkce nabývá v transformovaných bodech stejných hodnot jako původní funkce v bodech původních.

Pro tečné vektory je přirozené definovat zobrazení ϕ_* působící stejným směrem jako ϕ

Definice D3.6 (Indukované zobrazení push-forward)

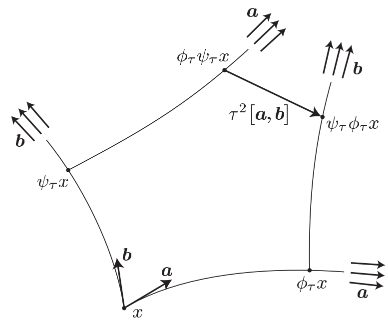
Nechť $\phi : M \to N$ je hladké zobrazení. Na tečných vektorech definujeme *indukované zobrazení push-forward*

$$\phi_* : \boldsymbol{T}_x M \to \boldsymbol{T}_{\phi x} N \ , \quad \boldsymbol{a} \to \phi_*\boldsymbol{a}$$

vztahem

$$\phi_*\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{D}\phi(z(\alpha))}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} \ ,$$

M3.1 Význam Lieových závorek



Pomocí toku můžeme nastínit geometrický význam Lieových závorek zavedených v předchozí kapitole v definici D2.3. Lieova závorka $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ dvou vektorových polí $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ vystihuje nekomutativitu toků generovanými těmito poli. Nechť $\phi_\alpha = \operatorname{diff}_\alpha[\boldsymbol{a}]$ je tok generovaný polem $\boldsymbol{a}$ a $\psi_\beta = \operatorname{diff}_\beta[\boldsymbol{b}]$ tok pole $\boldsymbol{b}$. Pokud posuneme bod x nejdříve podle $\boldsymbol{a}$ do bodu $\phi_\tau x$ a poté podle $\boldsymbol{b}$ do bodu $\psi_\tau\phi_\tau x$, dostaneme se obecně do jiného bodu než pokud posun provedeme v opačném pořadí. Rozdíl mezi těmito body charakterizuje právě Lieova závorka. Heuristicky zapsáno, platí

$$\psi_\tau\phi_\tau x - \phi_\tau\psi_\tau x \approx \tau^2\big[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\big] \ .$$

Nedefinovanému rozdílu dvou bodů se lze vyhnout, pokud vyčíslíme rozdíl hodnot skalární funkce f v těchto bodech:

$$f\big(\psi_\tau\phi_\tau x\big) - f\big(\phi_\tau\psi_\tau x\big) \approx \tau^2\big[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\big]^{\boldsymbol{n}}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} f(x) \ .$$

Důkaz je podán v dodatku 3.A.

Lieova závorka $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ tak charakterizuje, jak moc se ‘neuzavírají’ orbity dvou vektorových polí. Pokud by se ‘uzavřely’, bylo by možno definovat dvě souřadnice číslující posun ve směru obou polí – nezávisle na pořadí posunu.

Opačně, máme-li souřadnice $\{x^i\}$, souřadnicová vektorová pole $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial}x^i$ se ‘uzavírají’ což se projeví i faktem, že vzájemné Lieovy závorky vymizí

$$\Big[\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^i},\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^j}\Big] = 0$$

– viz (2.2).

Je přirozené si položit otázku: Pokud máme zadaná vektorová pole $\{\boldsymbol{a}_i\}$, $i = 1,\dots,d$, jsou podmínky $[\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j] = 0$ dostatečné k tomu, aby tyto pole byla souřadnicová? Odpověď je alespoň lokálně *ano*. Tato otázka souvisí s tzv. Frobeniovou větou, jejíž diskuse přibude časem do této kapitoly.

kde $z(\tau)$ je libovolná parametrizovaná křivka s tečným vektorem $\boldsymbol{a}$ vedoucí z bodu x. ◦

Jinými slovy, indukované zobrazení převádí tečné vektory ke křivce na tečné vektory k přenesené křivce. Nezávislost definice na volbě křivky plyne z hladkosti zobrazení ϕ.

Push-forward je lineární zobrazení (viz lemma V3.3 níže) a to nám umožňuje definovat duální zobrazení na 1-formách působící opačným směrem:

Definice D3.7 (Indukované zobrazení pull-back)

Nechť $\phi : M \to N$ je hladké zobrazení. Na tečných kovektorech je definováno *indukované zobrazení pull-back*

$$\phi^* : \boldsymbol{T}^*_{\phi x} N \to \boldsymbol{T}^*_x M \ , \quad \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \to \phi^* \tilde{\boldsymbol{\alpha}}$$

požadavkem, že pro libovolný vektor $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{T}_x M$ platí

$$(\phi^* \tilde{\boldsymbol{\alpha}}) \cdot \boldsymbol{a} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \cdot (\phi_* \boldsymbol{a}) \ . \qquad \circ$$

M3.2 Notace pro zúžení
Připomeňme ještě jednou notaci (1.3) a (1.4) pro zúžení (kontrakci). Zúžení 1-formy a vektoru z definice D3.7 můžeme též zapsat

$$\big\langle (\phi^* \tilde{\boldsymbol{\alpha}}), \boldsymbol{a} \big\rangle = \big\langle \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, (\phi_* \boldsymbol{a}) \big\rangle$$

či pomocí abstraktních indexů

$$(\phi^* \tilde{\boldsymbol{\alpha}})_{\boldsymbol{n}}\, \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{n}}\, (\phi_* \boldsymbol{a})^{\boldsymbol{n}} \ .$$

Zdůrazněme, že zúžení na levé straně probíhá v bodě x, zúžení napravo v bodě ϕx. Jelikož je takto dána akce formy $\phi^* \tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ na libovolný vektor v bodě x, je tato forma dána jednoznačně.

Indukovaná zobrazení jsou záměnná s akcí „derivování ve směru”, případně s operací gradient.

Lemma V3.1 (Indukovaná zobrazení a gradient)

Push-forward komutuje s derivováním ve směru

$$(\phi_* \boldsymbol{a})\big[\tilde{f}\big] = \boldsymbol{a}[\phi^* \tilde{f}] \ , \qquad \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{T}_x M \ , \quad \tilde{f} \in \mathfrak{F} N \ ,$$

neboli, pull-back komutuje s gradientem

$$\phi^* \Big(\mathbf{d} \tilde{f} \big|_{\phi x} \Big) = \mathbf{d}(\phi^* \tilde{f}) \big|_x \ , \qquad \tilde{f} \in \mathfrak{F} N \ . \qquad \square$$

Toto by mohla být též alternativní definice zobrazení push-forward preferující náhled na vektor jako na diferenciální operátor místo chápání vektoru jako tečného směru ke křivce. Platnost lemmatu je zřejmá z definic indukovaných zobrazení.

