Geometrické metody ve fyzice

Studijní text k přednáškám
Geometrické metody teoretické fyziky I a *II*
určených zejména pro třetí a čtvrtý ročník studia
teoretické fyziky na MFF UK.

Pavel Krtouš

ÚTF MFF UK

Obsah

Úvod

Do rukou se Vám dostává studijní text k přednáškám *Geometrické metody teoretické fyziky I* a *II*. Jedná se o průběžně vytvářeny dokument. Tento text by měl vykládat základy diferenciální geometrie na varietách s důrazem na použití ve fyzice, zvláště v obecné teorii relativity, v teorii pole a v klasické mechanice.

V současnosti text pokrývá pouze některé části diferenciální geometrie a jedná se prozatím o základní výklad, který by měl být postupně doplněn obrázky, ilustracemi, příklady a úlohami. Přibudou i další kapitoly pokrývající jak základy diferenciální geometrie, tak některé její pokročilé partie.

Konkrétně, text nepostihuje podrobně úvod do diferenciální geometrie: zavedení variety, vybudování tečné a tenzorové struktury a definování některých základních nástrojů (jako derivace podle souřadnic, gradient, Lieovy závorky). Tyto partie jsou dostatečně pokryty v každé učebnici diferenciální geometrie, např. ve skriptech prof. Kovalského určených ke stejným přednáškám. V konečné verzi studijního textu budou těmto partiím věnovány kapitoly 1 a 2.

V tento okamžik však první dvě kapitoly obsahují pouze stručný přehled značení, názvosloví a znění některých vět a lemmat potřebných v dalším textu. Neúplná je též kapitola 6, ve které by měly přibýt rozsáhlé pasáže obsahující příklady metrik, a závěr kapitoly 10, kde bude doplněn výklad o integrálních větách. Konečně, chybí kapitola 9 o metrické kovariantní derivaci.

Text je psaný strukturovanou formou: z textu jsou vyděleny znění vět lemmat, definic, poznámek, příkladů a problémů. Tyto bloky a rovnice v běžném textu jsou číslovány – jednotlivé typy nezávisle na sobě (s výjimkou vět a lemmat, které mají číslování společné, a poznámek, které číslovány nejsou). Čísla jsou uvozena písmenem označující příslušný typ. Na rovnice v textu se odkazuje formou "(2.10)", na ostatní bloky formou např. "definice D2.5" či "věta V3.1".

Na okraji textu jsou umisťovány obrázky a marginálie. Marginálie slouží k rozšíření vykládané látky o doplňující informace, které nejsou nutné k pochopení dalšího výkladu, mohou však poskytnout jiný náhled na problematiku či nastínit některé aplikace. V marginálíích se může místy objevovat i materiál z následujících kapitol – některé z nich tak mohou být srozumitelnější až při opakovaném čtení.

K některým kapitolám jsou připojeny dodatky, které obsahují obvykle techničtější partie – pracnější důkazy či zobecnění výsledků z hlavního textu.

Text je k dispozici na WWW. Jednotlivé kapitoly textu lze stahovat postupně. Konzistence odkazů mezi kapitolami lze zajistit kontrolou verzí jednotlivých kapitol.

Vzhledem k tomu, že text je zveřejněn již ve fázi svého vzniku, au-

M0.1 Marginálie
Marginále je taková užitečná zbytečnost na okraji stránky – např. tento odstavec.

M0.2 Systém verzí kapitol
Tento text se nadále vyvíjí a to s sebou nese i nutnost nějakého mechanismu zachycujícího aktuální verzi dokumentu. Byla zvolena následující koncepce: jednotlivé kapitoly jsou relativně nezávislé. Každá má své číslo verze ve formátu `N.nn`, případně `N.nnx`, kde `N` určuje verzi celého dokumentu a `nn` číslo označující obsahové či zásadnější formátové změny (např. změny měnící číslování rovnic). Případné písmenko `x` označuje drobné, většinou pouze pravopisné či korektorské změny v textu. Verze kapitoly spolu s datem poslední změny jsou uváděny v zápatí běžné stránky. Na první stránce kapitoly je verze uvedena v pravém horním rohu, spolu s verzemi ostatních kapitol aktuálními v okamžiku generování dané kapitoly. Odkazy mezi takto vyjmenovanými kapitolami by měly být konzistentní.

tor uvítá a bude vděčen za jakékoli připomínky a poznámky. Podněty budou vzaty v úvahu a zapracovány průběžně do textu.

Poděkování

Chtěl bych poděkovat doc. Jiřímu Podolskému a studentům Tomáši Málkovi a Jaroslavovi Trnkovi za přečtení a připomínkování textu.

Kapitola 1

Tenzory

První kapitola v tuto chvíli obsahuje pouze přehled značení týkající se tenzorů a dva oddíly zabývající se podrobněji antisymetrickými a symetrickými tenzory. Nejedná se o systematický výklad problematiky tenzorů. Ten lze nalézt ve standardních učebnicích lineární algebry, případně diferenciální geometrie.

1.1 Označení tenzorů

Duální vektorový prostor k vektorovému prostoru V označíme V^*. Prostor tenzorů typu (p, q) vybudovaný nad V označíme V^p_q, tj.

$$V^p_q = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p\text{-krát}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{q\text{-krát}} . \tag{1.1}$$

Tenzory budeme značit tučným písmem: např. vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \ldots$, formy $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\sigma}, \ldots$ a tenzory $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \ldots$. Znaménko tenzorového součinu budeme vynechávat, tj.

$$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} . \tag{1.2}$$

Zúžení (kontrakci) vektoru $\boldsymbol{a}$ a 1-formy $\boldsymbol{\omega}$ (tj. působení 1-formy na vektor) budeme bez indexů zapisovat následujícími způsoby:

$$\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{a} \rangle = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\omega} . \tag{1.3}$$

Symetrizaci a antisymetrizaci tenzoru $\boldsymbol{\omega}$ ve všech jeho indexech značíme $\mathcal{S}\,\boldsymbol{\omega}$ a $\mathcal{A}\,\boldsymbol{\omega}$ (viz též (1.5) níže).

Složky tenzorů budeme značit obyčejným písmem – jedná se o obyčejná reálná čísla. Uveďme např. komponenty a^m, b^n, ω_a, σ_b či $A^{k\ldots}_{l\ldots}$, $B^{k\ldots}_{l\ldots}$.

1.2 Abstraktní indexy

Pro naznačení kontrakce tenzoru, případně dalších tenzorových operací, budeme používat *abstraktních indexů*. To znamená, že v případě potřeby přidáme k tenzoru $\boldsymbol{A}$ sadu tučně psaných indexů o stejné struktuře jako mají souřadnicové indexy – např. budeme psát $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}\ldots}_{\boldsymbol{l}\ldots}$. Tyto tzv. *abstraktní* indexy však nejsou svázány s žádnou bází v prostoru tenzorů, neprobíhají konkrétní číselné hodnoty a nemění význam tenzoru $\boldsymbol{A}$. Abstraktní indexy pouze naznačují tenzorovou strukturu a pojmenovávají jednotlivé 'vektorové pozice' v tenzorovém prostoru do kterého $\boldsymbol{A}$ patří.

Pomocí abstraktních indexů značíme kontrakci opakujícím se dolním a horním indexem; např.

$$\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{a} \rangle = \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}} \, \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} \; . \tag{1.4}$$

Symetrizaci (resp. antisymetrizaci) značíme kulatou (případně hranatou) závorkou okolo příslušných indexů

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{\dots(\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p)\dots} &= \frac{1}{p\,!} \sum_{\text{permutace}\,\sigma} \boldsymbol{A}^{\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_1}\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_p}\dots} \\ \boldsymbol{\omega}_{\dots[\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p]\dots} &= \frac{1}{p\,!} \sum_{\text{permutace}\,\sigma} \operatorname{sign}\sigma \; \boldsymbol{\omega}_{\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_1}\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_p}\dots} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Abstraktní indexy jsou svázány se souřadnicovými indexy volbu báze v prostoru vektorů a 1-forem. Nechť $\{\boldsymbol{e}_a\}_{a=1,\dots,d}$ je báze v prostoru vektorů, $\{\boldsymbol{e}^a\}_{a=1,\dots,d}$ duální báze v prostoru 1-forem. Pak pro obecný tenzor $\boldsymbol{A}$ můžeme psát

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}\dots}_{\boldsymbol{l}\dots} = A^{a\dots}_{b\dots} \, \boldsymbol{e}_a^{\boldsymbol{k}} \dots \, \boldsymbol{e}^b_{\boldsymbol{l}} \dots \; . \tag{1.6}$$

Zde $\boldsymbol{e}_a^{\boldsymbol{k}}$ jsou vektory báze (různé lineárně nezávislé vektory číslované souřadnicovým indexem $a = 1, \dots, d$) 'oblečené' navíc do abstraktního indexu $\boldsymbol{k}$ naznačujícího, že se jedná o vektory. Obdobně pro 1-formy $\boldsymbol{e}^b_{\boldsymbol{l}}$ index b probíhá čísla $1, \dots, d$ a $\boldsymbol{l}$ je abstraktní index naznačující, že se jedná o 1-formy. Bez abstraktních indexů by předchozí rovnice měla tvar

$$\boldsymbol{A} = A^{a\dots}_{b\dots} \, \boldsymbol{e}_a \dots \, \boldsymbol{e}^b \dots \; . \tag{1.7}$$

Bázi vektorů budeme též nazývat n-*áda vektorů*, a to přesto, že pro dimenzi budeme většinou používat písmeno d. Jedná se o zobecnění běžného označené *diáda*, *triáda* a *tetráda* pro $d = 2, 3$ a 4.

1.3 Některé vlastnosti tenzorů

Věta V1.1 (Tenzor jako lineární zobrazení)

Libovolné tenzor-značné lineární zobrazení na tenzorech lze reprezentovat opět tenzorem.

Jinými slovy, každé zobrazení $\boldsymbol{l}$ splňující ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in V^m_n, r \in \mathbb{R}$)

$$\boldsymbol{l} : V^m_n \to V^p_q \,, \qquad \text{(tenzor-značnost)}$$

$$\boldsymbol{l}(r\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = r\,\boldsymbol{l}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{l}(\boldsymbol{B}) \qquad \text{(linearita)}$$

lze reprezentovat tenzorem $\boldsymbol{L} \in V^{p+n}_{q+m}$

$$\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_q}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p\boldsymbol{c}_1\dots\boldsymbol{c}_n}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_q\boldsymbol{d}_1\dots\boldsymbol{d}_m} \, \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{d}_1\dots\boldsymbol{d}_m}_{\boldsymbol{c}_1\dots\boldsymbol{c}_n} \; . \qquad \square$$

1.4 Prostor antisymetrických tenzorů

Mezi tenzory hrají důležitou roli antisymetrické tenzory. Antisymetrický tenzor lze získat antisymetrizací jeho tenzorových indexů. Ve shodě s (1.5) definujme:

Definice D1.1 (Antisymetrizace tenzorů)
Antisymetrizaci tenzoru ve vybraných indexech budeme označovat pomocí hranatých závorek

$$\boldsymbol{\omega}_{\dots[\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p]\dots} = \frac{1}{p!}\sum_{\text{permutace }\sigma} \operatorname{sign}\sigma\, \boldsymbol{\omega}_{\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_1}\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_p}\dots}\ .$$

Pokud se přes nějaký index umístěný mezi závorkami antisymetrizovat nemá, vydělíme ho pomocí svislých čar: např. ve výrazu $\boldsymbol{\omega}_{\dots[\boldsymbol{ab}|\boldsymbol{n}|\boldsymbol{c}]\dots}$ se antisymetrizuje pouze přes indexy $\boldsymbol{abc}$. Antisymetrizaci přes všechny indexy budeme označovat pomocí symbolu $\mathcal{A}$. Např.

$$(\mathcal{A}\,\boldsymbol{A})^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p} = \boldsymbol{A}^{[\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p]}\ . \qquad \circ$$

Nyní můžeme definovat

Definice D1.2 (Prostor antisymetrických tenzorů)
Prostor antisymetrických tenzorů typu $(k,0)$, $k=0,\dots,d$, označíme $V^{[k]}$. Jedná se o prostor tenzorů $\boldsymbol{A}$ pro které

$$\mathcal{A}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\ .$$

Obdobně definujeme prostor antisymetrických forem $V_{[l]}$ a prostor $V^{[k]}_{[l]} = V^{[k]}\otimes V_{[l]}$. ∘

Pro antisymetrický tenzor $\boldsymbol{A}$ pro každou permutaci σ čísel $[1,\dots,k]$ zřejmě platí

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k} = \operatorname{sign}\sigma\ \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{a}_{\sigma_1}\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_k}}\ . \tag{1.8}$$

Dimenze prostoru antisymetrických tenzorů je

$$\dim V^{[k]} = \binom{d}{k}\ . \tag{1.9}$$

Definice D1.3 (Projektor na antisymetrické tenzory)
Projektor ${}^{[k]}\boldsymbol{\delta}\in V^{[k]}_{[k]}$ projektující z prostoru V^k všech tenzorů stupně k na prostor antisymetrických tenzorů $V^{[k]}$ má tvar

$${}^{[k]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_k} = \boldsymbol{\delta}^{[\boldsymbol{a}_1}_{\boldsymbol{b}_1}\dots\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_k]}_{\boldsymbol{b}_k} = \boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1}_{[\boldsymbol{b}_1}\dots\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_k]} \qquad \circ$$

Tento projektor má následující užitečné vlastnosti:

Lemma V1.2 (Vlastnosti ${}^{[k]}\boldsymbol{\delta}$)

$$\boldsymbol{A}^{[\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k]} = {}^{[k]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_k}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_k} \tag{i}$$

$${}^{[k]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_k}\,{}^{[k]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_k} = {}^{[k]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_k} \tag{ii}$$

$${}^{[k]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_{k-l}\boldsymbol{a}_{k-l+1}\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_{k-l}\boldsymbol{r}_1\quad\dots\quad\boldsymbol{r}_l}\,{}^{[l]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{r}_1\quad\dots\quad\boldsymbol{r}_l}_{\boldsymbol{b}_{k-l+1}\dots\boldsymbol{b}_k} = {}^{[k]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_k} \tag{iii}$$

$${}^{[k]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_l\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_{k-l}}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_l\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_{k-l}} = \frac{(d-l)!\,l!}{(d-k)!\,k!}\ {}^{[l]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_l}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_l} \tag{iv}$$

$${}^{[k]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_k}_{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_k} = \dim V^{[k]} \tag{v}$$

$${}^{[k]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_{\sigma_1}\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_k}}_{\boldsymbol{b}_{\sigma_1}\dots\boldsymbol{b}_{\sigma_k}} = {}^{[k]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_k} \qquad \sigma \text{ je permutace } [1,\dots,k] \tag{vi}$$