Podobně, komutace push-forwardu s derivací ve směru zaručuje komutaci push-forwardu a Lieových závorek

Lemma V3.2 (Indukovaná zobrazení a Lieovy závorky)

Push-forward komutuje s Liovou závorkou vektorových polí

$$\phi_* \big[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \big] = \big[\phi_* \boldsymbol{a}, \phi_* \boldsymbol{b} \big] \ . \qquad \square$$

Ještě nám zbývá dokázat linearitu push-forwardu. Zformulujeme ji rovnou pro obě indukovaná zobrazení

Lemma V3.3 (Linearita indukovaného zobrazení)

Push-forward ϕ_* a pull-back ϕ^* jsou lineární zobrazení na tečném, případně kotečném prostoru. □

Důkaz:

Linerita pull-backu plyne z linerity push-forwardu a linearity zúžení.

Díky lemmatu V3.1 máme pro libovolnou funkci $\tilde{f} \in \mathfrak{F} N$

$$\begin{aligned} \big(\phi_*(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\big)[\tilde{f}] &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})[\phi^* \tilde{f}] = \boldsymbol{a}[\phi^* \tilde{f}] + \boldsymbol{b}[\phi^* \tilde{f}] \\ &= (\phi_* \boldsymbol{a})[\tilde{f}] + (\phi_* \boldsymbol{b})[\tilde{f}] = \big((\phi_* \boldsymbol{a}) + (\phi_* \boldsymbol{b})\big)[\tilde{f}] \ . \end{aligned}$$

Tečný vektor je však determinován svým působením na funkcích – viz kapitolu 2 – a dostáváme tak linearitu $\phi_*(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \phi_* \boldsymbol{a} + \phi_* \boldsymbol{b}$. ■

Díky linearitě můžeme indukovaná zobrazení reprezentovat tenzorově, pomocí *diferenciálu zobrazení*. Jelikož se ale jedná o lineární zobrazení mezi dvěmi obecně různými vektorovými prostory, diferenciál zobrazení není obyčejným tenzorem, ale patří do tenzorového součinu dvou různých tečných prostorů.

Definice D3.8 (Diferenciál zobrazení)

Nechť $\phi : M \to N$ je hladké zobrazení. Pak *diferenciál zobrazení*

$$\boldsymbol{D}\phi|_x \in \boldsymbol{T}^*_x M \otimes \boldsymbol{T}_{\phi x} N$$

definujeme vztahem

$$\big(\phi_* \boldsymbol{a}\big)^{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{D}^{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{a}}\phi|_x \; \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{a}} \;, \qquad \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{T}_x M \;.$$

Pomocí diferenciálu lze samozřejmě vyjádřit i pull-back formy:

$$\big(\phi^* \tilde{\boldsymbol{\alpha}}\big)_{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{D}^{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{a}}\phi|_x \; \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{z}} \;, \qquad \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \in \boldsymbol{T}^*_{\phi x} N \;.$$ ◦

Lehce nahlédneme, že diferenciál lze zapsat pomocí souřadnicového vyjádření $\tilde{\phi}^j(x^i)$ zobrazení ϕ vzhledem k souřadnicím x^i na $U \subset M$ a souřadnicím y^j na $V \subset N$:

$$\boldsymbol{D}\phi = \frac{\partial \tilde{\phi}^j}{\partial x^i} \; \mathbf{d}x^i \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} y^j} \;. \tag{3.1}$$

Cvičení C3.1

Lehce nahlédněte! ✓

Poznámka

Souřadnicové vyjádření (3.1) není zcela explicitní, implicitně se zde předpokládá dosazení ‘konzistentních argumentů’. Důsledně bychom měli psát

$$\boldsymbol{D}\phi|_z = \frac{\partial \tilde{\phi}^j}{\partial x^i}\bigg|_{x^i(z)} \mathbf{d}x^i|_z \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} y^j}\bigg|_{\phi z} \;.$$

Příklad P3.1 (Diferenciál na reálných číslech)

Příkladem diferenciálu jsou i gradient a tečný vektor. Pokud ztotožníme tečné vektory a 1-formy na varietě reálných čísel $\mathbb{R}$ s čísly samotnými, pak gradient $\mathbf{d}f$ je diferenciál zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$. Obdobně tečný vektor $\boldsymbol{D}z/d\tau$ parametrizované křivky $z(\tau)$ je diferenciál zobrazení $z : \mathbb{R} \to M$.

M3.3 Jednodimenzionální diferenciál
Pokud bychom nechtěli provádět ztotožnění předpokládané v příkladu P3.1, můžeme chápat τ jako souřadnici na jednodimenzionální varietě N a reálnou funkci $\tilde{f}$ na M chápat jako souřadnicovou hodnotu zobrazení $f : M \to N$, tj. $\tilde{f}(x) = \tau(f(x))$. Pak diferenciál f a gradient $\tilde{f}$ souvisí

$$\boldsymbol{D}f = \mathbf{d}\tilde{f}\,\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\tau} \;.$$

Parametrizovaná křivka $\tilde{z}(\tau)$ definuje zobrazení $z : N \to M$ a jeho diferenciál je dán tečným vektorem ke křivce

$$\boldsymbol{D}z = \mathbf{d}\tau\,\frac{\boldsymbol{D}\tilde{z}}{d\tau} \;.$$

Běžně mezi $\tilde{f}$ a f, případně $\tilde{z}$ a z, nerozlišujeme.

Pro diferenciál platí obvyklý vzorec pro derivování složené funkce:

Lemma V3.4

Nechť $\phi : M_1 \to M_2$ a $\psi : M_2 \to M_3$ jsou hladká zobrazení. Pro diferenciál složeného zobrazení $\phi \circ \psi$ platí

$$\boldsymbol{D}(\phi \circ \psi) = \big[(\boldsymbol{D}\phi) \circ \psi\big] \cdot \boldsymbol{D}\psi \;.$$

Tečka zde naznačuje zúžení v tečných prostorech variety M_2. Zapsáno pomocí indexů:

$$\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{a}}(\phi \circ \psi)\big|_x = \boldsymbol{D}^{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{n}}\phi\big|_{\psi x}\; \boldsymbol{D}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{a}}\psi\big|_x \;.$$ □

Zobrazení push-forward lze zobecnit na zobrazení tečných tenzorů typu $(p,0)$ a zobrazení pull-back na tenzory typu $(0,p)$ požadavkem, že komutují s tenzorovým součinem. Máme tedy definováno

$$\phi_* \;:\; \boldsymbol{T}_x{}^p_0 M \to \boldsymbol{T}_{\phi x}{}^p_0 N \;, \qquad \phi^* \;:\; \boldsymbol{T}_{\phi x}{}^0_p N \to \boldsymbol{T}_x{}^0_p M \;. \tag{3.2}$$

Vzhledem k tomu, že push-forward a pull-back působí opačnými směry, nemůžeme je pro obecné zobrazení zkombinovat a definovat indukované zobrazení pro tenzory smíšeného typu.