□

Složky antisymetrického tenzoru lišící se pouze permutací indexů jsou závislé. Rozpis tenzoru do komponent však můžeme přepsat jako součet nezávislých komponent

$$\boldsymbol{A} = A^{a_1\dots a_k}\, \boldsymbol{e}_{a_1}\dots\boldsymbol{e}_{a_k} = \sum_{a_1<\dots<a_k} A^{a_1\dots a_k}\ k!\ \mathcal{A}(\boldsymbol{e}_{a_1}\dots\boldsymbol{e}_{a_k})\ . \quad (1.10)$$

Speciální roli hrají tzv. *totálně antisymetrické formy* a *tenzory* – objekty z prostorů $V_{[d]}$ a $V^{[d]}$, kde d je dimenze prostoru V. V tomto případě z (1.9) vidíme, že $\dim V_{[d]} = \dim V^{[d]} = 1$, jedná se tedy o triviální jednodimenziální prostory lineárně isomorfní s reálnými čísly $\mathbb{R}$. Neexistuje však kanonický isomorfismus. V těchto prostorech neexistuje přirozený výběr 'jednotky'. Rozpis (1.10) pro $\boldsymbol{\alpha} \in V_{[d]}$ dává

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_{a_1\dots a_d}\, \boldsymbol{e}^{a_1}\dots\boldsymbol{e}^{a_d} = \alpha_{1\dots d}\ d!\ \mathcal{A}(\boldsymbol{e}^1\dots\boldsymbol{e}^d)\ .$$

Mezi prostory $V_{[d]}$ a $V^{[d]}$ lze zavést operace inverze (reciprocity):

Definice D1.4 (Inverze totálně antisymetrických tenzorů)
Inverze totálně antisymetrických forem je definována:

$$\begin{aligned} {}^{-1}\ :\ & V_{[d]} \to V^{[d]}\ , \quad \boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\alpha}^{-1} \\ & \text{tak, že} \qquad \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_d}\, \boldsymbol{\alpha}^{-1\,\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_d} = d!\ . \end{aligned}$$

Jedná se o invertovatelné zobrazení; opačné zobrazené budeme značit stejně:

$$\begin{aligned} {}^{-1}\ :\ & V^{[d]} \to V_{[d]}\ , \quad \boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\alpha}^{-1} \\ & \text{tak, že} \qquad (\boldsymbol{\alpha}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{\alpha}\ . \end{aligned}$$

∘

Vlastnosti inverze jsou:

Lemma V1.3 (Vlastnosti inverze)
Zúžíme-li částečně $\boldsymbol{\alpha}$ s $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$, dostaneme ${}^{[k]}\boldsymbol{\delta}$

$$\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_k\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_{d-k}}\, \boldsymbol{\alpha}^{-1\,\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_{d-k}} = (d-k)!\,k!\ {}^{[k]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\,\boldsymbol{b}_k}$$

Speciálně

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_d}\, \boldsymbol{\alpha}^{-1\,\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d} = d!\ {}^{[d]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d}_{\boldsymbol{b}_1\dots\,\boldsymbol{b}_d}\ , \\ &\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_d}\, \boldsymbol{\alpha}^{-1\,\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_d} = d!\ . \end{aligned}$$

Pro souřadnici invertovaného tenzoru dostáváme

$$\alpha^{-1\,1\dots d} = (\alpha_{1\dots d})^{-1}\ .$$

□

Pomocí projektoru ${}^{[d]}\boldsymbol{\delta}$ můžeme definovat determinant tenzoru typu $(1,1)$ (tj. lineárního operátoru na vektorech)

Definice D1.5 (Determinant)
Pro $\boldsymbol{A} \in V^1_1$ definujeme $\det \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}$ vztahem:

$$\det \boldsymbol{A} = {}^{[d]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d}_{\boldsymbol{b}_1\dots\,\boldsymbol{b}_d}\, \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{b}_1}_{\boldsymbol{a}_1}\dots\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{b}_d}_{\boldsymbol{a}_d} = \sum_\sigma \operatorname{sign}\sigma\ A^{\sigma_1}_1\dots A^{\sigma_d}_d\ .$$

∘

1.5 Prostor symetrických tenzorů

Analogicky antisymetrizaci zavedeme symetrizaci tenzoru (viz též (1.5)):

Definice D1.6 (Symetrizace tenzorů)

Symetrizaci tenzoru ve vybraných indexech budeme označovat pomocí kulatých závorek

$$\boldsymbol{S}^{\dots(\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p)\dots} = \frac{1}{p!} \sum_{\text{permutace}\,\sigma} \boldsymbol{S}^{\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_1}\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_p}\dots} .$$

Pokud se přes nějaký index umístěný mezi závorkami symetrizovat nemá, vydělíme ho opět pomocí svislých čar: např. $\boldsymbol{S}^{\dots(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{ij}|\boldsymbol{b})\dots}$ značí symetrizaci přes indexy $\boldsymbol{ab}$. Symetrizaci přes všechny indexy budeme označovat pomocí symbolu $\mathcal{S}$, tj.

$$(\mathcal{S}\,\boldsymbol{S})^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p} = \boldsymbol{S}^{(\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p)} .$$

∘

Dále definujeme

Definice D1.7 (Prostor symetrických tenzorů)

Prostor symetrických tenzorů typu $(k,0)$, $k=0,\dots,d$, označíme $V^{(k)}$. Jedná se o prostor tenzorů $\boldsymbol{S}$ pro které

$$\mathcal{S}\,\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S} .$$

Obdobně definujeme prostor symetrických forem $V_{(l)}$ a prostor $V^{(k)}_{(l)} = V^{(k)} \otimes V_{(l)}$.

∘

Pro symetrický tenzor $\boldsymbol{S}$ a pro každou permutaci σ čísel $[1,\dots,k]$ platí

$$\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k} = \boldsymbol{S}^{\boldsymbol{a}_{\sigma_1}\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_k}} . \tag{1.11}$$

Dimenze prostoru symetrických tenzorů je

$$\dim V^{(k)} = \binom{k+d-1}{k} . \tag{1.12}$$

Definice D1.8 (Projektor na symetrické tenzory)

Projektor ${}^{(k)}\boldsymbol{\delta} \in V^{(k)}_{(k)}$ projektující z prostoru V^k všech tenzorů stupně k na prostor antisymetrických tenzorů $V^{(k)}$ definujeme

$${}^{(k)}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_k} = \boldsymbol{\delta}^{(\boldsymbol{a}_1}_{\boldsymbol{b}_1}\dots\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_k)}_{\boldsymbol{b}_k} = \boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1}_{(\boldsymbol{b}_1}\dots\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_k)}$$

∘

Tento projektor má následující užitečné vlastnosti:

Lemma V1.4 (Vlastnosti ${}^{(k)}\delta$)

$$\boldsymbol{S}^{(\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k)} = {}^{(k)}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_k}\,\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_k} \tag{i}$$

$${}^{(k)}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_k}\,{}^{(k)}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_k} = {}^{(k)}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_k} \tag{ii}$$

$${}^{(k)}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_{k-l}\boldsymbol{a}_{k-l+1}\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_{k-l}\boldsymbol{r}_1\quad\dots\quad\boldsymbol{r}_l}\,{}^{(l)}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{r}_1\quad\dots\quad\boldsymbol{r}_l}_{\boldsymbol{b}_{k-l+1}\dots\boldsymbol{b}_k} = {}^{(k)}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_k} \tag{iii}$$

$${}^{(k)}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_l\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_{k-l}}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_l\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_{k-l}} = \frac{(k+d-1)!\,l!}{(l+d-1)!\,k!}\;{}^{(l)}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_l}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_l} \tag{iv}$$

$${}^{(k)}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_k}_{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_k} = \dim V^{(k)} \tag{v}$$

$${}^{(k)}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_{\sigma_1}\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_k}}_{\boldsymbol{b}_{\sigma_1}\dots\boldsymbol{b}_{\sigma_k}} = {}^{(k)}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_k} \qquad \sigma \text{ je permutace } [1,\dots,k] \tag{vi}$$

□

I složky symetrického tenzoru jsou závislé pokud se liší pouze permutací indexů. Rozpis tenzoru do komponent můžeme napsat jako součet nezávislých komponent

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} &= S^{a_1 \dots a_k}\, \boldsymbol{e}_{a_1} \dots \boldsymbol{e}_{a_k} \\ &= \sum_{a_1 \leq \dots \leq a_k} S^{a_1 \dots a_k}\ n(a_1, \dots, a_k)\ \mathcal{S}(\boldsymbol{e}_{a_1} \dots \boldsymbol{e}_{a_k})\ , \end{aligned} \tag{1.13}$$

kde $n(a_1, \dots, a_k)$ je počet vzájemně odlišných permutací indexů $a_1 \dots a_k$.

Kapitola 2

Varieta a její tečná struktura

Druhá kapitola v tuto chvíli obsahuje přehled značení týkající se variety a tečných tenzorů. Vedle přehledu značení jsou zde uvedeny některé věty a definice, na které se odkazují následující kapitoly. Nejedná se však o systematický výklad. Ten lze nalézt ve standardních učebnicích diferenciální geometrie. Výjimkou je oddíl 2.5 týkající se pseudoderivace – tento pojem se obvykle explicitně nezavádí, případně se zavádí v mírně odlišných podobách a pod různými názvy. Oddíl 2.5 je proto uveden v úplné formě, plně dostatečné pro další výklad.

2.1 Varieta

Varieta M je topologický prostor s diferenciální strukturou danou diferencovatelným atlasem. *Mapu* z atlasu budeme značit např. $(U, [x^j])$, kde $U \subset M$ je oblast, na které jsou definované souřadnicové funkce x^j $(j = 1, \ldots, d)$ a $[x^j]$ značí uspořádanou d-tici těchto funkcí. Atlas definuje třídu hladkých funkcí na varietě, kterou označíme $\mathfrak{F}M$. Standardně budeme označovat souřadnicové vyjádření funkce f stejně jako funkci samu.

Parametrizovaná křivka $z(\tau)$ je zobrazení z reálných čísel do variety, přiřazující každé hodnotě $\tau \in \mathbb{R}$ bod $z(\tau) \in M$. Křivku nazýváme *hladkou*, pokud její souřadnicové vyjádření v každé mapě je hladké. Křivka je *po částech hladká*, pokud je, zhruba řečeno, hladká všude pouze mimo některé diskrétní hodnoty parametru. *Geometrickou křivkou* či krátce křivkou γ míníme křivku bez konkrétní parametrizace (jedná se jednodimenzionální varietu vnořenou do variety M – viz též oddíl 3.4).

Definice D2.1 (Parciální derivace)
Nechť $(U, [x^j])$ je mapa na varietě M a $f \in \mathfrak{F}U$. Parciální derivací $f_{,j} \in \mathfrak{F}U$ funkce f podél j-té souřadnice nazýváme

$$f_{,j} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^j}(x^1, \ldots, x^d) \ ,$$

kde $\tilde{f}$ je funkce f vyjádřená jako závislost na d souřadnicích x^j, tj. $\tilde{f}(x^1, \ldots, x^d) = f$.
Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme vlnovku u funkce $\tilde{f}$ vynechávat. $\circ$

2.2 Tečné vektory

Tečné vektory můžeme chápat buď jako objekty charakterizující směr parametrizovaných křivek (včetně 'rychlosti běhu' parametru) nebo jako lineární diferenciální operátory prvního řádu působící na funkcích.

K parametrizované křivce $z(\tau)$ tak definujeme tečný vektor $\frac{\boldsymbol{D}z}{d\tau}(\tau)$, (s abstraktními indexy zapsaný $\frac{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{n}}z}{d\tau}$). Souřadnicové vektory tečné k čarám souřadnic x^j označíme $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial}x^j$ či $\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^j}$, případně s abstraktním indexem $\frac{\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{\partial}x^j}$.

Působení vektoru $\boldsymbol{a}$ na skalární funkci f, tj. derivaci f ve směru $\boldsymbol{a}$, budeme zapisovat $\boldsymbol{a}[f]$.

Definice D2.2 (Derivace ve směru)

Derivaci ve směru $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{T}_x M$ skalární funkce f definujeme

$$\boldsymbol{a}[f] = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\Big(f\big(z(\tau)\big) - f\big(z(0)\big)\Big) = \frac{d}{d\tau} f \circ z\Big|_{\tau=0} ,$$

kde $z(\tau)$ je libovolná parametrizovaná křivka vedoucí z bodu $z(0)=x$ ve směru $\boldsymbol{a}$. ∘

2.3 Tečné 1-formy a gradient

Duální prostor k prostoru tečných vektorů nazýváme *kotečný prostor* a jeho prvky *kovektory* či 1-*formy*.

Gradient funkce $\mathbf{d}f$ je zaveden pomocí působením vektoru na funkci:

$$\boldsymbol{a}[f] = \boldsymbol{a} \cdot \mathbf{d}f = \langle \mathbf{d}f, \boldsymbol{a}\rangle = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} f\ . \tag{2.1}$$

(Zde jsme pro připomenutí užili tři alternativní zápisy zúžení.) Jak je vidět, abstraktní index 1-formy $\mathbf{d}f$ umisťujeme ke znaku $\mathbf{d}$. Složky gradientu $\mathbf{d}f$ jsou parciální derivace $f_{,n}$.

Poznámka

Pro obyčejnou funkci f můžeme složky gradientu zapsat také $\mathrm{d}_n f$. Pokud však místo funkce f budeme mít složky $\omega_{a_1\ldots a_p}$ antisymetrické p-formy, bude mít zápis $\mathrm{d}_a\omega_{a_1\ldots a_p}$ význam komponent *vnější derivace* $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}$ – viz definici D4.3 a poznámky následující za ní.

Ukazuje se, že komutátor působení dvou vektorových polí na skalární funkci má charakter *derivace prvního řádu*:

Lemma V2.1

Nechť $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ jsou vektorová pole. Pak předpis

$$\boldsymbol{a}\big[\boldsymbol{b}[f]\big] - \boldsymbol{b}\big[\boldsymbol{a}[f]\big]$$

definuje lineární diferenciální operátor prvního řádu. □

To nám umožňuje definovat operaci Lieova závorka přiřazující dvojici vektorových polí pole nové:

Definice D2.3 (Lieova závorka)

Nechť $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ jsou vektorová pole. Pak předpis

$$\boldsymbol{c}[f] = \boldsymbol{a}\big[\boldsymbol{b}[f]\big] - \boldsymbol{b}\big[\boldsymbol{a}[f]\big] = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{k}}\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{k}}\big(\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{l}}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{l}} f\big) - \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{k}}\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{k}}\big(\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{l}}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{l}} f\big)$$

definuje nové vektorové pole $\boldsymbol{c}$, které budeme nazývat *Lieova závorka* $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. ∘

Věta V2.2 (Vlastnosti Lieovy závorky)
Lieova závorka splňuje následující vlastnosti:

$$\big[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\big] = -\big[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\big]\ , \qquad \text{(antisymetrie)}$$
$$\big[r\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\big] = r\big[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\big] + \big[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\big] \quad \text{pro} \quad r\in\mathbb{R}\ , \qquad \text{(linearita)}$$
$$\big[\boldsymbol{a},f\boldsymbol{b}\big] = f\big[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\big] + \boldsymbol{a}[f]\boldsymbol{b}\ , \qquad \text{(Leibniz)}$$
$$\big[\boldsymbol{a},[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]\big] + \big[\boldsymbol{b},[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]\big] + \big[\boldsymbol{c},[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\big] = 0\ . \qquad \text{(Jacobi)}$$

□

Jednoduše též ověříme, že Lieova závorka souřadnicobých polí $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial}x^i$ libovolných souřadnic $\{x^i\}$ vymizí

$$\left[\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^i},\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^j}\right] = 0\ . \tag{2.2}$$

Lieova závorka $\big[\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^i},\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^j}\big]$ působící na funkci f totiž v tomto případě dá $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}$ – na pořadí derivování však nezáleží a oba členy se vyruší.

2.4 Tečné tenzory

Prostory tečných vektorů, 1-forem a tenzorů typu (p,q) v bodě x budeme značit $\boldsymbol{T}_x M$, $\boldsymbol{T}^*_x M$ a $\boldsymbol{T}_x{}^p_q M$. Příslušné prostory polí označíme $\mathfrak{T}M$, $\mathfrak{T}^*M$ a $\mathfrak{T}^p_q M$. Prostor antisymetrických tenzorů typu $(0,p)$ v bodě x značíme $\boldsymbol{\Lambda}^p_x M$ a příslušný prostor polí $\mathcal{A}^p M$.

Obecně, prostor ***polí*** objektů patřících v bodě x do prostoru $\boldsymbol{E}_x M$ budeme značit Sect $\boldsymbol{E}M$ (jedná se o prostor řezů fibrovaného bundle $\boldsymbol{E}M$). Tj. $\mathfrak{T}M = \mathrm{Sect}\,\boldsymbol{T}M$, $\mathcal{A}^p M = \mathrm{Sect}\,\boldsymbol{\Lambda}^p M$.

Tenzorová pole jsou významné mj. proto, že pomocí nich lze reprezentovat libovolné ultralokální lineární zobrazení.

Věta V2.3 (Tenzorové pole jako ultralokální linearní zobrazení)
Libovolný tenzor-značný ultralokální lineární funkcionál na tenzorových polích lze reprezentovat tenzorovým polem.
Jinými slovy, každé zobrazení $\boldsymbol{l}$ splňující ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}\in\mathfrak{T}^m_n M$)

$$\boldsymbol{l}\ :\ \mathfrak{T}^m_n M \to \mathfrak{T}^p_q M\ , \qquad \text{(tenzor-značnost)}$$
$$\boldsymbol{l}\big(f\boldsymbol{A}\big) = f\,\boldsymbol{l}\big(\boldsymbol{A}\big) \qquad \text{pro } f\in\mathfrak{F}M\ , \qquad \text{(ultralokalita)}$$
$$\boldsymbol{l}\big(f\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\big) = f\,\boldsymbol{l}\big(\boldsymbol{A}\big)+\boldsymbol{l}\big(\boldsymbol{B}\big) \qquad \text{(linearita)}$$

lze reprezentovat tenzorovým polem $\boldsymbol{L}\in\mathfrak{T}^{p+n}_{q+m}M$

$$\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_p}_{\boldsymbol{b}_1\ldots\boldsymbol{b}_q}\big(\boldsymbol{A}\big) = \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_p\boldsymbol{c}_1\ldots\boldsymbol{c}_n}_{\boldsymbol{b}_1\ldots\boldsymbol{b}_q\boldsymbol{d}_1\ldots\boldsymbol{d}_m}\ \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{d}_1\ldots\boldsymbol{d}_m}_{\boldsymbol{c}_1\ldots\boldsymbol{c}_n}\ .$$

□

Poznámka
Tenzorové pole $\boldsymbol{L}$ je tak obvykle vysokého stupně – má abstraktní indexy odpovídající jak indexům výsledku, tak indexům všech argumentů (umístěné v ‘opačné’ poloze). Zobrazení argumentů na výsledek probíhá zúžením přes všechny indexy argumentů s odpovídajícími indexy pole $\boldsymbol{L}$.

Důkaz:
Díky ultralokalitě lze využít linearitu obdobným způsobem jako při důkazu věty V1.1 k explicitní konstrukci tenzorového pole $\boldsymbol{L}$. ■

PŘÍKLAD P2.1

Nejjednodušší aplikací této věty jsou lineární funkcionály zobrazující ultralokálně a lineárně vektorová pole na skalární funkce. Ty lze vždy reprezentovat polem 1-forem.

Příkladem byla operace derivování skalární funkce f ve směrech daných polem $\boldsymbol{a}$ – viz oddíl 2.3. Výraz $\boldsymbol{a}[f]$ je lineární a ultralokální v argumentu $\boldsymbol{a}$ a musí proto existovat 1-forma $\mathbf{d}f$, pro kterou platí

$$\boldsymbol{a}[f] = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} f\ .$$

Tuto 1-formu nazýváme gradient funkce f.

2.5 Pseudoderivace

V dalším bude velmi výhodné zavést pojem nazývaný v tomto textu jako *pseudoderivace*. V podstatě se jedná o "reprezentaci Lieovy algebry všech lokálních lineárních transformací indukovanou na tenzorová pole z reprezentace na vektorových polích" – viz marginálii M2.1. Tato charakterizace pseudoderivace však nemusí být v tento okamžik příliš srozumitelná. Vymezíme proto pseuderivaci přímo, pomocí jejích konkrétních vlastností:

Definice D2.4 (Pseudoderivace)

Zobrazení M se nazývá *pseudoderivace typu* (p,q), pokud se jedná o ultralokální lineární funkcionál zobrazující tenzorová pole libovolného typu na tenzorové pole vyššího typu, pro který navíc platí Leibnizovo pravidlo a komutace s kontrakcí:

$$\mathsf{M} \,:\, \mathfrak{T}^m_n M \to \mathfrak{T}^{m+p}_{n+q} M \quad \text{pro } m,n \text{ libovolná}\,, \tag{typ}$$

$$\mathsf{M} f = 0 \quad \text{pro } f \in \mathfrak{F} M\,, \tag{ultralokalita}$$

$$\mathsf{M}\big(f\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\big) = f\,\mathsf{M}\boldsymbol{A}+\mathsf{M}\boldsymbol{B} \tag{linearita}$$

$$\mathsf{M}\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\big) = \big(\mathsf{M}\boldsymbol{A}\big)\,\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\big(\mathsf{M}\boldsymbol{B}\big) \tag{Leibniz}$$

$$\mathsf{M}\,\mathrm{C}\boldsymbol{A} = \mathrm{C}\,\mathsf{M}\boldsymbol{A} \tag{kontrakce}$$

∘

Poznámka

Pseudoderivace tak z libovolného tenzorového pole vytvoří jiné tenzorové pole, které má o p kontravariantních a q kovariantních indexů více. Typicky $(p,q)=(0,0)$ nebo $(p,q)=(0,1)$. Tyto indexy budeme psát přímo u symbolu pseudoderivace – např. pro pseudoderivaci $\boldsymbol{\Gamma}$ typu $(0,1)$ budeme psát $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{c}}$.

Pro pseudoderivaci typu $(p,q)\neq(0,0)$ Leibnizovo pravidlo v podobě zapsaném výše není zcela přesné. Je potřeba dodat, že indexy asociované přímo s pseudoderivací zůstávají před indexy tenzorů $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$, což v definici D2.4 není splněno v posledním členu. Správně bychom měli psát indexy explicitně:

$$\mathsf{M}^{\boldsymbol{m}\dots}_{\boldsymbol{n}\dots}\big(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{a}\dots}_{\boldsymbol{c}\dots}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{b}\dots}_{\boldsymbol{d}\dots}\big) = \big(\mathsf{M}^{\boldsymbol{m}\dots}_{\boldsymbol{n}\dots}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{a}\dots}_{\boldsymbol{c}\dots}\big)\,\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{b}\dots}_{\boldsymbol{d}\dots} + \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{a}\dots}_{\boldsymbol{c}\dots}\big(\mathsf{M}^{\boldsymbol{m}\dots}_{\boldsymbol{n}\dots}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{b}\dots}_{\boldsymbol{d}\dots}\big)\,.$$

Abstraktní zápis kontrakce $\mathrm{C}\boldsymbol{A}$ (naznačené pomocí operátoru C) reprezentuje libovolnou kontrakci (zúžení) v jednom horním jednom dolním indexu. Jako důsledek dostáváme Leibnizovo pravidlo pro zúžený součin:

$$\mathsf{M}^{\boldsymbol{m}\dots}_{\boldsymbol{n}\dots}\big(\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{k}}\big) = \big(\mathsf{M}^{\boldsymbol{m}\dots}_{\boldsymbol{n}\dots}\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}\big)\,\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}\big(\mathsf{M}^{\boldsymbol{m}\dots}_{\boldsymbol{n}\dots}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{k}}\big)\,.$$

Poznámka

Název *pseudoderivace* odráží fakt, že se jedná operaci podobnou derivaci (linearita a Leibnizovo pravidlo). Předpona *pseudo* však upozorňuje, že díku ultralokalitě (tj. díky $\mathsf{M}f=0$) se o skutečnou derivaci nejedná. Jinými slovy, jedná se o derivaci v algebraickém smyslu tenzorové algebry v jednom prostoročasovém bodě.

Klíčová vlastnost pseudoderivace je, že její působení je jednoznačně dáno jejím působením na vektorových polích. Navíc, z věty V2.3 vyplývá, že akce pseudoderivace lze reprezentovat tenzorově. Vskutku, můžeme psát

Věta V2.4 (Působení pseudoderivace)

Nechť M je pseudoderivace typu $(0,0)$ jejíž působení na vektorových polích lze reprezentovat tenzorovým polem $\boldsymbol{M}\in\mathfrak{T}^1_1 M$:

$$\mathsf{M}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} \quad , \quad \boldsymbol{a}\in\mathfrak{T}M\,.$$

Pak akce pseudoderivace na tenzorové pole $\boldsymbol{A}$ typu (k,l) je

$$\begin{aligned}\mathsf{M}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_l} = \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{a}_1}_{\boldsymbol{m}}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{m}\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_l} + \dots + \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{m}}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_l}\\ - \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{b}_1}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{n}\dots\boldsymbol{b}_l} - \dots - \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{b}_l}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{n}}\,.\end{aligned}$$

M2.1 Lineární transformace na $\boldsymbol{T}M$

Grupu lineárních nedegenerovaných transformací tečného prostoru $\boldsymbol{T}_x M$ v bodě x označíme $\mathsf{GL}(\boldsymbol{T})_x M$. Prostor $\mathrm{Sect}\,\mathsf{GL}(\boldsymbol{T})M$ pak tvoří grupu *lokálních transformací*, definovaných nezávisle v každém bodě variety – vskutku, $g\in\mathrm{Sect}\,\mathsf{GL}(\boldsymbol{T})M$ definuje transformaci $g(x)\in\mathsf{GL}(\boldsymbol{T})_x M$ v každém bodě $x\in M$. Působení transformace z $\mathsf{GL}(\boldsymbol{T})_x M$ lze přirozeně reprezentovat pomocí tenzoru typu $(1,1)$: pro $g\in\mathsf{GL}(\boldsymbol{T})_x M$ existuje $\boldsymbol{T}_g\in\boldsymbol{T}_x{}^1_1 M$ zprostředkující působení g na vektory skrze zúžení:

$$g\,:\,\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}\to\boldsymbol{T}_g{}^{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}\,.$$

Pro $g\in\mathsf{GL}(\boldsymbol{T})_x M$ reprezentace $\boldsymbol{T}_g$ probíhá všechny tenzory typu $(1,1)$ s nenulovým determinantem ($\det\boldsymbol{T}_g\neq 0$).

Působení $\mathsf{GL}(\boldsymbol{T})M$ lze přirozeně rozšířit na libovolný tenzorový prostor:

$$\begin{aligned}g\,:\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{a}\dots}_{\boldsymbol{b}\dots}\to\mathbf{Tens}[\boldsymbol{T}_g]\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{a}\dots}_{\boldsymbol{b}\dots}\\ =\boldsymbol{T}_g{}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{m}}\dots\boldsymbol{T}_g{}^{-1}{}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{b}}\dots\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{m}\dots}_{\boldsymbol{n}\dots}\,.\end{aligned}$$

Generátorem transformace z $\mathsf{GL}(\boldsymbol{T})_x M$ rozumíme 'odchylku' malé transformace od identity. Formálně se jedná o prvky Lieovy algebry grupy $\mathsf{GL}(\boldsymbol{T})_x M$. Prostor generátorů označíme $\mathsf{gl}(\boldsymbol{T})_x M$. Tento prostor je opět přirozeně a věrně reprezentován na $\boldsymbol{T}_x M$ pomocí tenzorů z $\boldsymbol{T}_x{}^1_1 M$. Pro $\mathfrak{m}\in\mathsf{gl}(\boldsymbol{T})_x M$ máme $\boldsymbol{t}_{\mathfrak{m}}\in\boldsymbol{T}_x{}^1_1 M$ generující malou transformaci (odlišnou od identity v řádu ε) vztahem

$$\boldsymbol{T}_g\approx\boldsymbol{\delta}+\varepsilon\,\boldsymbol{t}_{\mathfrak{m}}+\mathcal{O}(\varepsilon^2)\,.$$

Tenzor $\boldsymbol{t}_{\mathfrak{m}}$ probíhá při měnícím se generátoru $\mathfrak{m}$ celý prostor $\boldsymbol{T}_x{}^1_1 M$.

Rozšíření reprezentace $\mathsf{gl}(\boldsymbol{T})_x M$ na libovolný tenzorový prostor $\boldsymbol{T}_x{}^k_l M$ – které označíme $\mathbf{tens}[\boldsymbol{t}_{\mathfrak{m}}]$ – je trochu složitější. Je zachyceno právě v objektu zavedeném v tomto oddíle: pomocí tzv. *pseudoderivace*.

Konečně, *algebra lokálních generátorů*, definovaných nezávisle v různých bodech variety, je přirozeně tvořena prostorem polí $\mathrm{Sect}\,\mathsf{gl}(\boldsymbol{T})M$.