Situace je ale odlišná pokud je ϕ diffeomorfismus. Pak můžeme dodefinovat push-forward i pro formy a pull-back pro vektory požadavkem, aby si tyto dvě zobrazení odpovídala při záměně ϕ na ϕ^{-1}.

Definice D3.9 (Indukované zobrazení diffeomorfismu)
Nechť $\phi : M \to N$ je diffeomorfismus. Potom definujeme

$$\phi_* : \boldsymbol{T}^*_x M \to \boldsymbol{T}^*_{\phi x} N \,, \qquad \phi_* = (\phi^{-1})^* \,,$$
$$\phi^* : \boldsymbol{T}_{\phi x} N \to \boldsymbol{T}_x M \,, \qquad \phi^* = (\phi^{-1})_* \,.$$

Na tenzory libovolného typu tyto zobrazení rozšíříme požadavkem komutace s tenzorovým násobením. ∘

Doposud jsme transformovali tenzorové objekty lokalizované v jednotlivých bodech. Obecně vzor a obraz těchto zobrazení neleží ve stejném tenzorovém prostoru – jedná se tenzory v různých bodech (v principu) různých variet. V případě diffeomorfismu variety na sebe je ale možné definovat zobrazení mezi tenzorovými poli, které převádí pole na pole *stejného typu*. Tenzorové pole lze chápat jako funkci nabývající hodnot v tečných prostorech. Při transformaci pole použijeme stejný princip jako u skalárních funkcí (definice D3.5), musíme ale navíc transformovat i funkční hodnotu.

Definice D3.10 (Indukované zobrazení tenzorových polí)
Nechť $\phi \in \mathrm{Diff}\, M$. *Indukované zobrazení*

$$\phi_* : \mathfrak{T}^k_l M \to \mathfrak{T}^k_l M \,, \quad \boldsymbol{A} \to \phi_* \boldsymbol{A}$$

definujeme

$$(\phi_* \boldsymbol{A})(x) = \phi_* \big(\boldsymbol{A}(\phi^{-1} x)\big) \,.$$ ∘

Indukované zobrazení na tenzorových polích je zřejmě lineární (i vzhledem k násobení funkcí) a komutuje s tenzorovým součinem a zúžením. Pomocí diferenciálu $\boldsymbol{D}\phi$ lze transformované pole zapsat následovně:

$$(\phi_* \boldsymbol{A})^{\boldsymbol{a}\dots}_{\boldsymbol{b}\dots} = \boldsymbol{D}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{m}} \phi \circ \phi^{-1} \dots \; \boldsymbol{D}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{b}} \phi^{-1} \dots \; \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{m}\dots}_{\boldsymbol{n}\dots} \circ \phi^{-1} \,. \tag{3.3}$$

Poznámka
Poznamenejme, že trochu 'přeplácaný' shluk symbolů $\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{m}} \phi \circ \phi^{-1}$ (vyčíslený v bodě x) značí složení $\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{m}} \phi$ a ϕ^{-1}, tj. 'oindexovaný' diferenciál $\boldsymbol{D}\phi$ vyčíslený v bodě $\phi^{-1} x$. Obdobně je nutno číst $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{m}\dots}_{\boldsymbol{n}\dots} \circ \phi^{-1}$. Při běžném užívání se většinou inverzní zobrazení ϕ^{-1} v argumentech nepíše a předpokládá se implicitně, na základě kontextu.

3.3 Lieova derivace

Doposud jsme zavedli pouze jeden způsob derivování 'polí' na varietě – derivování skalární funkce ve směru daného vektoru (a samozřejmě s tímto související gradient funkce). Bohužel, tento koncept nelze jednoduše zobecnit na složitější objekty – na tenzorová pole. Na varietě neumíme odčítat tenzory v různých bodech a nemůžeme tak přímočaře zavést 'derivaci ve směru' tenzorového pole $\boldsymbol{A}(x)$ analogicky definici D2.2:

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \Big(\boldsymbol{A}\big(z(\tau)\big) - \boldsymbol{A}\big(z(0)\big) \Big) \,. \tag{3.4}$$

Aby takováto definice měla smysl, musíme nějakým způsobem 'přenést' tenzory $\boldsymbol{A}\big(z(\tau)\big)$ a $\boldsymbol{A}\big(z(0)\big)$ do stejného bodu. V této kapitole jsme se ale naučili tenzory přenášet – totiž pomocí indukovaného zobrazení toku.

M3.4 Jak a co umíme doposud derivovat?
Vedle gradientu a derivování funkce ve směru jsme se setkali ještě s dvěma operacemi, které jsou úzce spojené s derivováním.
Za prvé, Lieovy závorky mají charakter derivace v obou svých argumentech – splňují pravidlo pro derivování součinu funkce a vektorového pole a 'součinu' dvou vektorů (kde 'součin' vektorů je míněna jejich Lieova závorka).
Za druhé, diferenciál zobrazení zavedený v předchozí sekci má též charakter derivování. Ale jelikož se v tomto případě derivuje zobrazení mezi dvěma varietami a výsledek je smíšený tenzor tečný k těmto dvěma varieatám„ nejedná se zde o derivaci obyčejné 'polní veličiny'.

Pokud máme na varietě zadaný tok (definice D3.3), je přirozené se ptát jak se mění tenzorové pole při posunutí podél tohoto toku. Tok nám za prvé určuje směr, ve kterém se posuneme ze zvoleného bodu. Ale nejen to. Tok také určuje, jak se posouvají všechny body v okolí tohoto bodu a tím i určuje jak se posouvají objekty z tečných prostorů. Tečné prostory v různých bodech totiž můžeme identifikovat pomocí push-forwardu indukovaného tokem. Intuitivně to znamená, že pomocí toku 'přenášíme' i 'přístroje' (přesně řečeno: prvky báze), se kterými 'měříme' či 'popisujeme' objekty v tečných prostorech. Tj. tenzor prohlásíme za 'stejný', pokud má stejné souřadnice vzhledem k přenesené bázi. Což je ekvivalentní tomu, že je přenesen pomocí zadaného toku.

Jelikož nás hlavně zajímá změna při malých posunutí (tj. derivace pole), tak je přirozené zadat tok pomocí jeho generátoru – pomocí vektorového pole určujícího 'směr' toku. Derivace měřící *změnu* tenzorového pole při posunu podél takto zadaného toku se nazývá *Lieova derivace*.