Obdobně lze zapsat působení pseudoderivace M obecného typu (p,q), pouze tenzorové pole $\boldsymbol{M}$ bude mít navíc p kontravariantních a q kovariantních indexů, které nijak nezasáhnout do struktury výrazu uvedeného výše. □

DŮKAZ:
Odvodíme působení M na 1-formách (tenzorech typu $(0,1)$) a tenzorech typu $(2,0)$. Působení na tenzory obecného typu se odvodí analogicky. Mějme 1-formu $\boldsymbol{\alpha}$. Pro její zúžení s vektorovým polem $\boldsymbol{a}$ můžeme psát

$$0 = \mathsf{M}\big(\boldsymbol{\alpha}_n \boldsymbol{a}^n\big) = \boldsymbol{\alpha}_n\, \mathsf{M}\boldsymbol{a}^n + \boldsymbol{a}^n\, \mathsf{M}\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\alpha}_n \boldsymbol{M}^n_m \boldsymbol{a}^m + \boldsymbol{a}^m\, \mathsf{M}\boldsymbol{\alpha}_m \;.$$

Pole $\boldsymbol{a}$ bylo zvoleno libovolně, můžeme jej tedy 'zkrátit' a dostáváme požadovaný vztah

$$\mathsf{M}\boldsymbol{\alpha}_m = -\boldsymbol{M}^n_m \boldsymbol{\alpha}_n \;.$$

Pro tenzorový součin dvou vektorových polí $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ dostáváme

$$\mathsf{M}\big(\boldsymbol{a}^m \boldsymbol{b}^n\big) = \big(\mathsf{M}\boldsymbol{a}^m\big)\boldsymbol{b}^n + \big(\mathsf{M}\boldsymbol{b}^n\big)\boldsymbol{a}^m = \boldsymbol{M}^m_k \boldsymbol{a}^k \boldsymbol{b}^n + \boldsymbol{M}^n_k \boldsymbol{a}^m \boldsymbol{b}^k \;.$$

Platnost analogického vztahu pro libovolný tenzor typu $(2,0)$ plyne okamžitě z linearity pseudoderivace. ■

Definice D2.5 (Pseudoderivace – pokračování definice D2.4)
Pro pseudoderivaci M charakterizovanou tenzorem $\boldsymbol{M}$ podle věty V2.4 budeme psát

$$\mathsf{M} = \mathbf{tens}[\boldsymbol{M}] \;.$$

Jelikož je působení pseudoderivace ultralokální, má $\mathbf{tens}[\boldsymbol{M}]$ smysl i pro $\boldsymbol{M}$ definované pouze v bodě x. Pseudoderivace $\mathbf{tens}[\boldsymbol{M}]$ pak působí na tenzory z $\boldsymbol{T}_x{}^k_l M$. ∘

POZNÁMKA
Pokud chápeme tenzor $\boldsymbol{M}(x)$ typu $(1,1)$ v bodě x jako reprezentaci prvku $\mathfrak{m}(x)$ Lieovy algebry $\mathsf{gl}(\boldsymbol{T})_x M$ působící na tečném prostoru $\boldsymbol{T}_x M$ (tj. $\boldsymbol{M}(x) = \boldsymbol{t}_{\mathfrak{m}(x)}$ ve smyslu marginálie M2.1), pak pseudoderivace $\mathbf{tens}[\boldsymbol{M}(x)]$ dává indukovanou reprezentaci prvku $\mathfrak{m}(x)$ působící na všechny tečné tenzory.
Oprostíme-li se od konkrétního bodu variety M, můžeme tenzorové pole $\boldsymbol{M}$ typu $(1,1)$ chápat jako reprezentaci prvku $\mathfrak{m}$ lokální Lieovy algebry $\mathrm{Sect}\,\mathsf{gl}(\boldsymbol{T})M$ (viz marginálii M2.1) působící na vektorová pole a příslušnou pseudoderivaci $\mathbf{tens}[\boldsymbol{M}]$ jako indukovanou reprezentaci působící na libovolném $\mathfrak{T}^k_l M$.

Kapitola 3

Diffeomorfismy variet a Lieova derivace

3.1 Zobrazení mezi varietami

Nejdříve uvedem několik elementárních definic zavádějících pojem zobrazení mezi varietami.

Definice D3.1 (Zobrazení variet)

ϕ nazýváme hladké zobrazení variety M dimenze m na varietu N dimenze n, pokud pro každou mapu $(U, [x^i])$ na M a mapu $(V, [y^j])$ na N je složené zobrazení

$$[\tilde{\phi}^j] = [y^j] \circ \phi \circ [x^i]^{-1} \; : \; \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \; ,$$

definované na oblasti $[x^j](U \cap \phi^{-1}(V))$, hladké ve smyslu normální hladkosti zobrazení z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$. Těchto n reálných funkcí $\tilde{\phi}^j(x^i)$ od m reálných proměnných nazýváme souřadnicové vyjádření zobrazení ϕ. ◦

Poznámka

Připomeňme, že pod $[x^i]$ míníme zobrazení $M \to \mathbb{R}^m$, tj. uspořádanou m-tici souřadnicových funkcí x^i. Pak $[x^i]^{-1}$ je inverzní zobrazení z oblasti $[x^i](U)$ na $U \subset M$. Definiční obor $[x^i](U \cap \phi^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^m$ funkcí $\tilde{\phi}^j$ je vybrán tak, aby $y^j(\phi([x^i]^{-1}))$ mělo smysl.

Definice D3.2 (Diffeomorfismy)

Hladké vzájemně jednoznačné zobrazení, jehož inverze je také hladká, nazýváme *diffeomorfismus*. Diffeomorfismy variety M na sebe s operací skládání tvoří grupu, kterou označíme Diff M. ◦

Velmi často budeme operovat ne s jedním diffeomorfismem, ale se sadou diffeomorfismů parametrizovanou reálným parametrem tvořící grupu.

Definice D3.3 (Tok – jednoparametrická grupa diffeomorfismů)

ϕ_τ nazýváme *jednoparametrickou grupou diffeomorfismů* či také *tok* na varietě M s parametry z $\mathbb{R}$, pokud pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí

$$\phi_\alpha \in \mathrm{Diff}\, M \; , \qquad \phi_{\alpha+\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta \; .$$

Zřejmě $\phi_0 = \mathrm{id}$ a $\phi_{-\alpha} = {\phi_\alpha}^{-1}$. ◦

Libovolný bod $x \in M$ se pod vlivem toku ϕ_τ 'pohybuje' po varietě (tj., při měnícím se τ se zobrazuje se na $\phi_\tau x$), a to po orbitě, která nezávisí na τ. Jinými slovy, body x a $y = \phi_\alpha x$ probíhají stejnou orbitu.

Posun o obecnou hodnotu parametru lze poskládat z menších posunů. Tok tak lze charakterizovat diferenciálně.

Definice D3.4 (Generátor toku)

Vektorové pole $\boldsymbol{a}$ se nazývá *generátorem* toku ϕ_τ, pokud

$$\boldsymbol{a}(x) = \frac{\boldsymbol{D}}{d\tau}\phi_\tau x\Big|_{\tau=0} \; .$$

Naopak, jednoparametrickou grupu diffeomorfismů, jejíž generátor je pole $\boldsymbol{a}$ nazveme $\operatorname{diff}_\tau[\boldsymbol{a}]$. ∘

Tok určuje svůj generátor jednoznačně. Ale je tomu i naopak. Z vět o existenci řešení obyčejných diferenciálních rovnic plyne, že ke každému vektorovému poli existuje jednoparametrická grupa diffeomorfismů s tímto generátorem.

3.2 Zobrazení indukovaná na tečnou strukturu

Zobrazení z variety M do N indukuje zobrazení funkcí na těchto varietách a zobrazení tečných a kotečných prostorů nazývaná *push-forward* (‘*postrč vpřed*’) a *pull-back* (‘*stáhni zpět*’). Hlavní rozdíl mezi zobrazeními push-forward a pull-back je, že působí mezi varietami opačným směrem.

Začněme s indukovaným zobrazením funkcí

Definice D3.5 (Indukované zobrazení funkcí)

Nechť ϕ je hladké zobrazení M do N. Pak definujeme *indukované zobrazení pull-back*

$$\phi^* : \mathfrak{F}N \to \mathfrak{F}M \; , \quad \tilde{f} \to f = \phi^*\tilde{f}$$

požadavkem

$$(\phi^*\tilde{f})(x) = \tilde{f}(\phi x) \; , \qquad \text{tj.} \quad \phi^*\tilde{f} = \tilde{f}\circ\phi \; .$$

Pokud je ϕ diffeomorfismus variet M a N, můžeme zavést *indukované zobrazení push-forward*

$$\phi_* : \mathfrak{F}M \to \mathfrak{F}N \; , \quad f \to \tilde{f} = \phi_* f$$

jako

$$\phi_* f = (\phi^{-1})^* f = f\circ\phi^{-1} \; .$$ ∘

Slovy: transformovaná (‘push-forwardovaná’) funkce nabývá v transformovaných bodech stejných hodnot jako původní funkce v bodech původních.

Pro tečné vektory je přirozené definovat zobrazení ϕ_* působící stejným směrem jako ϕ

Definice D3.6 (Indukované zobrazení push-forward)

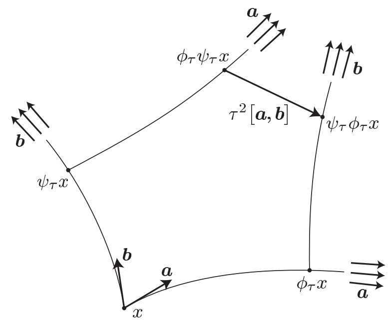
Nechť $\phi : M \to N$ je hladké zobrazení. Na tečných vektorech definujeme *indukované zobrazení push-forward*

$$\phi_* : \boldsymbol{T}_x M \to \boldsymbol{T}_{\phi x} N \; , \quad \boldsymbol{a} \to \phi_*\boldsymbol{a}$$

vztahem

$$\phi_*\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{D}\phi(z(\alpha))}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} \; ,$$

M3.1 Význam Lieových závorek



Pomocí toku můžeme nastínit geometrický význam Lieových závorek zavedených v předchozí kapitole v definici D2.3. Lieova závorka $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ dvou vektorových polí $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ vystihuje nekomutativitu toků generovanými těmito poli. Nechť $\phi_\alpha = \operatorname{diff}_\alpha[\boldsymbol{a}]$ je tok generovaný polem $\boldsymbol{a}$ a $\psi_\beta = \operatorname{diff}_\beta[\boldsymbol{b}]$ tok pole $\boldsymbol{b}$. Pokud posuneme bod x nejdříve podle $\boldsymbol{a}$ do bodu $\phi_\tau x$ a poté podle $\boldsymbol{b}$ do bodu $\psi_\tau\phi_\tau x$, dostaneme se obecně do jiného bodu než pokud posun provedeme v opačném pořadí. Rozdíl mezi těmito body charakterizuje právě Lieova závorka. Heuristicky zapsáno, platí

$$\psi_\tau\phi_\tau x - \phi_\tau\psi_\tau x \approx \tau^2\big[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\big] \; .$$

Nedefinovanému rozdílu dvou bodů se lze vyhnout, pokud vyčíslíme rozdíl hodnot skalární funkce f v těchto bodech:

$$f\big(\psi_\tau\phi_\tau x\big) - f\big(\phi_\tau\psi_\tau x\big) \approx \tau^2\big[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\big]^{\boldsymbol{n}}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} f(x) \; .$$

Důkaz je podán v dodatku 3.A.

Lieova závorka $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ tak charakterizuje, jak moc se ‘neuzavírají’ orbity dvou vektorových polí. Pokud by se ‘uzavřely’, bylo by možno definovat dvě souřadnice číslující posun ve směru obou polí – nezávisle na pořadí posunu.

Opačně, máme-li souřadnice $\{x^i\}$, souřadnicová vektorová pole $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial}x^i$ se ‘uzavírají’ což se projeví i faktem, že vzájemné Lieovy závorky vymizí

$$\Big[\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^i},\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^j}\Big] = 0$$

– viz (2.2).

Je přirozené si položit otázku: Pokud máme zadaná vektorová pole $\{\boldsymbol{a}_i\}$, $i = 1,\ldots,d$, jsou podmínky $[\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j] = 0$ dostatečné k tomu, aby tyto pole byla souřadnicová? Odpověď je alespoň lokálně *ano*. Tato otázka souvisí s tzv. Frobeniovou větou, jejíž diskuse přibude časem do této kapitoly.

kde $z(\tau)$ je libovolná parametrizovaná křivka s tečným vektorem $\boldsymbol{a}$ vedoucí z bodu x. $\circ$

Jinými slovy, indukované zobrazení převádí tečné vektory ke křivce na tečné vektory k přenesené křivce. Nezávislost definice na volbě křivky plyne z hladkosti zobrazení ϕ.

Push-forward je lineární zobrazení (viz lemma V3.3 níže) a to nám umožňuje definovat duální zobrazení na 1-formách působící opačným směrem:

Definice D3.7 (Indukované zobrazení pull-back)

Nechť $\phi\,:\,M \to N$ je hladké zobrazení. Na tečných kovektorech je definováno *indukované zobrazení pull-back*

$$\phi^*\,:\,\boldsymbol{T}^*_{\phi x}N \to \boldsymbol{T}^*_x M\;, \quad \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \to \phi^*\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$$

požadavkem, že pro libovolný vektor $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{T}_x M$ platí

$$(\phi^*\tilde{\boldsymbol{\alpha}})\cdot\boldsymbol{a} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}\cdot(\phi_*\boldsymbol{a})\;.$$ $\circ$

M3.2 Notace pro zúžení
Připomeňme ještě jednou notaci (1.3) a (1.4) pro zúžení (kontrakci). Zúžení 1-formy a vektoru z definice D3.7 můžeme též zapsat

$$\big\langle(\phi^*\tilde{\boldsymbol{\alpha}}),\boldsymbol{a}\big\rangle = \big\langle\tilde{\boldsymbol{\alpha}},(\phi_*\boldsymbol{a})\big\rangle$$

či pomocí abstraktních indexů

$$(\phi^*\tilde{\boldsymbol{\alpha}})_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{n}}\,(\phi_*\boldsymbol{a})^{\boldsymbol{n}}\;.$$

Zdůrazněme, že zúžení na levé straně probíhá v bodě x, zúžení napravo v bodě ϕx. Jelikož je takto dána akce formy $\phi^*\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ na libovolný vektor v bodě x, je tato forma dána jednoznačně.

Indukovaná zobrazení jsou záměnná s akcí „derivování ve směru", případně s operací gradient.

Lemma V3.1 (Indukovaná zobrazení a gradient)

Push-forward komutuje s derivováním ve směru

$$(\phi_*\boldsymbol{a})\big[\tilde{f}\big] = \boldsymbol{a}[\phi^*\tilde{f}]\;, \qquad \boldsymbol{a}\in\boldsymbol{T}_x M\;,\quad \tilde{f}\in\mathfrak{F}N\;,$$

neboli, pull-back komutuje s gradientem

$$\phi^*\Big(\mathbf{d}\tilde{f}\big|_{\phi x}\Big) = \mathbf{d}(\phi^*\tilde{f})\big|_x\;, \qquad \tilde{f}\in\mathfrak{F}N\;.$$ $\square$

Toto by mohla být též alternativní definice zobrazení push-forward preferující náhled na vektor jako na diferenciální operátor místo chápání vektoru jako tečného směru ke křivce. Platnost lemmatu je zřejmá z definic indukovaných zobrazení.

Podobně, komutace push-forwardu s derivací ve směru zaručuje komutaci push-forwardu a Lieových závorek

Lemma V3.2 (Indukovaná zobrazení a Lieovy závorky)

Push-forward komutuje s Liovou závorkou vektorových polí

$$\phi_*\big[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\big] = \big[\phi_*\boldsymbol{a},\phi_*\boldsymbol{b}\big]\;.$$ $\square$

Ještě nám zbývá dokázat linearitu push-forwardu. Zformulujeme ji rovnou pro obě indukovaná zobrazení

Lemma V3.3 (Linearita indukovaného zobrazení)

Push-forward ϕ_* a pull-back ϕ^* jsou lineární zobrazení na tečném, případně kotečném prostoru. $\square$

Důkaz:

Linerita pull-backu plyne z linerity push-forwardu a linearity zúžení.
Díky lemmatu V3.1 máme pro libovolnou funkci $\tilde{f}\in\mathfrak{F}N$

$$\begin{aligned}\big(\phi_*(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\big)[\tilde{f}] &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})[\phi^*\tilde{f}] = \boldsymbol{a}[\phi^*\tilde{f}] + \boldsymbol{b}[\phi^*\tilde{f}]\\ &= (\phi_*\boldsymbol{a})[\tilde{f}] + (\phi_*\boldsymbol{b})[\tilde{f}] = \big((\phi_*\boldsymbol{a})+(\phi_*\boldsymbol{b})\big)[\tilde{f}]\;.\end{aligned}$$

Tečný vektor je však determinován svým působením na funkcích – viz kapitolu 2 – a dostáváme tak linearitu $\phi_*(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \phi_*\boldsymbol{a}+\phi_*\boldsymbol{b}$. ∎

Díky linearitě můžeme indukovaná zobrazení reprezentovat tenzorově, pomocí *diferenciálu zobrazení*. Jelikož se ale jedná o lineární zobrazení mezi dvěmi obecně různými vektorovými prostory, diferenciál zobrazení není obyčejným tenzorem, ale patří do tenzorového součinu dvou různých tečných prostorů.

Definice D3.8 (Diferenciál zobrazení)

Nechť $\phi : M \to N$ je hladké zobrazení. Pak *diferenciál zobrazení*

$$\boldsymbol{D}\phi|_x \in \boldsymbol{T}^*_x M \otimes \boldsymbol{T}_{\phi x} N$$

definujeme vztahem

$$\big(\phi_* \boldsymbol{a}\big)^{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{D}^{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{a}}\phi|_x\ \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{a}}\ , \qquad \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{T}_x M\ .$$

Pomocí diferenciálu lze samozřejmě vyjádřit i pull-back formy:

$$\big(\phi^* \tilde{\boldsymbol{\alpha}}\big)_{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{D}^{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{a}}\phi|_x\ \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{z}}\ , \qquad \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \in \boldsymbol{T}^*_{\phi x} N\ .$$ ∘

Lehce nahlédneme, že diferenciál lze zapsat pomocí souřadnicového vyjádření $\tilde{\phi}^j(x^i)$ zobrazení ϕ vzhledem k souřadnicím x^i na $U \subset M$ a souřadnicím y^j na $V \subset N$:

$$\boldsymbol{D}\phi = \frac{\partial \tilde{\phi}^j}{\partial x^i}\ \mathbf{d}x^i \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} y^j}\ . \tag{3.1}$$

Cvičení C3.1

Lehce nahlédněte! ✓

Poznámka

Souřadnicové vyjádření (3.1) není zcela explicitní, implicitně se zde předpokládá dosazení ‘konzistentních argumentů’. Důsledně bychom měli psát

$$\boldsymbol{D}\phi|_z = \frac{\partial \tilde{\phi}^j}{\partial x^i}\bigg|_{x^i(z)} \mathbf{d}x^i|_z \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} y^j}\bigg|_{\phi z}\ .$$

Příklad P3.1 (Diferenciál na reálných číslech)

Příkladem diferenciálu jsou i gradient a tečný vektor. Pokud ztotožníme tečné vektory a 1-formy na varietě reálných čísel $\mathbb{R}$ s čísly samotnými, pak gradient $\mathbf{d}f$ je diferenciál zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$. Obdobně tečný vektor $\boldsymbol{D}z/d\tau$ parametrizované křivky $z(\tau)$ je diferenciál zobrazení $z : \mathbb{R} \to M$.

M3.3 Jednodimenzionální diferenciál
Pokud bychom nechtěli provádět ztotožnění předpokládané v příkladu P3.1, můžeme chápat τ jako souřadnici na jednodimenzionální varietě N a reálnou funkci $\tilde{f}$ na M chápat jako souřadnicovou hodnotu zobrazení $f : M \to N$, tj. $\tilde{f}(x) = \tau(f(x))$. Pak diferenciál f a gradient $\tilde{f}$ souvisí

$$\boldsymbol{D}f = \mathbf{d}\tilde{f}\,\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\tau}\ .$$

Parametrizovaná křivka $\tilde{z}(\tau)$ definuje zobrazení $z : N \to M$ a jeho diferenciál je dán tečným vektorem ke křivce

$$\boldsymbol{D}z = \mathbf{d}\tau\,\frac{\boldsymbol{D}\tilde{z}}{d\tau}\ .$$

Běžně mezi $\tilde{f}$ a f, případně $\tilde{z}$ a z, nerozlišujeme.

Pro diferenciál platí obvyklý vzorec pro derivování složené funkce:

Lemma V3.4

Nechť $\phi : M_1 \to M_2$ a $\psi : M_2 \to M_3$ jsou hladká zobrazení. Pro diferenciál složeného zobrazení $\phi \circ \psi$ platí

$$\boldsymbol{D}(\phi \circ \psi) = \big[(\boldsymbol{D}\phi) \circ \psi\big] \cdot \boldsymbol{D}\psi\ .$$

Tečka zde naznačuje zúžení v tečných prostorech variety M_2. Zapsáno pomocí indexů:

$$\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{a}}(\phi \circ \psi)\big|_x = \boldsymbol{D}^{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{n}}\phi\big|_{\psi x}\ \boldsymbol{D}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{a}}\psi\big|_x\ .$$ □

Zobrazení push-forward lze zobecnit na zobrazení tečných tenzorů typu $(p, 0)$ a zobrazení pull-back na tenzory typu $(0, p)$ požadavkem, že komutují s tenzorovým součinem. Máme tedy definováno

$$\phi_*\ :\ \boldsymbol{T}_x{}^p_0 M \to \boldsymbol{T}_{\phi x}{}^p_0 N\ , \qquad \phi^*\ :\ \boldsymbol{T}_{\phi x}{}^0_p N \to \boldsymbol{T}_x{}^0_p M\ . \tag{3.2}$$

Vzhledem k tomu, že push-forward a pull-back působí opačnými směry, nemůžeme je pro obecné zobrazení zkombinovat a definovat indukované zobrazení pro tenzory smíšeného typu.

Situace je ale odlišná pokud je ϕ diffeomorfismus. Pak můžeme dodefinovat push-forward i pro formy a pull-back pro vektory požadavkem, aby si tyto dvě zobrazení odpovídala při záměně ϕ na ϕ^{-1}.

Definice D3.9 (Indukované zobrazení diffeomorfismu)
Nechť $\phi : M \to N$ je diffeomorfismus. Potom definujeme

$$\phi_* : \boldsymbol{T}^*_x M \to \boldsymbol{T}^*_{\phi x} N \,, \qquad \phi_* = (\phi^{-1})^* \,,$$
$$\phi^* : \boldsymbol{T}_{\phi x} N \to \boldsymbol{T}_x M \,, \qquad \phi^* = (\phi^{-1})_* \,.$$

Na tenzory libovolného typu tyto zobrazení rozšíříme požadavkem komutace s tenzorovým násobením. ◦

Doposud jsme transformovali tenzorové objekty lokalizované v jednotlivých bodech. Obecně vzor a obraz těchto zobrazení neleží ve stejném tenzorovém prostoru – jedná se tenzory v různých bodech (v principu) různých variet. V případě diffeomorfismu variety na sebe je ale možné definovat zobrazení mezi tenzorovými poli, které převádí pole na pole *stejného typu*. Tenzorové pole lze chápat jako funkci nabývající hodnot v tečných prostorech. Při transformaci pole použijeme stejný princip jako u skalárních funkcí (definice D3.5), musíme ale navíc transformovat i funkční hodnotu.

Definice D3.10 (Indukované zobrazení tenzorových polí)
Nechť $\phi \in \operatorname{Diff} M$. *Indukované zobrazení*

$$\phi_* : \mathfrak{T}^k_l M \to \mathfrak{T}^k_l M \,, \quad \boldsymbol{A} \to \phi_* \boldsymbol{A}$$

definujeme

$$(\phi_* \boldsymbol{A})(x) = \phi_*\big(\boldsymbol{A}(\phi^{-1} x)\big) \,.$$ ◦

Indukované zobrazení na tenzorových polích je zřejmě lineární (i vzhledem k násobení funkcí) a komutuje s tenzorovým součinem a zúžením. Pomocí diferenciálu $\boldsymbol{D}\phi$ lze transformované pole zapsat následovně:

$$(\phi_* \boldsymbol{A})^{\boldsymbol{a}\dots}_{\boldsymbol{b}\dots} = \boldsymbol{D}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{m}} \phi \circ \phi^{-1} \dots \; \boldsymbol{D}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{b}} \phi^{-1} \dots \; \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{m}\dots}_{\boldsymbol{n}\dots} \circ \phi^{-1} \,. \tag{3.3}$$

Poznámka
Poznamenejme, že trochu ‘přeplácaný’ shluk symbolů $\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{m}} \phi \circ \phi^{-1}$ (vyčíslený v bodě x) značí složení $\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{m}} \phi$ a ϕ^{-1}, tj. ‘oindexovaný’ diferenciál $\boldsymbol{D}\phi$ vyčíslený v bodě $\phi^{-1}x$. Obdobně je nutno číst $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{m}\dots}_{\boldsymbol{n}\dots} \circ \phi^{-1}$. Při běžném užívání se většinou inverzní zobrazení ϕ^{-1} v argumentech nepíše a předpokládá se implicitně, na základě kontextu.

3.3 Lieova derivace

Doposud jsme zavedli pouze jeden způsob derivování ‘polí’ na varietě – derivování skalární funkce ve směru daného vektoru (a samozřejmě s tímto související gradient funkce). Bohužel, tento koncept nelze jednoduše zobecnit na složitější objekty – na tenzorová pole. Na varietě neumíme odčítat tenzory v různých bodech a nemůžeme tak přímočaře zavést ‘derivaci ve směru’ tenzorového pole $\boldsymbol{A}(x)$ analogicky definici D2.2:

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \Big(\boldsymbol{A}\big(z(\tau)\big) - \boldsymbol{A}\big(z(0)\big) \Big) \,. \tag{3.4}$$

Aby takováto definice měla smysl, musíme nějakým způsobem ‘přenést’ tenzory $\boldsymbol{A}\big(z(\tau)\big)$ a $\boldsymbol{A}\big(z(0)\big)$ do stejného bodu. V této kapitole jsme se ale naučili tenzory přenášet – totiž pomocí indukovaného zobrazení toku.

M3.4 Jak a co umíme doposud derivovat?
Vedle gradientu a derivování funkce ve směru jsme se setkali ještě s dvěma operacemi, které jsou úzce spojené s derivováním.
Za prvé, Lieovy závorky mají charakter derivace v obou svých argumentech – splňují pravidlo pro derivování součinu funkce a vektorového pole a ‘součinu’ dvou vektorů (kde ‘součin’ vektorů je míněna jejich Lieova závorka).
Za druhé, diferenciál zobrazení zavedený v předchozí sekci má též charakter derivování. Ale jelikož se v tomto případě derivuje zobrazení mezi dvěma varietami a výsledek je smíšený tenzor tečný k těmto dvěma varieatám„ nejedná se zde o derivaci obyčejné ‘polní veličiny’.

Pokud máme na varietě zadaný tok (definice D3.3), je přirozené se ptát jak se mění tenzorové pole při posunutí podél tohoto toku. Tok nám za prvé určuje směr, ve kterém se posuneme ze zvoleného bodu. Ale nejen to. Tok také určuje, jak se posouvají všechny body v okolí tohoto bodu a tím i určuje jak se posouvají objekty z tečných prostorů. Tečné prostory v různých bodech totiž můžeme identifikovat pomocí push-forwardu indukovaného tokem. Intuitivně to znamená, že pomocí toku 'přenášíme' i 'přístroje' (přesně řečeno: prvky báze), se kterými 'měříme' či 'popisujeme' objekty v tečných prostorech. Tj. tenzor prohlásíme za 'stejný', pokud má stejné souřadnice vzhledem k přenesené bázi. Což je ekvivalentní tomu, že je přenesen pomocí zadaného toku.

Jelikož nás hlavně zajímá změna při malých posunutí (tj. derivace pole), tak je přirozené zadat tok pomocí jeho generátoru – pomocí vektorového pole určujícího 'směr' toku. Derivace měřící *změnu* tenzorového pole při posunu podél takto zadaného toku se nazývá *Lieova derivace*.

Definice D3.11 (Lieova derivace)

Nechť $\boldsymbol{A}$ je tenzorové pole, $\boldsymbol{v}$ vektorové pole definovaná na okolí bodu x a nechť $\phi_\tau = \mathrm{diff}_\tau[\boldsymbol{v}]$ je tok (jednoparametrická grupa difeomorfismů) s generátorem $\boldsymbol{v}$. *Lieova derivace* $\pounds_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{A}$ pole $\boldsymbol{A}$ podél vektorového pole $\boldsymbol{v}$ je definována:

$$\pounds_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{A}\big|_x = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\Big(\phi_{\tau*}^{-1}\,\boldsymbol{A}(\phi_\tau x) - \boldsymbol{A}(x)\Big)\,.$$

Při použití tenzorových indexů budeme psát $\big(\pounds_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{A}\big)^{\boldsymbol{b}\dots}_{\boldsymbol{c}\dots}$ nebo prostě $\pounds_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{b}\dots}_{\boldsymbol{c}\dots}$. Souřadnice výsledku Lieova derivovaní zapíšeme $\big(\pounds_{\boldsymbol{a}}A\big)^{b\dots}_{c\dots}$ a v tomto případě závorky nebudeme vynechávat. ◦

POZNÁMKA

Výraz bez závorek $\pounds_{\boldsymbol{v}}A^{b\dots}_{c\dots}$ si ponecháme pro naznačení derivování souřadnic $A^{b\dots}_{c\dots}$ tenzorového pole. Jak hned uvidíme, to je rovno $\boldsymbol{a}[A^{b\dots}_{c\dots}]$.