Definice D3.11 (Lieova derivace)

Nechť $\boldsymbol{A}$ je tenzorové pole, $\boldsymbol{v}$ vektorové pole definovaná na okolí bodu x a nechť $\phi_\tau = \mathrm{diff}_\tau[\boldsymbol{v}]$ je tok (jednoparametrická grupa difeomorfismů) s generátorem $\boldsymbol{v}$. *Lieova derivace* $\pounds_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{A}$ pole $\boldsymbol{A}$ podél vektorového pole $\boldsymbol{v}$ je definována:

$$\pounds_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{A}\big|_x = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\Big(\phi_{\tau *}^{-1}\,\boldsymbol{A}(\phi_\tau x) - \boldsymbol{A}(x)\Big)\ .$$

Při použití tenzorových indexů budeme psát $\big(\pounds_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{A}\big)^{\boldsymbol{b}\dots}_{\boldsymbol{c}\dots}$ nebo prostě $\pounds_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{b}\dots}_{\boldsymbol{c}\dots}$. Souřadnice výsledku Lieova derivovaní zapíšeme $\big(\pounds_{\boldsymbol{a}}A\big)^{b\dots}_{c\dots}$ a v tomto případě závorky nebudeme vynechávat. ◦

POZNÁMKA

Výraz bez závorek $\pounds_{\boldsymbol{v}}A^{b\dots}_{c\dots}$ si ponecháme pro naznačení derivování souřadnic $A^{b\dots}_{c\dots}$ tenzorového pole. Jak hned uvidíme, to je rovno $\boldsymbol{a}[A^{b\dots}_{c\dots}]$.

Použitím definice D3.10 indukovaného zobrazení polí a faktu, že $\phi_\tau^{-1} = \phi_{-\tau}$ můžeme Lieovu derivaci též přepsat v řeči polí:

$$\pounds_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{A} = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\Big(\phi_{\tau *}^{-1}\,\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\Big) = -\frac{d}{d\tau}\left(\phi_{\tau *}\,\boldsymbol{A}\right)\Big|_{\tau=0}\ . \tag{3.5}$$

Vidíme, že se zde využívá faktu, že indukované zobrazení $\phi_{\tau *}$ převádí tenzorová pole na pole stejného typu – ze stejného lineárního prostoru $\mathfrak{T}M$. Derivace na pravé straně (3.5) má tak smysl.

Zdůrazněme ještě jednou, že Lieova derivace je definována podél *vektorového pole* – nestačí zadat pouze *směr* (jeden vektor), ve kterém chceme derivovat. Musíme zadat navíc tok, který nám umožní přenášet tenzory z bodu do bodu – a k tomu potřebujeme vektorové pole v celém okolí zkoumaného bodu.

Lieova derivace má obvyklé vlastnosti derivací:

Věta V3.5 (Lieova derivace)

Lieova derivace podél $\boldsymbol{a} \in \mathfrak{T}M$ je lineární

$$\pounds_{\boldsymbol{a}}\big(\boldsymbol{A} + r\boldsymbol{B}\big) = \pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{A} + r\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{B}\ , \tag{i}$$

splňuje pravidlo pro derivování součinu

$$\pounds_{\boldsymbol{a}}\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\big) = \big(\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{A}\big)\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\,\big(\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{B}\big) \tag{ii}$$

M3.5 Lieova derivace a symetrie

Lieova derivace hraje důležitou roli hlavně při zkoumání symetrií. Z jejího zavedení je zřejmé, že jakákoli kvantita popsaná tenzorovým polem $\boldsymbol{A}$ je neměnná při posunu podél toku ϕ_τ, pokud její Lieova derivace $\pounds_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{A}$ podle generátoru toku $\boldsymbol{v}$ vymizí. V takovém případě říkáme, že tok ϕ_τ je symetrií pole $\boldsymbol{A}$.

Pro skalární funkce tato podmínka znamená, že funkce musí být konstantní podél orbit toku. Složitější tenzorová pole obecně nemají, žádnou symetrii. Podmínka existence symetrie může tak výrazně zúžit výběr zkoumaného tenzorového pole.

V kapitole 6, oddíle 6.5 se budeme zabývat symetriemi metriky. Generátorům těchto symetrií se říká *Killingovy vektory*. Symetrie lorentzovských metrik jsou velmi důležité v obecné teorii relativity a to jak při interpretaci prostoročasových geometrií, tak při samotném hledání řešení Einsteinových gravitačních rovnic. Je známo jen velmi málo přesných řešení těchto rovnic, která by neměla žádnou symetrii.

Symetrie hrají podstatnou roli také v teorii kalibračních polí (zde se jedná o symetrie na jistém fibrovaném bundlu vnitřních stupňů volnosti).

Lieova derivace se dále využívá např. v geometrické formulaci teoretické mechaniky, kde se pomocí ní zapisují Lagrangeovy rovnice či identifikují kanonické transformace.

a na funkcích působí jako obyčejná derivace ve směru

$$\pounds_{\boldsymbol{a}} f = \boldsymbol{a}[f] = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} f\ . \tag{iii}$$

Zde $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou libovolná tenzorová pole, f skalární funkce a $r \in \mathbb{R}$.□

DŮKAZ:
Tyto vlastnosti přímo plynou z vlastností derivace na pravé straně (3.5).■

Lieova derivace komutuje s gradientem

Věta V3.6 (Lieova derivace a gradient)

Pro $\boldsymbol{a} \in \mathfrak{T}M$ a $f \in \mathfrak{F}M$ platí

$$\pounds_{\boldsymbol{a}}\, \mathbf{d} f = \mathbf{d} \pounds_{\boldsymbol{a}} f$$ □

DŮKAZ:
Jedná se o diferenciální vyjádření lemmatu V3.1. Pokud zderivujeme podle τ vztah $\phi_{\tau *}\mathbf{d}f = \mathbf{d}\,\phi_{\tau *}f$, kde $\phi_\tau = \mathrm{diff}_\tau[\boldsymbol{a}]$ je tok s generátorem $\boldsymbol{a}$, dostaneme dokazované tvrzení. ■

Lieova derivace vektorového pole vede na operaci, kterou již známe – na Lieovu závorku:

Věta V3.7 (Lieova derivace vektoru)

Pro dvě vektorová pole $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ platí

$$\pounds_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\ .$$ □

DŮKAZ:
Zúžíme $\pounds_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b}$ s gradientem libovolné funkce a s použitím vět V3.5, V3.6 a definice Lieovy závorky D2.3 dostaneme

$$\begin{aligned}(\pounds_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} f &= \pounds_{\boldsymbol{a}} \big(\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} f\big) - \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}} \pounds_{\boldsymbol{a}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} f \\ &= \pounds_{\boldsymbol{a}} \big(\boldsymbol{b}[f]\big) - \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} \pounds_{\boldsymbol{a}} f = \boldsymbol{a}\big[\boldsymbol{b}[f]\big] - \boldsymbol{b}\big[\boldsymbol{a}[f]\big] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]^{\boldsymbol{n}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} f\ .\end{aligned}$$

‘Zkrácením’ gradientu $\mathbf{d}f$ dostaneme tvrzení věty. ■

Lieova závorka se vůči Lieově derivaci chová též jako součin - můžeme zformulovat pravidlo pro derivování součinu:

Lemma V3.8 (Lieova derivace Lieových závorek)

Pro vektorová pole $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ platí

$$\pounds_{\boldsymbol{c}} \big[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\big] = \big[\pounds_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\big] + \big[\boldsymbol{a}, \pounds_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{b}\big]\ .$$ □

DŮKAZ:
Plyne z komutace push-forwardu $\phi_{\tau *}$ a Lieových závorek V3.2. Zderivováním $\phi_{\tau *}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [\phi_{\tau *}\boldsymbol{a}, \phi_{\tau *}\boldsymbol{b}]$ podle τ dá vztah (3.5) požadované tvrzení.