Použitím definice D3.10 indukovaného zobrazení polí a faktu, že $\phi_\tau^{-1} = \phi_{-\tau}$ můžeme Lieovu derivaci též přepsat v řeči polí:

$$\pounds_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{A} = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\Big(\phi_{\tau*}^{-1}\,\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\Big) = -\frac{d}{d\tau}\big(\phi_{\tau*}\,\boldsymbol{A}\big)\Big|_{\tau=0}\,. \tag{3.5}$$

Vidíme, že se zde využívá faktu, že indukované zobrazení $\phi_{\tau*}$ převádí tenzorová pole na pole stejného typu – ze stejného lineárního prostoru $\mathfrak{T}M$. Derivace na pravé straně (3.5) má tak smysl.

Zdůrazněme ještě jednou, že Lieova derivace je definována podél *vektorového pole* – nestačí zadat pouze *směr* (jeden vektor), ve kterém chceme derivovat. Musíme zadat navíc tok, který nám umožní přenášet tenzory z bodu do bodu – a k tomu potřebujeme vektorové pole v celém okolí zkoumaného bodu.

Lieova derivace má obvyklé vlastnosti derivací:

Věta V3.5 (Lieova derivace)

Lieova derivace podél $\boldsymbol{a} \in \mathfrak{T}M$ je lineární

$$\pounds_{\boldsymbol{a}}\big(\boldsymbol{A} + r\boldsymbol{B}\big) = \pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{A} + r\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{B}\,, \tag{i}$$

splňuje pravidlo pro derivování součinu

$$\pounds_{\boldsymbol{a}}\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\big) = \big(\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{A}\big)\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\,\big(\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{B}\big) \tag{ii}$$

M3.5 Lieova derivace a symetrie

Lieova derivace hraje důležitou roli hlavně při zkoumání symetrií. Z jejího zavedení je zřejmé, že jakákoli kvantita popsaná tenzorovým polem $\boldsymbol{A}$ je neměnná při posunu podél toku ϕ_τ, pokud její Lieova derivace $\pounds_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{A}$ podle generátoru toku $\boldsymbol{v}$ vymizí. V takovém případě říkáme, že tok ϕ_τ je symetrií pole $\boldsymbol{A}$.

Pro skalární funkce tato podmínka znamená, že funkce musí být konstantní podél orbit toku. Složitější tenzorová pole obecně nemají, žádnou symetrii. Podmínka existence symetrie může tak výrazně zúžit výběr zkoumaného tenzorového pole.

V kapitole 6, oddíle 6.5 se budeme zabývat symetriemi metriky. Generátorům těchto symetrií se říká *Killingovy vektory*. Symetrie lorentzovských metrik jsou velmi důležité v obecné teorii relativity a to jak při interpretaci prostoročasových geometrií, tak při samotném hledání řešení Einsteinových gravitačních rovnic. Je známo jen velmi málo přesných řešení těchto rovnic, která by neměla žádnou symetrii.

Symetrie hrají podstatnou roli také v teorii kalibračních polí (zde se jedná o symetrie na jistém fibrovaném bundlu vnitřních stupňů volnosti).

Lieova derivace se dále využívá např. v geometrické formulaci teoretické mechaniky, kde se pomocí ní zapisují Lagrangeovy rovnice či identifikují kanonické transformace.

a na funkcích působí jako obyčejná derivace ve směru

$$\pounds_{\boldsymbol{a}} f = \boldsymbol{a}[f] = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} f\ . \tag{iii}$$

Zde $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou libovolná tenzorová pole, f skalární funkce a $r \in \mathbb{R}$.□

DŮKAZ:
Tyto vlastnosti přímo plynou z vlastností derivace na pravé straně (3.5).■

Lieova derivace komutuje s gradientem

Věta V3.6 (Lieova derivace a gradient)
Pro $\boldsymbol{a} \in \mathfrak{T}M$ a $f \in \mathfrak{F}M$ platí

$$\pounds_{\boldsymbol{a}}\, \mathbf{d}f = \mathbf{d}\pounds_{\boldsymbol{a}} f$$ □

DŮKAZ:
Jedná se o diferenciální vyjádření lemmatu V3.1. Pokud zderivujeme podle τ vztah $\phi_{\tau *}\mathbf{d}f = \mathbf{d}\,\phi_{\tau *}f$, kde $\phi_\tau = \operatorname{diff}_\tau[\boldsymbol{a}]$ je tok s generátorem $\boldsymbol{a}$, dostaneme dokazované tvrzení. ■

Lieova derivace vektorového pole vede na operaci, kterou již známe – na Lieovu závorku:

Věta V3.7 (Lieova derivace vektoru)
Pro dvě vektorová pole $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ platí

$$\pounds_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\ .$$ □

DŮKAZ:
Zúžíme $\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ s gradientem libovolné funkce a s použitím vět V3.5, V3.6 a definice Lieovy závorky D2.3 dostaneme

$$\begin{aligned}\big(\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}\big)^{\boldsymbol{n}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} f &= \pounds_{\boldsymbol{a}}\big(\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} f\big) - \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}\, \pounds_{\boldsymbol{a}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} f \\ &= \pounds_{\boldsymbol{a}}\big(\boldsymbol{b}[f]\big) - \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} \pounds_{\boldsymbol{a}} f = \boldsymbol{a}\big[\boldsymbol{b}[f]\big] - \boldsymbol{b}\big[\boldsymbol{a}[f]\big] = [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]^{\boldsymbol{n}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} f\ .\end{aligned}$$

'Zkrácením' gradientu $\mathbf{d}f$ dostaneme tvrzení věty. ■

Lieova závorka se vůči Lieově derivaci chová též jako součin - můžeme zformulovat pravidlo pro derivování součinu:

Lemma V3.8 (Lieova derivace Lieových závorek)
Pro vektorová pole $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ platí

$$\pounds_{\boldsymbol{c}}\big[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\big] = \big[\pounds_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\big] + \big[\boldsymbol{a}, \pounds_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b}\big]\ .$$ □

DŮKAZ:
Plyne z komutace push-forwardu $\phi_{\tau *}$ a Lieových závorek V3.2. Zderivováním $\phi_{\tau *}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = [\phi_{\tau *}\boldsymbol{a}, \phi_{\tau *}\boldsymbol{b}]$ podle τ dá vztah (3.5) požadované tvrzení.

Alternativně, pomocí věty V3.7 nalezneme, že dokazované tvrzení je ekvivalentní Jacobiho identitě pro Lieovy závorky. ■

Tyto vlastnosti nám již umožní spočítat derivaci libovolného tenzororového pole. To lze totiž vždy rozepsat jako lineární kombinaci prvků souřadnicové báze. A ty jsou tvořené tenzorovým součinem souřadnicových vektorů a 1-forem, které již umíme zderivovat podle předcházejících dvou vět.

Speciálně se nám výpočet zjednoduší, pokud použijeme souřadnice x^i, které jsou přizpůsobené vektorovému poli $\boldsymbol{a}$, podle kterého derivujeme. To znamená takové souřadnice, pro které $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial} x^1 = \boldsymbol{a}$. Souřadnice $x^2, \dots, x^d$ (d je dimenze variety) jsou pak konstantní podél orbit toku generovaného polem $\boldsymbol{a}$ a privilegovaná souřadnice x^1

parametrizuje ‘posun’ pomocí toku. Jelikož Lieovy závorky souřadnicových polí jsou nulové a derivace souřadnicových funkcí ve směru $\boldsymbol{a}$ konstantní (1 nebo 0), tak $\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial}x^i = 0$ a $\pounds_{\boldsymbol{a}}\,\mathbf{d}x^i = 0$. Derivace libovolného tenzorového pole se nám tedy redukuje na pouhou parciální derivaci jeho souřadnic

$$\big(\pounds_{\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^1}} A\big)^{b\dots}_{c\dots} = A^{b\dots}_{c\dots\,,1}\ . \tag{3.6}$$

M3.6 Značení parciální derivace
Pouze připomeneme značení zavedené v předchozí kapitole v definici D2.1: čárka v dolních souřadnicových indexech značí parciální derivaci

$$A^{b\dots}_{c\dots\,,1} = \frac{\partial A^{b\dots}_{c\dots}}{\partial x^1}\ .$$

Nakonec ukážeme, že Lieova derivace působící na obecná tenzorová pole reprezentuje Lieovu algebru vektorových polí

Věta V3.9 (Komutátor Lieových derivací)
Pro libovolná vektorová pole $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ platí

$$\pounds_{\boldsymbol{a}}\pounds_{\boldsymbol{b}} - \pounds_{\boldsymbol{b}}\pounds_{\boldsymbol{a}} = \pounds_{[\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b}]}\ ,$$

kde Lieovy derivace mohou působit na obecné tenzorové pole. □

Důkaz:
Nejdříve dokážeme, že operátor $\mathsf{L} = \pounds_{\boldsymbol{a}}\pounds_{\boldsymbol{b}} - \pounds_{\boldsymbol{b}}\pounds_{\boldsymbol{a}} - \pounds_{[\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b}]}$ je pseudoderivace. Zřejmě se jedná o operátor lineární vůči součtu a násobení konstantním číslem. Ultralokalita (anihilace skalární funkce) plyne z definice Lieovy derivace D3.11. Zbývá ověřit Leibnizovo pravidlo:

$$\begin{aligned}
\mathsf{L}(\boldsymbol{AB}) &= \pounds_{\boldsymbol{a}}\Big((\pounds_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\pounds_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{B})\Big) - \pounds_{\boldsymbol{b}}\Big((\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{B})\Big)\\
&\quad - (\pounds_{[\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b}]}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}(\pounds_{[\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b}]}\boldsymbol{B})\\
&= (\mathsf{L}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\mathsf{L}\boldsymbol{B}) + (\pounds_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{A})(\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{B}) + (\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{A})(\pounds_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{B})\\
&\quad - (\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{A})(\pounds_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{B}) - (\pounds_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{A})(\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{B})\\
&= (\mathsf{L}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\mathsf{L}\boldsymbol{B})
\end{aligned}$$

Pseudoderivace je plně dána svojí akcí na vektorech (věta V2.4). Pro vektorové pole $\boldsymbol{c}$ však platí $\mathsf{L}\boldsymbol{c} = 0$, jak ověříme opakovaným užitím věty V3.7 a Jacobiho identity pro Lieovy závorky (věta V2.2). Musí tedy platit $\mathsf{L} = 0$, což jsme chtěli dokázat. ■

V příštích kapitolách postupně vyjádříme Lieovu derivaci ještě několika dalšími způsoby. Lieovu derivaci antisymetrických forem např. zapíšeme pomocí vnější derivace (viz větu V4.3 a lemma V4.2). Vztah Lieovy a kovariantní derivace lze nalézt ve větě V7.19 v kapitole 7 a Lieova derivace vektové hustoty bude rovna její divergenci (viz kapitolu 10).

3.4 Podvariety

Intuitivně je koncept podvariety – variety ‘vložené’ do větší variety – jasný. Při přesné definici však můžeme narazit na určitá úskalí. Podvariata znamená totiž více než jen podprostor v množinovém či topologickém smyslu. Býti podvarietou s sebou také nese informaci o diferencovatelné struktuře a vztahu tečných struktur ‘velké’ a ‘vložené’ variety. Toto vložení musí být ‘slušné’, nesmí nikde ‘degenerovat’. Abychom tento rys podchytili, musíme nejdříve zavést několik nových pojmů trochu techničtější povahy.

Definice D3.12 (Lokální vlastnosti zobrazení)
Hladké zobrazení $\phi :\ N \to M$ budeme nazývat *lokálně prosté (injektivní) v bodě* $x \in N$, pokud push-forward $\phi_*|_x$ je prosté zobrazení

tečného prostoru $\boldsymbol{T}_x N$ do $\boldsymbol{T}_{\phi x} M$. Jinými slovy, ϕ je v bodě x lokálně prosté, pokud $\ker \phi_*|_x = \{\mathbf{0}\}$.
Zobrazení ϕ nazveme *v bodě $x \in N$ lokálně surjektivní* či *lokálně „na"*, pokud $\operatorname{img} \phi_*|_x = \boldsymbol{T}_{\phi x} M$. ∘

Zřejmě ϕ může být lokálně prosté pouze pokud $\dim N \leq \dim M$ a lokálně surjektivní pokud $\dim N \geq \dim M$. Tyto pojmy (zejména lokální injekce) zachycují lokálně, kolem jednoho bodu, význam *nedegenerovaného* vnoření jedné variety v druhou. Zhruba řečeno, tečný prostor vzorové variety se nesmí při zobrazení zmenšit. Nesmí v daném bodě existovat směry, které po zobrazení zdegenerují. Chceme, aby každému směru z daného bodu odpovídal po zobrazení opět nějaký netriviální směr v cílové varietě. Varieta se při zobrazení nesmí v daném bodě 'singulárně zdrcnout'.

Geometrický význam definovaných pojmů dále osvětlí teorém plynoucí z věty o implicitní funkci:

Věta V3.10 (Lokálně přizpůsobené souřadnice)

Nechť zobrazení $\phi : N \to M$ je hladké, $m = \dim M$ a $n = \dim N$. Platí:

(i) Pokud je ϕ lokálně prosté v bodě $z \in N$, pak
- exituje okolí V bodu z, na kterém je ϕ prosté,
- pro každé souřadnice y^i $(i = 1, \dots, n)$ na okolí V lze na nějakém okolí U bodu ϕz zavést souřadnice x^j $(j = 1, \dots, m)$ tak, že pro $w \in V$ platí

$$
\begin{aligned}
x^i(\phi w) &= y^i(w) , \qquad && \text{pro } i = 1, \dots, n , \\
x^j(\phi w) &= 0 , && \text{pro } j = n+1, \dots, m .
\end{aligned}
$$

(ii) Pokud je ϕ lokálně surjektivní v bodě $z \in N$, pak
- exituje okolí V bodu z takové, že $U = \phi(V)$ je okolí bodu $\phi z \in M$,
- pro každé souřadnicemi x^j $(j = 1, \dots, m)$, na U existují souřadnice y^i, $i = 1, \dots, n$, na V tak, že pro $w \in V$ platí

$$
x^j(\phi w) = y^j(w) , \qquad \text{pro } j = 1, \dots, m .
$$

(iii) Pokud je ϕ v bodě z lokálně prosté i surjektivní, pak exituje okolí V bodu z, na kterém je ϕ diffeomorfismus.

Souřadnicím zavedeným v (i) a (ii) říkáme *souřadnice přizpůsobené zobrazení ϕ*. □

Poznámka

Připomeňme, že pod okolím bodu míníme *otevřenou* množinu obsahující tento bod. Díky tomu je první tvrzení bodu (ii) netriviální.