Alternativně, pomocí věty V3.7 nalezneme, že dokazované tvrzení je ekvivalentní Jacobiho identitě pro Lieovy závorky. ■

Tyto vlastnosti nám již umožní spočítat derivaci libovolného tenzororového pole. To lze totiž vždy rozepsat jako lineární kombinaci prvků souřadnicové báze. A ty jsou tvořené tenzorovým součinem souřadnicových vektorů a 1-forem, které již umíme zderivovat podle předcházejících dvou vět.

Speciálně se nám výpočet zjednoduší, pokud použijeme souřadnice x^i, které jsou přizpůsobené vektorovému poli $\boldsymbol{a}$, podle kterého derivujeme. To znamená takové souřadnice, pro které $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial} x^1 = \boldsymbol{a}$. Souřadnice $x^2, \dots, x^d$ (d je dimenze variety) jsou pak konstantní podél orbit toku generovaného polem $\boldsymbol{a}$ a privilegovaná souřadnice x^1

parametrizuje ‘posun’ pomocí toku. Jelikož Lieovy závorky souřadnicových polí jsou nulové a derivace souřadnicových funkcí ve směru $\boldsymbol{a}$ konstantní (1 nebo 0), tak $\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial}x^i = 0$ a $\pounds_{\boldsymbol{a}}\,\mathbf{d}x^i = 0$. Derivace libovolného tenzorového pole se nám tedy redukuje na pouhou parciální derivaci jeho souřadnic

$$\big(\pounds_{\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^1}} A\big)^{b\dots}_{c\dots} = A^{b\dots}_{c\dots\,,1}\ . \tag{3.6}$$

M3.6 Značení parciální derivace
Pouze připomeneme značení zavedené v předchozí kapitole v definici D2.1: čárka v dolních souřadnicových indexech značí parciální derivaci

$$A^{b\dots}_{c\dots\,,1} = \frac{\partial A^{b\dots}_{c\dots}}{\partial x^1}\ .$$

Nakonec ukážeme, že Lieova derivace působící na obecná tenzorová pole reprezentuje Lieovu algebru vektorových polí

Věta V3.9 (Komutátor Lieových derivací)
Pro libovolná vektorová pole $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ platí

$$\pounds_{\boldsymbol{a}}\pounds_{\boldsymbol{b}} - \pounds_{\boldsymbol{b}}\pounds_{\boldsymbol{a}} = \pounds_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}\ ,$$

kde Lieovy derivace mohou působit na obecné tenzorové pole. □

Důkaz:
Nejdříve dokážeme, že operátor $\mathsf{L} = \pounds_{\boldsymbol{a}}\pounds_{\boldsymbol{b}} - \pounds_{\boldsymbol{b}}\pounds_{\boldsymbol{a}} - \pounds_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}$ je pseudoderivace. Zřejmě se jedná o operátor lineární vůči součtu a násobení konstantním číslem. Ultralokalita (anihilace skalární funkce) plyne z definice Lieovy derivace D3.11. Zbývá ověřit Leibnizovo pravidlo:

$$\begin{aligned}
\mathsf{L}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) &= \pounds_{\boldsymbol{a}}\Big((\pounds_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\pounds_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{B})\Big) - \pounds_{\boldsymbol{b}}\Big((\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{B})\Big)\\
&\quad - (\pounds_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}(\pounds_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}\boldsymbol{B})\\
&= (\mathsf{L}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\mathsf{L}\boldsymbol{B}) + (\pounds_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{A})(\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{B}) + (\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{A})(\pounds_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{B})\\
&\quad - (\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{A})(\pounds_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{B}) - (\pounds_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{A})(\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{B})\\
&= (\mathsf{L}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\mathsf{L}\boldsymbol{B})
\end{aligned}$$

Pseudoderivace je plně dána svojí akcí na vektorech (věta V2.4). Pro vektorové pole $\boldsymbol{c}$ však platí $\mathsf{L}\boldsymbol{c} = 0$, jak ověříme opakovaným užitím věty V3.7 a Jacobiho identity pro Lieovy závorky (věta V2.2). Musí tedy platit $\mathsf{L} = 0$, což jsme chtěli dokázat. ■

V příštích kapitolách postupně vyjádříme Lieovu derivaci ještě několika dalšími způsoby. Lieovu derivaci antisymetrických forem např. zapíšeme pomocí vnější derivace (viz větu V4.3 a lemma V4.2). Vztah Lieovy a kovariantní derivace lze nalézt ve větě V7.19 v kapitole 7 a Lieova derivace vektové hustoty bude rovna její divergenci (viz kapitolu 10).

3.4 Podvariety

Intuitivně je koncept podvariety – variety ‘vložené’ do větší variety – jasný. Při přesné definici však můžeme narazit na určitá úskalí. Podvariata znamená totiž více než jen podprostor v množinovém či topologickém smyslu. Býti podvarietou s sebou také nese informaci o diferencovatelné struktuře a vztahu tečných struktur ‘velké’ a ‘vložené’ variety. Toto vložení musí být ‘slušné’, nesmí nikde ‘degenerovat’. Abychom tento rys podchytili, musíme nejdříve zavést několik nových pojmů trochu techničtější povahy.

Definice D3.12 (Lokální vlastnosti zobrazení)
Hladké zobrazení $\phi:\ N \to M$ budeme nazývat *lokálně prosté (injektivní) v bodě* $x \in N$, pokud push-forward $\phi_*|_x$ je prosté zobrazení

tečného prostoru $\boldsymbol{T}_x N$ do $\boldsymbol{T}_{\phi x} M$. Jinými slovy, ϕ je v bodě x lokálně prosté, pokud $\ker \phi_*|_x = \{\mathbf{0}\}$.
Zobrazení ϕ nazveme *v bodě $x \in N$ lokálně surjektivní* či *lokálně „na"*, pokud $\operatorname{img} \phi_*|_x = \boldsymbol{T}_{\phi x} M$. ∘

Zřejmě ϕ může být lokálně prosté pouze pokud $\dim N \leq \dim M$ a lokálně surjektivní pokud $\dim N \geq \dim M$. Tyto pojmy (zejména lokální injekce) zachycují lokálně, kolem jednoho bodu, význam *nedegenerovaného* vnoření jedné variety v druhou. Zhruba řečeno, tečný prostor vzorové variety se nesmí při zobrazení zmenšit. Nesmí v daném bodě existovat směry, které po zobrazení zdegenerují. Chceme, aby každému směru z daného bodu odpovídal po zobrazení opět nějaký netriviální směr v cílové varietě. Varieta se při zobrazení nesmí v daném bodě 'singulárně zdrcnout'.