Lokálně prosté zobrazení ve zvoleném bodě tak převádí malé okolí tohoto bodu na podmnožinu cílové variety takovým způsobem, že se zachovává tečná struktura i pojem hladkosti v okolí zvoleného bodu. Vzor a obraz jsou blízko daného bodu diffeomorfní, z hlediska struktury variet si jsou ekvivalentní.

Koncept lokální prostoty můžeme nyní 'globalizovat':

Definice D3.13 (Vnoření a vložení)

Hladké zobrazení $\iota : N \to M$ se nazývá *vnoření N do M*, pokud je toto zobrazení v každém bodě variety N lokálně prosté.
Je-li ι navíc prosté, nazývá se *vložení N do M*. ∘

Vnoření tak vyžaduje 'lokální nedegenerovanost' (jistou 'nezdrclost') tečné struktury na vzorové varietě N z hlediska tečné struktury cílové variety M. Vnoření ale v principu připouští, aby vnořená varieta protínala sama sebe. Tato možnost ukazuje na význam rozlišování mezi vzorovou varietou N a jejím obrazem $\iota(N) \subset M$. Ač jsou tyto dva prostory lokálně stejné, globální obraz $\iota(N)$ nemusí být varietou. Diferencovatelná a tečná struktura vnořované variety je tak zachycena na varietě N, ne nutně v jejím obraze. Pokud totiž vnoření není globálně prosté, vnořená varieta sama sebe protíná (či se sama sebe dotýká) a v těchto kritických bodech nemá její obraz strukturu variety.

Vložení oproti vnoření vyžaduje navíc právě globální prostotu (injektivnost). Jedná se tedy o koncept jež definuje pojem vložené podvariety:

Definice D3.14 (Podvarieta)

Pokud je ι vložení variety $\tilde{N}$ do M, nazýváme obraz $N = \iota(\tilde{N})$ *podvarietou* variety M. Prostory N a $\tilde{N}$ se často nerozlišují.
Kodimenzí podvariety N nazýváme rozdíl dimenzí $\dim M - \dim N$. ∘

Definice D3.15 (Souřadnice lokálně přizpůsobené podvarietě)

Mějme podvarietu N dimenze $d-n$ variety M dimenze d. Souřadnicím x^i, $i = 1, \dots, d$ na M říkáme, že jsou *lokálně přizpůsobené* (či jen *přizpůsobené*) *podvarietě* N pokud

$$\begin{aligned} &x^i|_N = 0 \qquad \text{pro} \quad i = 1, \dots, n\,, \\ &x^i|_N\,, \quad i = n{+}1, \dots, d \quad \text{tvoří souřadný systém na N}\,. \end{aligned}$$

Existence takových souřadnic je zaručena větou V3.10. ∘

Lokálně přizpůsobené souřadnice demonstrují fakt, že N má strukturu variety (indukovanou z variety $\tilde{N}$) kompatabilní se strukturou okolní variety M.

Zdůrazněme ale, že je nutno odlišovat tečné struktury ve smyslu podvariety N a ve smyslu okolní variety M. Vektory tečné k N sice můžeme identifikovat s vektory patřící do (podprostoru) tečného prostoru $\boldsymbol{T}M$ (pomocí zobrazení push-foward, které je prosté), to samé ale nelze učinit s 1-formami. Pokud je dimenze podvariety menší než dimenze okolní variety, pro 1-formy nemáme push-forward k dispozici. A zobrazení pull-back stahující 1-formy z $\boldsymbol{T}^*M$ zpět do $\boldsymbol{T}^*N$ není prosté ($\dim\ker\phi^* = \dim M - \dim N$). Proto musíme rozlišovat mezi tenzory ve smyslu variety M a ve smyslu podvariety N – přestože oba typy tenzorů jsou 'lokalizované' v jednom bodě.

Pull-back forem umožňuje pouze definovat *restrikci* formy na podvarietu.

Definice D3.16 (Restrikce formy na podvarietu)

Mějme podvarietu $N = \iota(\tilde{N})$ variety M danou vnořením ι. Restrikcí $\boldsymbol{\omega}|_N \in \boldsymbol{T}_{x\,p}^{\,0}N$ formy $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{T}_{x\,p}^{\,0}M$ definované v bodě $x \in M$ ležícím na podvarietě N míníme pull-back formy na N

$$\boldsymbol{\omega}|_N = \iota^* \boldsymbol{\omega}\,. \qquad \circ$$

Zřejmě restrikce $\boldsymbol{\omega}|_N$ působí na vektorech tečných k N stejně jako původní forma $\boldsymbol{\omega}$ na stejných vektorech chápaných jako prvky tečného prostoru k M.

M3.7 Vložení, vnoření a injekce

Rozdíly mezi vložením, vnořením, prostým a pouze hladkým zobrazením jsou poměrně jemné. Dokumentujeme si je na jednoduchém příkladě zobrazení jednodimenziální variety $N \cong \mathbb{R}^1$ se souřadnicí t do roviny $M \cong \mathbb{R}^2$ se souřadnicemi $[x^1, x^2]$. Souřadnicové vyjádření zobrazení ϕ označíme $\tilde{\phi}^1$ a $\tilde{\phi}^2$ (viz definici D3.1). Označme ještě o bod z N, pro který $t(o) = 0$.

Zobrazení ϕ nebude hladké, pokud má obraz $\phi(N)$ v M 'rohy'. Např. zobrazení dané vztahy $\tilde{\phi}^1(t) = t$, $\tilde{\phi}^2(t) = 0$ pro $t < 0$ a $\tilde{\phi}^1(t) = 0$, $\tilde{\phi}^2(t) = t$ pro $t > 0$ není hladké v bodě o.

Zobrazení ϕ ale nemusí být hladké i pokud jeho obraz 'rohy nemá' – hladkost závisí také na tom, jak rychle (a hladce) 'ubíhají' souřadnice na N z hlediska souřadnic na M. Např. pro funkce $\tilde{\phi}^1(t) = |t|$, $\tilde{\phi}^2(t) = 0$ není ϕ hladké v bodě o – nelze zde totiž ani definovat diferenciál $\boldsymbol{D}\phi|_o$.

Obecné hladké zobrazení nemusí být prosté ani lokálně prosté. Např. pro funkce $\tilde{\phi}^1(t) = \cos t$, $\tilde{\phi}^2(t) = 0$ není zobrazení ϕ lokálně prosté v bodech 'obratu', tj. tam, kde $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. V těchto bodech push-forward degeneruje na triviální zobrazení $\phi_* \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, tj. např. v bodě o máme $\boldsymbol{D}\phi|_o = \boldsymbol{0}$.

Hladké zobrazení může být prosté, a zároveň ne v každém bodě lokálně prosté. Např. pro funkce $\tilde{\phi}^1(t) = t^3$, $\tilde{\phi}^2(t) = 0$ je zobrazení ϕ prosté, ale není lokálně prosté v bodě o. Opět, v tomto bodě máme $\boldsymbol{D}\phi|_o = \boldsymbol{0}$.

Naopak, vnoření – zobrazení všude lokálně prosté – nemusí být prosté. Např. funkce $\tilde{\phi}^1(t) = \cos t$, $\tilde{\phi}^2(t) = \sin t$ dávají lokálně prosté zobrazené ϕ, ale díky periodicitě funkcí vzor každého bodu z $\phi(N)$ je tvořen nekonečně body v N. Lze samozřejmě zkonstruovat i vnoření, která nejsou prostá třeba jen v jednom bodě (vnořená varieta protíná sama sebe v jednom bodě).

Konečně příkladem vložení je zobrazení dané funkcemi $\tilde{\phi}^1(t) = t$, $\tilde{\phi}^2(t) = 0$, které definuje podvarietu „osu x^1".

3.A Geometrický význam Lieovy závorky

Chceme dokázat tvrzení marginálie M3.1

Lemma V3.11 (Význam Lieovy závorky)

Mějme dvě vektorová pole $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, která generují toky $\phi_\alpha = \mathrm{diff}_\alpha[\boldsymbol{a}]$ a $\psi_\beta = \mathrm{diff}_\beta[\boldsymbol{b}]$. Nekomutativita těchto toků je charakterizována Lieovou závorkou. Konkrétně, pro libovolnou funkci f platí

$$f\big(\psi_\tau\phi_\tau x\big) - f\big(\phi_\tau\psi_\tau x\big) = \tau^2\big[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\big]^{\boldsymbol{n}}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}}f(x) + \mathcal{O}(\tau^3)\;. \qquad \square$$

Důkaz:

Pro zjednodušení zápisu definujme funkce $a(\alpha,\beta)$, $b(\beta,\alpha)$ dvou proměnných:

$$a(\alpha,\beta) = f\big(\phi_\alpha\psi_\beta x\big)\;,\quad b(\beta,\alpha) = f\big(\psi_\beta\phi_\alpha x\big)\;.$$

Nyní budeme chtít nalézt rozvoj těchto funkcí okolo bodu $\alpha=\beta=0$. Nulté členy rozvoje jsou přímo hodnoty obou funkcí:

$$a(0,0) = b(0,0) = f(x)\;.$$

Jelikož funkce a, b závisí na α, β pouze skrze argument $\phi_\alpha\psi_\beta x$ či $\psi_\beta\phi_\alpha x$, parciální derivace podle jednotlivých proměnných jsou derivace ve směru polí $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$, respektive 'posunutých' polí $\phi_{\alpha*}\boldsymbol{b}$ a $\psi_{\beta*}\boldsymbol{a}$. Vskutku, tečný vektor křivky $u_\beta(\alpha) = \phi_\alpha\psi_\beta x$ (s parametrem α) je $\boldsymbol{a}|_{u_\beta(\alpha)}$, kdežto tečný vektor křivky $\tilde{v}_\alpha(\beta) = \phi_\alpha\psi_\beta x$ (s parametrem β) je $\phi_{\alpha*}\boldsymbol{b}|_{\tilde{v}_\alpha(\beta)}$. Obdobně pro prohozená pole $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ – viz obrázky na této stránce. První parciální derivace funkcí a a b tedy jsou:

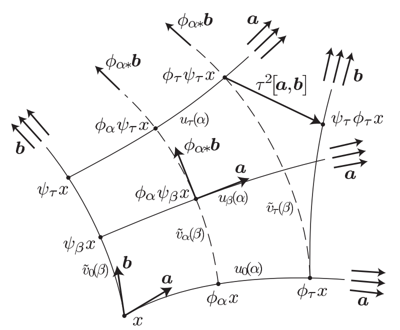
$$\frac{\partial a}{\partial\alpha}(\alpha,\beta) = \big(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{d}f\big)\big|_{\phi_\alpha\psi_\beta x}\;,\quad \frac{\partial a}{\partial\beta}(\alpha,\beta) = \big((\phi_{\alpha*}\boldsymbol{b})\cdot\mathbf{d}f\big)\big|_{\phi_\alpha\psi_\beta x}\;,$$
$$\frac{\partial b}{\partial\beta}(\beta,\alpha) = \big(\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{d}f\big)\big|_{\psi_\beta\phi_\alpha x}\;,\quad \frac{\partial b}{\partial\alpha}(\beta,\alpha) = \big((\psi_{\beta*}\boldsymbol{a})\cdot\mathbf{d}f\big)\big|_{\psi_\beta\phi_\alpha x}\;.$$

Druhé parciální derivace se mohou spočíst stejným způsobem, pokud první derivace závisí na parametru druhého derivování opět pouze skrze argument $\phi_\alpha\psi_\beta x$ či $\psi_\beta\phi_\alpha x$. To je splněno pro derivace $\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}$ a $\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$, ve smíšených derivacích podle α i β toho lze dosáhnout správným pořadím derivování. Dostáváme:

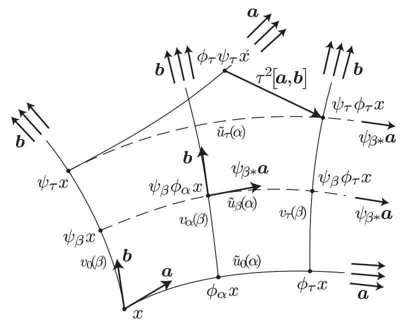
$$\frac{\partial^2 a}{\partial\alpha^2}(\alpha,\beta) = \Big(\boldsymbol{a}\cdot\big(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{d}f\big)\Big)\Big|_{\phi_\alpha\psi_\beta x}\;,$$
$$\frac{\partial^2 a}{\partial\beta^2}(\alpha,\beta) = \Big((\phi_{\alpha*}\boldsymbol{b})\cdot\big((\phi_{\alpha*}\boldsymbol{b})\cdot\mathbf{d}f\big)\Big)\Big|_{\phi_\alpha\psi_\beta x}\;,$$
$$\frac{\partial^2 a}{\partial\alpha\partial\beta}(\alpha,\beta) = \Big((\phi_{\alpha*}\boldsymbol{b})\cdot\big(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{d}f\big)\Big)\Big|_{\phi_\alpha\psi_\beta x}\;,$$
$$\frac{\partial^2 b}{\partial\beta^2}(\beta,\alpha) = \Big(\boldsymbol{b}\cdot\big(\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{d}f\big)\Big)\Big|_{\psi_\beta\phi_\alpha x}\;,$$
$$\frac{\partial^2 b}{\partial\alpha^2}(\beta,\alpha) = \Big((\psi_{\beta*}\boldsymbol{a})\cdot\big((\psi_{\beta*}\boldsymbol{a})\cdot\mathbf{d}f\big)\Big)\Big|_{\psi_\beta\phi_\alpha x}\;,$$
$$\frac{\partial^2 b}{\partial\beta\partial\alpha}(\beta,\alpha) = \Big((\psi_{\beta*}\boldsymbol{a})\cdot\big(\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{d}f\big)\Big)\Big|_{\psi_\beta\phi_\alpha x}\;.$$

K rozvoji funkcí a a b potřebujeme hodnoty derivací pro $\alpha=\beta=0$:

$$\frac{\partial a}{\partial\alpha}(0,0) = \big(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{d}f\big)\big|_x\;,\qquad \frac{\partial a}{\partial\beta}(0,0) = \big(\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{d}f\big)\big|_x\;,$$
$$\frac{\partial b}{\partial\beta}(0,0) = \big(\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{d}f\big)\big|_x\;,\qquad \frac{\partial b}{\partial\alpha}(0,0) = \big(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{d}f\big)\big|_x$$



Funkce $a(\alpha,\beta)$ je rovna funkci f vyčíslené v bodě $\phi_\alpha\psi_\beta x$. Při měnícím se α se bod $\phi_\alpha\psi_\beta x$ pohybuje po křivce, kterou nazveme $u_\beta(\alpha)$ (křivky $u_\beta(\alpha)$ pro tři různé β jsou v obrázku znázorněny jako plné křivky). Parciální derivace podle α odpovídá derivaci ve směru tečném k $u_\beta(\alpha)$, což znamená ve směru pole $\boldsymbol{a}$. Při měnícím se β se bod $\phi_\alpha\psi_\beta x$ pohybuje po křivce $\tilde{v}_\alpha(\beta)$, jejíž tečný vektor je $\phi_{\alpha*}\boldsymbol{b}$ (v obrázku jsou tyto křivky znázorněny čárkovaně). Parciální derivace $\partial a/\partial\beta$ tak odpovídá derivaci ve směru $\phi_{\alpha*}\boldsymbol{b}$.