Geometrický význam definovaných pojmů dále osvětlí teorém plynoucí z věty o implicitní funkci:

Věta V3.10 (Lokálně přizpůsobené souřadnice)

Nechť zobrazení $\phi : N \to M$ je hladké, $m = \dim M$ a $n = \dim N$. Platí:

(i) Pokud je ϕ lokálně prosté v bodě $z \in N$, pak

- exituje okolí V bodu z, na kterém je ϕ prosté,
- pro každé souřadnice y^i $(i = 1, \dots, n)$ na okolí V lze na nějakém okolí U bodu ϕz zavést souřadnice x^j $(j = 1, \dots, m)$ tak, že pro $w \in V$ platí

$$\begin{aligned} x^i(\phi w) &= y^i(w)\,, &\quad& \text{pro } i = 1, \dots, n\,, \\ x^j(\phi w) &= 0\,, && \text{pro } j = n+1, \dots, m\,. \end{aligned}$$

(ii) Pokud je ϕ lokálně surjektivní v bodě $z \in N$, pak

- exituje okolí V bodu z takové, že $U = \phi(V)$ je okolí bodu $\phi z \in M$,
- pro každé souřadnicemi x^j $(j = 1, \dots, m)$, na U existují souřadnice y^i, $i = 1, \dots, n$, na V tak, že pro $w \in V$ platí

$$x^j(\phi w) = y^j(w)\,, \qquad \text{pro } j = 1, \dots, m\,.$$

(iii) Pokud je ϕ v bodě z lokálně prosté i surjektivní, pak exituje okolí V bodu z, na kterém je ϕ diffeomorfismus.

Souřadnicím zavedeným v (i) a (ii) říkáme *souřadnice přizpůsobené zobrazení ϕ*. □

Poznámka

Připomeňme, že pod okolím bodu míníme *otevřenou* množinu obsahující tento bod. Díky tomu je první tvrzení bodu (ii) netriviální.

Lokálně prosté zobrazení ve zvoleném bodě tak převádí malé okolí tohoto bodu na podmnožinu cílové variety takovým způsobem, že se zachovává tečná struktura i pojem hladkosti v okolí zvoleného bodu. Vzor a obraz jsou blízko daného bodu diffeomorfní, z hlediska struktury variet si jsou ekvivalentní.

Koncept lokální prostoty můžeme nyní 'globalizovat':

Definice D3.13 (Vnoření a vložení)

Hladké zobrazení $\iota : N \to M$ se nazývá *vnoření N do M*, pokud je toto zobrazení v každém bodě variety N lokálně prosté.
Je-li ι navíc prosté, nazývá se *vložení N do M*. ∘

Vnoření tak vyžaduje 'lokální nedegenerovanost' (jistou 'nezdrclost') tečné struktury na vzorové varietě N z hlediska tečné struktury cílové variety M. Vnoření ale v principu připouští, aby vnořená varieta protínala sama sebe. Tato možnost ukazuje na význam rozlišování mezi vzorovou varietou N a jejím obrazem $\iota(N) \subset M$. Ač jsou tyto dva prostory lokálně stejné, globální obraz $\iota(N)$ nemusí být varietou. Diferencovatelná a tečná struktura vnořované variety je tak zachycena na varietě N, ne nutně v jejím obraze. Pokud totiž vnoření není globálně prosté, vnořená varieta sama sebe protíná (či se sama sebe dotýká) a v těchto kritických bodech nemá její obraz strukturu variety.

Vložení oproti vnoření vyžaduje navíc právě globální prostotu (injektivnost). Jedná se tedy o koncept jež definuje pojem vložené podvariety:

Definice D3.14 (Podvarieta)
Pokud je ι vložení variety $\tilde{N}$ do M, nazýváme obraz $N = \iota(\tilde{N})$ *podvarietou* variety M. Prostory N a $\tilde{N}$ se často nerozlišují.
Kodimenzí podvariety N nazýváme rozdíl dimenzí $\dim M - \dim N$. ◦

Definice D3.15 (Souřadnice lokálně přizpůsobené podvarietě)
Mějme podvarietu N dimenze $d-n$ variety M dimenze d. Souřadnicím x^i, $i = 1, \ldots, d$ na M říkáme, že jsou *lokálně přizpůsobené* (či jen *přizpůsobené*) *podvarietě* N pokud

$$
\begin{aligned}
&x^i|_N = 0 \qquad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, n\,, \\
&x^i|_N\,, \quad i = n{+}1, \ldots, d \quad \text{tvoří souřadný systém na N}\,.
\end{aligned}
$$

Existence takových souřadnic je zaručena větou V3.10. ◦

Lokálně přizpůsobené souřadnice demonstrují fakt, že N má strukturu variety (indukovanou z variety $\tilde{N}$) kompatabilní se strukturou okolní variety M.

Zdůrazněme ale, že je nutno odlišovat tečné struktury ve smyslu podvariety N a ve smyslu okolní variety M. Vektory tečné k N sice můžeme identifikovat s vektory patřící do (podprostoru) tečného prostoru $\boldsymbol{T}M$ (pomocí zobrazení push-foward, které je prosté), to samé ale nelze učinit s 1-formami. Pokud je dimenze podvariety menší než dimenze okolní variety, pro 1-formy nemáme push-forward k dispozici. A zobrazení pull-back stahující 1-formy z $\boldsymbol{T}^*M$ zpět do $\boldsymbol{T}^*N$ není prosté ($\dim\ker\phi^* = \dim M - \dim N$). Proto musíme rozlišovat mezi tenzory ve smyslu variety M a ve smyslu podvariety N – přestože oba typy tenzorů jsou 'lokalizované' v jednom bodě.

Pull-back forem umožňuje pouze definovat *restrikci* formy na podvarietu.

Definice D3.16 (Restrikce formy na podvarietu)
Mějme podvarietu $N = \iota(\tilde{N})$ variety M danou vnořením ι. Restrikcí $\boldsymbol{\omega}|_N \in \boldsymbol{T}_x{}^0_p N$ formy $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{T}_x{}^0_p M$ definované v bodě $x \in M$ ležícím na podvarietě N míníme pull-back formy na N

$$
\boldsymbol{\omega}|_N = \iota^* \boldsymbol{\omega}\,.
$$
◦

Zřejmě restrikce $\boldsymbol{\omega}|_N$ působí na vektorech tečných k N stejně jako původní forma $\boldsymbol{\omega}$ na stejných vektorech chápaných jako prvky tečného prostoru k M.

M3.7 Vložení, vnoření a injekce
Rozdíly mezi vložením, vnořením, prostým a pouze hladkým zobrazením jsou poměrně jemné. Dokumentujeme si je na jednoduchém příkladě zobrazení jednodimenziální variety $N \cong \mathbb{R}^1$ se souřadnicí t do roviny $M \cong \mathbb{R}^2$ se souřadnicemi $[x^1, x^2]$. Souřadnicové vyjádření zobrazení ϕ označíme $\tilde{\phi}^1$ a $\tilde{\phi}^2$ (viz definici D3.1). Označme ještě o bod z N, pro který $t(o) = 0$.
Zobrazení ϕ nebude hladké, pokud má obraz $\phi(N)$ v M 'rohy'. Např. zobrazení dané vztahy $\tilde{\phi}^1(t) = t$, $\tilde{\phi}^2(t) = 0$ pro $t < 0$ a $\tilde{\phi}^1(t) = 0$, $\tilde{\phi}^2(t) = t$ pro $t > 0$ není hladké v bodě o.
Zobrazení ϕ ale nemusí být hladké i pokud jeho obraz 'rohy nemá' – hladkost závisí také na tom, jak rychle (a hladce) 'ubíhají' souřadnice na N z hlediska souřadnic na M. Např. pro funkce $\tilde{\phi}^1(t) = |t|$, $\tilde{\phi}^2(t) = 0$ není ϕ hladké v bodě o – nelze zde totiž ani definovat diferenciál $\boldsymbol{D}\phi|_o$.
Obecné hladké zobrazení nemusí být prosté ani lokálně prosté. Např. pro funkce $\tilde{\phi}^1(t) = \cos t$, $\tilde{\phi}^2(t) = 0$ není zobrazení ϕ lokálně prosté v bodech 'obratu', tj. tam, kde $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. V těchto bodech push-forward degeneruje na triviální zobrazení $\phi_* \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, tj. např. v bodě o máme $\boldsymbol{D}\phi|_o = \boldsymbol{0}$.
Hladké zobrazení může být prosté, a zároveň ne v každém bodě lokálně prosté. Např. pro funkce $\tilde{\phi}^1(t) = t^3$, $\tilde{\phi}^2(t) = 0$ je zobrazení ϕ prosté, ale není lokálně prosté v bodě o. Opět, v tomto bodě máme $\boldsymbol{D}\phi|_o = \boldsymbol{0}$.
Naopak, vnoření – zobrazení všude lokálně prosté – nemusí být prosté. Např. funkce $\tilde{\phi}^1(t) = \cos t$, $\tilde{\phi}^2(t) = \sin t$ dávají lokálně prosté zobrazené ϕ, ale díky periodicitě funkcí vzor každého bodu z $\phi(N)$ je tvořen nekonečně body v N. Lze samozřejmě zkonstruovat i vnoření, která nejsou prostá třeba jen v jednom bodě (vnořená varieta protíná sama sebe v jednom bodě).
Konečně příkladem vložení je zobrazení dané funkcemi $\tilde{\phi}^1(t) = t$, $\tilde{\phi}^2(t) = 0$, které definuje podvarietu „osu x^1".

3.A Geometrický význam Lieovy závorky

Chceme dokázat tvrzení marginálie M3.1

Lemma V3.11 (Význam Lieovy závorky)

Mějme dvě vektorová pole $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, která generují toky $\phi_\alpha = \mathrm{diff}_\alpha[\boldsymbol{a}]$ a $\psi_\beta = \mathrm{diff}_\beta[\boldsymbol{b}]$. Nekomutativita těchto toků je charakterizována Lieovou závorkou. Konkrétně, pro libovolnou funkci f platí

$$f\big(\psi_\tau\phi_\tau x\big) - f\big(\phi_\tau\psi_\tau x\big) = \tau^2\big[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\big]^{\boldsymbol{n}}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} f(x) + \mathcal{O}(\tau^3)\ . \qquad \square$$

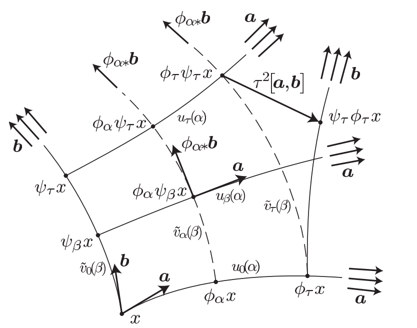
Důkaz:

Pro zjednodušení zápisu definujme funkce $a(\alpha,\beta)$, $b(\beta,\alpha)$ dvou proměnných:

$$a(\alpha,\beta) = f\big(\phi_\alpha\psi_\beta x\big)\ ,\quad b(\beta,\alpha) = f\big(\psi_\beta\phi_\alpha x\big)\ .$$

Nyní budeme chtít nalézt rozvoj těchto funkcí okolo bodu $\alpha = \beta = 0$. Nulté členy rozvoje jsou přímo hodnoty obou funkcí:

$$a(0,0) = b(0,0) = f(x)\ .$$



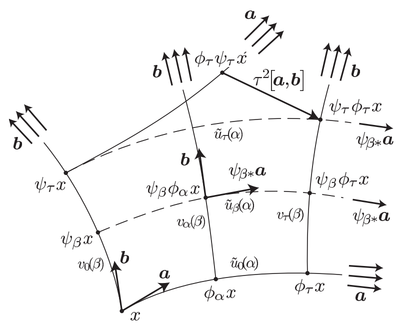
Funkce $a(\alpha,\beta)$ je rovna funkci f vyčíslené v bodě $\phi_\alpha\psi_\beta x$. Při měnícím se α se bod $\phi_\alpha\psi_\beta x$ pohybuje po křivce, kterou nazveme $u_\beta(\alpha)$ (křivky $u_\beta(\alpha)$ pro tři různé β jsou v obrázku znázorněny jako plné křivky). Parciální derivace podle α odpovídá derivaci ve směru tečném k $u_\beta(\alpha)$, což znamená ve směru pole $\boldsymbol{a}$. Při měnícím se β se bod $\phi_\alpha\psi_\beta x$ pohybuje po křivce $\tilde{v}_\alpha(\beta)$, jejíž tečný vektor je $\phi_{\alpha*}\boldsymbol{b}$ (v obrázku jsou tyto křivky znázorněny čárkovaně). Parciální derivace $\partial a/\partial\beta$ tak odpovídá derivaci ve směru $\phi_{\alpha*}\boldsymbol{b}$.

Jelikož funkce a, b závisí na α, β pouze skrze argument $\phi_\alpha\psi_\beta x$ či $\psi_\beta\phi_\alpha x$, parciální derivace podle jednotlivých proměnných jsou derivace ve směru polí $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$, respektive 'posunutých' polí $\phi_{\alpha*}\boldsymbol{b}$ a $\psi_{\beta*}\boldsymbol{a}$. Vskutku, tečný vektor křivky $u_\beta(\alpha) = \phi_\alpha\psi_\beta x$ (s parametrem α) je $\boldsymbol{a}|_{u_\beta(\alpha)}$, kdežto tečný vektor křivky $\tilde{v}_\alpha(\beta) = \phi_\alpha\psi_\beta x$ (s parametrem β) je $\phi_{\alpha*}\boldsymbol{b}|_{\tilde{v}_\alpha(\beta)}$. Obdobně pro prohozená pole $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ – viz obrázky na této stránce. První parciální derivace funkcí a a b tedy jsou:

$$\frac{\partial a}{\partial\alpha}(\alpha,\beta) = \big(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{d}f\big)\big|_{\phi_\alpha\psi_\beta x}\ ,\quad \frac{\partial a}{\partial\beta}(\alpha,\beta) = \big((\phi_{\alpha*}\boldsymbol{b})\cdot\mathbf{d}f\big)\big|_{\phi_\alpha\psi_\beta x}\ ,$$
$$\frac{\partial b}{\partial\beta}(\beta,\alpha) = \big(\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{d}f\big)\big|_{\psi_\beta\phi_\alpha x}\ ,\quad \frac{\partial b}{\partial\alpha}(\beta,\alpha) = \big((\psi_{\beta*}\boldsymbol{a})\cdot\mathbf{d}f\big)\big|_{\psi_\beta\phi_\alpha x}\ .$$

Druhé parciální derivace se mohou spočíst stejným způsobem, pokud první derivace závisí na parametru druhého derivování opět pouze skrze argument $\phi_\alpha\psi_\beta x$ či $\psi_\beta\phi_\alpha x$. To je splněno pro derivace $\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}$ a $\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$, ve smíšených derivacích podle α i β toho lze dosáhnout správným pořadím derivování. Dostáváme:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial\alpha^2}(\alpha,\beta) = \Big(\boldsymbol{a}\cdot\big(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{d}f\big)\Big)\Big|_{\phi_\alpha\psi_\beta x}\ ,$$
$$\frac{\partial^2 a}{\partial\beta^2}(\alpha,\beta) = \Big((\phi_{\alpha*}\boldsymbol{b})\cdot\big((\phi_{\alpha*}\boldsymbol{b})\cdot\mathbf{d}f\big)\Big)\Big|_{\phi_\alpha\psi_\beta x}\ ,$$
$$\frac{\partial^2 a}{\partial\alpha\partial\beta}(\alpha,\beta) = \Big((\phi_{\alpha*}\boldsymbol{b})\cdot\big(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{d}f\big)\Big)\Big|_{\phi_\alpha\psi_\beta x}\ ,$$
$$\frac{\partial^2 b}{\partial\beta^2}(\beta,\alpha) = \Big(\boldsymbol{b}\cdot\big(\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{d}f\big)\Big)\Big|_{\psi_\beta\phi_\alpha x}\ ,$$
$$\frac{\partial^2 b}{\partial\alpha^2}(\beta,\alpha) = \Big((\psi_{\beta*}\boldsymbol{a})\cdot\big((\psi_{\beta*}\boldsymbol{a})\cdot\mathbf{d}f\big)\Big)\Big|_{\psi_\beta\phi_\alpha x}\ ,$$
$$\frac{\partial^2 b}{\partial\beta\partial\alpha}(\beta,\alpha) = \Big((\psi_{\beta*}\boldsymbol{a})\cdot\big(\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{d}f\big)\Big)\Big|_{\psi_\beta\phi_\alpha x}\ .$$



Obdobně pro funkci $b(\beta,\alpha)$, která závisí na bodě $\psi_\beta\phi_\alpha x$ definujeme křivky $v_\alpha(\beta) = \psi_\beta\phi_\alpha x$ (v obrázku plné čáry) s tečným vektorem $\boldsymbol{b}$ dávající parciální derivaci $\partial b/\partial\beta$, a křivky $\tilde{u}_\beta(\alpha) = \psi_\beta\phi_\alpha x$ (v obrázku čárkovaně) s tečným vektorem $\psi_{\beta*}\boldsymbol{a}$ určující parciální derivaci $\partial b/\partial\alpha$.

K rozvoji funkcí a a b potřebujeme hodnoty derivací pro $\alpha = \beta = 0$:

$$\frac{\partial a}{\partial\alpha}(0,0) = \big(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{d}f\big)\big|_x\ ,\qquad \frac{\partial a}{\partial\beta}(0,0) = \big(\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{d}f\big)\big|_x\ ,$$
$$\frac{\partial b}{\partial\beta}(0,0) = \big(\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{d}f\big)\big|_x\ ,\qquad \frac{\partial b}{\partial\alpha}(0,0) = \big(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{d}f\big)\big|_x$$

a

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 a}{\partial\alpha^2}(0,0) = \Big(\boldsymbol{a}\cdot\big(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{d}f\big)\Big)\Big|_x\,, \qquad &&\frac{\partial^2 a}{\partial\beta^2}(0,0) = \Big(\boldsymbol{b}\cdot\big(\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{d}f\big)\Big)\Big|_x\,,\\
&\frac{\partial^2 b}{\partial\beta^2}(0,0) = \Big(\boldsymbol{b}\cdot\big(\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{d}f\big)\Big)\Big|_x\,, \qquad &&\frac{\partial^2 b}{\partial\alpha^2}(0,0) = \Big(\boldsymbol{a}\cdot\big(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{d}f\big)\Big)\Big|_x\,,\\
&\frac{\partial^2 a}{\partial\alpha\partial\beta}(0,0) = \Big(\boldsymbol{b}\cdot\big(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{d}f\big)\Big)\Big|_x\,, \qquad &&\frac{\partial^2 b}{\partial\beta\partial\alpha}(0,0) = \Big(\boldsymbol{a}\cdot\big(\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{d}f\big)\Big)\Big|_x\,.
\end{aligned}
$$

S použitím těchto hodnot v Taylorově rozvoji dostaneme

$$
\begin{aligned}
f\big(\psi_\tau\phi_\tau x\big) - f\big(\phi_\tau\psi_\tau x\big) &= b(\tau,\tau) - a(\tau,\tau)\\
&= \Bigg(b - a + \Big(\frac{\partial b}{\partial\beta} + \frac{\partial b}{\partial\alpha} - \frac{\partial a}{\partial\alpha} - \frac{\partial a}{\partial\beta}\Big)\tau\\
&\qquad + \Big(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 b}{\partial\beta^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial\alpha^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial a^2}{\partial\beta^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial\beta\partial\alpha}\Big)\tau^2\\
&\qquad + \mathcal{O}(\tau^3)\Bigg)\Bigg|_{\alpha=\beta=0}\\
&= \tau^2\Big(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{d}\big(\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{d}f\big) - \boldsymbol{b}\cdot\mathbf{d}\big(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{d}f\big)\Big)\Big|_x + \mathcal{O}(\tau^3)\\
&= \tau^2\,\big[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\big]\cdot\mathbf{d}f\big|_x + \mathcal{O}(\tau^3)\,,
\end{aligned}
$$

kde v posledním řádku jsme použili definici D2.3. Tvrzení lemmatu je tím dokázáno. ■