Obdobně pro funkci $b(\beta,\alpha)$, která závisí na bodě $\psi_\beta\phi_\alpha x$ definujeme křivky $v_\alpha(\beta) = \psi_\beta\phi_\alpha x$ (v obrázku plné čáry) s tečným vektorem $\boldsymbol{b}$ dávající parciální derivaci $\partial b/\partial\beta$, a křivky $\tilde{u}_\beta(\alpha) = \psi_\beta\phi_\alpha x$ (v obrázku čárkovaně) s tečným vektorem $\psi_{\beta*}\boldsymbol{a}$ určující parciální derivaci $\partial b/\partial\alpha$.

a

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 a}{\partial\alpha^2}(0,0) = \Big(\boldsymbol{a}\cdot\big(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{d}f\big)\Big)\Big|_x\,, &&\frac{\partial^2 a}{\partial\beta^2}(0,0) = \Big(\boldsymbol{b}\cdot\big(\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{d}f\big)\Big)\Big|_x\,,\\
&\frac{\partial^2 b}{\partial\beta^2}(0,0) = \Big(\boldsymbol{b}\cdot\big(\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{d}f\big)\Big)\Big|_x\,, &&\frac{\partial^2 b}{\partial\alpha^2}(0,0) = \Big(\boldsymbol{a}\cdot\big(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{d}f\big)\Big)\Big|_x\,,\\
&\frac{\partial^2 a}{\partial\alpha\partial\beta}(0,0) = \Big(\boldsymbol{b}\cdot\big(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{d}f\big)\Big)\Big|_x\,, &&\frac{\partial^2 b}{\partial\beta\partial\alpha}(0,0) = \Big(\boldsymbol{a}\cdot\big(\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{d}f\big)\Big)\Big|_x\,.
\end{aligned}
$$

S použitím těchto hodnot v Taylorově rozvoji dostaneme

$$
\begin{aligned}
f\big(\psi_\tau\phi_\tau x\big) - f\big(\phi_\tau\psi_\tau x\big) &= b(\tau,\tau) - a(\tau,\tau)\\
&= \Bigg(b - a + \Big(\frac{\partial b}{\partial\beta} + \frac{\partial b}{\partial\alpha} - \frac{\partial a}{\partial\alpha} - \frac{\partial a}{\partial\beta}\Big)\tau\\
&\qquad + \Big(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 b}{\partial\beta^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial\alpha^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial a^2}{\partial\beta^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial\beta\partial\alpha}\Big)\tau^2\\
&\qquad + \mathcal{O}(\tau^3)\Bigg)\Bigg|_{\alpha=\beta=0}\\
&= \tau^2\Big(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{d}\big(\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{d}f\big) - \boldsymbol{b}\cdot\mathbf{d}\big(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{d}f\big)\Big)\Big|_x + \mathcal{O}(\tau^3)\\
&= \tau^2\,\big[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\big]\cdot\mathbf{d}f\big|_x + \mathcal{O}(\tau^3)\,,
\end{aligned}
$$

kde v posledním řádku jsme použili definici D2.3. Tvrzení lemmatu je tím dokázáno. ∎

Kapitola 4

Antisymetrické formy

4.1 Zavedení antisymetrických forem

V této kapitole se budeme zabývat speciálními tenzory, tzv. *antisymetrickými p-formami.* Jedná se o antisymetrické tenzory s p kovariantními indexy. Připomeňme, že antisymetrickým tenzorům jsme již věnovali oddíl 1.4. Prostor antisymetrických forem tečných k varietě M v bodě x budeme označovat $\boldsymbol{\Lambda}^p_x M$.

Definice D4.1 (Antisymetrické formy)

Tečný tenzor $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{T}_x{}^0_p M$ se nazývá antisymetrickou formou stupně p (p-formou), píšeme $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Lambda}^p_x M$, pokud

$$\boldsymbol{\omega} = \mathcal{A}\,\boldsymbol{\omega}\ , \qquad \text{tj.}\quad \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p} = \boldsymbol{\omega}_{[\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p]}\ .$$

Prostor funkcí nabývajících hodnot v prostoru p-forem budeme značit $\mathcal{A}^p M$ (tj. $\mathcal{A}^p M = \operatorname{Sect} \boldsymbol{\Lambda}^p M$). ∘

M4.1 Formy nad vektorovým prostorem
Antisymetrické formy a vnější násobení lze zavést nad každým vektorovým prostorem V. Prostor forem $\boldsymbol{\Lambda}^p$ stupně p je tvořen antisymetrickými tenzory s p kovariantními indexy, $\boldsymbol{\Lambda}^p = V^0_{[p]} = \mathcal{A}\,V^0_p$. Prostor p-forem je netriviální pro $p \leq \dim V$. Direktní součet všech prostorů $\boldsymbol{\Lambda}^p$ tvoří *vnější algebru $\boldsymbol{\Lambda}$ generovanou prostorem V.*
Vnější derivaci (definovanou níže) lze však zavést pouze pro antisymetrické formy ‘závisející na poloze’. Proto se v textu zabýváme hlavně antisymetrickými formami $\boldsymbol{\Lambda}M$ tečnými k varietě M.

Jako speciální případy dostáváme pro $p = 0$ prostor funkcí na M, tj. $\mathcal{A}^0 M = \mathfrak{F}M$. Pro $p = 1$ dostáváme prostor tečných forem (kovektorových polí) $\mathcal{A}^1 M = \mathfrak{T}^* M$, a konečně pro $p = \dim M$ prostor totálně antisymetrických tenzorových polí, které budou hrát důležitou roli při zavedení integrování na varietě (viz kapitolu 5).

Obecně, dimenze prostoru $\boldsymbol{\Lambda}^p_x M$ p-forem v bodě x je $\binom{d}{p}$, kde d je dimenze variety M. Pro $p > d$ je prostor p-forem triviální – neexistují tenzory s více antisymetrickými indexy než je dimenze vektorového prostoru, nad kterými jsou tenzory vybudované.

4.2 Vnější násobení

Mezi antisymetrickými formami lze zavést operaci *vnějšího násobení.* Definujeme ji pomocí tenzorové antisymetrizace

Definice D4.2 (Vnější násobení)

Nechť $\boldsymbol{\omega}^j \in \boldsymbol{\Lambda}^{p_j} M$, $j = 1, \dots, n$, jsou antisymetrické formy stupňů p_j. Vnější součin $\boldsymbol{\omega}^1 \wedge \boldsymbol{\omega}^2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\omega}^n$ těchto forem je antisymetrická forma $\boldsymbol{\omega}$ stupně $p = p_1 + \dots + p_n$ daná antisymetrizací tenzorového součinu forem $\boldsymbol{\omega}^j$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^1 \wedge \boldsymbol{\omega}^2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\omega}^n = \frac{p\,!}{p_1!\,p_2!\cdots p_n!}\ \mathcal{A}(\boldsymbol{\omega}^1\,\boldsymbol{\omega}^2\ \cdots\ \boldsymbol{\omega}^n)\ .$$

Tenzorové indexy vnějšího součinu forem budeme formálně psát u jednotlivých činitelů, abychom naznačili tenzorový charakter (stupeň) těchto činitelů:

$$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_p} = \boldsymbol{\omega}^1_{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_{p_1}} \wedge \boldsymbol{\omega}^2_{\boldsymbol{a}_{p_1+1}\ldots\boldsymbol{a}_{p_1+p_2}} \wedge\cdots\wedge \boldsymbol{\omega}^n_{\boldsymbol{a}_{p-p_n+1}\ldots\boldsymbol{a}_p} \,.$$

Pomocí indexů má definice vnějšího násobení tvar

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_p} &=\\ &= \frac{p\,!}{p_1!\,p_2!\cdots p_n!}\,\boldsymbol{\omega}^1_{[\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_{p_1}}\,\boldsymbol{\omega}^2_{\boldsymbol{a}_{p_1+1}\ldots\boldsymbol{a}_{p_1+p_2}}\cdots\boldsymbol{\omega}^n_{\boldsymbol{a}_{p-p_n+1}\ldots\boldsymbol{a}_p]}\,.\end{aligned} \quad \circ$$

Prostor všech antisymetrických forem $\boldsymbol{\Lambda}M$ spolu s vnějším násobením tvoří tzv. *vnější algebru*. Vnější násobení je asociativní – vnější součin n činitelů můžeme libovolně ozávorkovat. Vnější násobení však není obecně komutativní. Chování vůči záměně činitelů závisí na stupni činitelů. Pro formy $\boldsymbol{\omega}$ a $\boldsymbol{\sigma}$ stupňů p a q máme

$$\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\sigma} = (-1)^{pq}\,\boldsymbol{\sigma}\wedge\boldsymbol{\omega}\,. \tag{4.1}$$

Znaménko vzniká při prokomutování q indexů formy $\boldsymbol{\sigma}$ přes p indexů formy $\boldsymbol{\omega}$ s uvážením antisymetrické povahy výsledné $(p+q)$-formy.

Vnější násobení se nejčastěji používá pro 1-formy. Pro 1-formy (kovektory) $\boldsymbol{\alpha}^j$, $j=1,\ldots,n$, dostáváme speciálně

$$\boldsymbol{\alpha}^1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{\alpha}^n = \sum_{\text{permutace }\sigma} \operatorname{sign}\sigma\;\; \boldsymbol{\alpha}^{\sigma_1}\cdots\boldsymbol{\alpha}^{\sigma_n}\,. \tag{4.2}$$

Vidíme, že na prostoru 1-forem je vnější násobení antisymetrické. Opakuje-li se tak ve vnějším součinu vícekrát stejná 1-forma, je výsledek nulový.

Příklad P4.1

Pro 1-formy $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ dostáváme (samozřejmě s užitím konvence (1.2))

$$\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}\,\boldsymbol{\alpha}\,.$$

Připomeňme, že použijeme-li tenzorové indexy, nezáleží na pořadí, ve které činitele napíšeme – indexy sami určují pořadí tenzorového součinu:

$$\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{a}}\wedge\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{a}}\,.$$

Vnější násobení r-formy $\boldsymbol{\omega}$ s 1-formou $\boldsymbol{\alpha}$ má explicitně tvar

$$\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{a}_0}\wedge\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_r} = \sum_{0\le k\le r}(-1)^k\,\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{a}_k}\,\boldsymbol{\omega}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_0\ldots\boldsymbol{a}_r}_{\text{mimo }\boldsymbol{a}_k}}\,. \tag{4.3}$$

Násobení dvou 2-forem $\boldsymbol{\omega}$ a $\boldsymbol{\sigma}$ je komutativní a lze ho rozepsat následovně

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{ab}}\wedge\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{cd}} &= \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{ab}}\wedge\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{cd}} =\\ &= \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{ab}}\,\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{cd}} + \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{cd}}\,\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{ab}}\\ &\quad - \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{ac}}\,\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{bd}} - \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{ad}}\,\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{cb}} - \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{cb}}\,\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{ad}} - \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{db}}\,\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{ca}}\,.\end{aligned} \tag{4.4}$$

M4.2 Explicitní tvar vnějšího násobení
Všimněme si, že vnější součin se liší od antisymetrizace tenzorového součinu normalizací. Tato normalizace zajišťuje, že vnější součin je dán součtem všech možných tenzorových součinů činitelů lišících se 'kvalitativně neekvivalentním pořadím' tenzorových indexů. Jednotlivé členy se v součtu vyskytují se znaménkem odpovídajícím znaménku permutace příslušného uspořádání indexů. Dvě různá uspořádání indexů v součinu činitelů přitom nazýváme 'kvalitativně ekvivalentní,' pokud se liší pouze permutacemi indexů jednotlivých činitelů.
Pro vnější součin dvou forem $\boldsymbol{\omega}$ a $\boldsymbol{\sigma}$ stupňů p a $r-p$ tato normalizace dává

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_p}\wedge\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{a}_{p+1}\ldots\boldsymbol{a}_r} &=\\ =\sum_{1\le k_1<\cdots<k_p\le r}(-1)^{k_1+\cdots+k_p+\frac{p(p+1)}{2}}\,&\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_{k_1}\ldots\boldsymbol{a}_{k_p}}\,\boldsymbol{\sigma}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_r}_{\text{mimo }\boldsymbol{a}_{k_1}\ldots\boldsymbol{a}_{k_p}}}\,,\end{aligned}$$

Součet se provádí přes 'kvalitativně ekvivalentní' rozdělení indexů mezi obě formy. Důkaz tvrzení lze nalézt v dodatku 4.A.
Konkrétně, pro $p=1$ dostáváme vztah (4.3) a pro $p=2$ vztah

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}\wedge\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{a}_3\ldots\boldsymbol{a}_r} &=\\ &= \sum_{1\le k<l\le r}(-1)^{k+l+1}\,\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{a}_l}\,\boldsymbol{\sigma}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_r}_{\text{mimo }\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_l}}\,.\end{aligned}$$

4.3 Souřadnice na $\boldsymbol{\Lambda}^p M$

Máme-li zadanou bázi $\{\boldsymbol{e}^j\}_{j=1,\dots,d}$ v kotečném bundlu $\boldsymbol{T}^*_x M$, můžeme zkonstruovat pomocí vnějšího součinu bázi v jednotlivých prostorech $\boldsymbol{\Lambda}^p_x M$. Díky antisymetrii vnějšího součinu 1-forem jsou součiny $\boldsymbol{e}^{a_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}^{a_p}$ lišící se pouze záměnou činitelů lineárně závislé. Za bázi v prostoru antisymetrických p-forem tak můžeme vybrat vnější součiny $\boldsymbol{e}^{a_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}^{a_p}$ s odlišným výběrem činitelů $\boldsymbol{e}^{a_1}, \dots, \boldsymbol{e}^{a_p}$:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{e}^{a_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}^{a_p}\\ &\qquad \text{pro všechny } a_1, \dots, a_p \text{ splňující } 1 \le a_1 < \dots < a_p \le d\,.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Vidíme, že báze má $\binom{d}{p}$ nezávislých prvků, což odpovídá dimenzi prostoru $\boldsymbol{\Lambda}^p_x M$.

Díky odlišné normalizaci vnějšího součinu a antisymetrizace tenzorového součinu jsou souřadnice vzhledem k tenzorové bázi shodné se souřadnicemi vzhledem k bázi v prostoru p-forem:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{a_1\dots a_p}\, \boldsymbol{e}^{a_1} \cdots \boldsymbol{e}^{a_p} = \sum_{1 \le a_1 < \dots < a_p \le d} \omega_{a_1\dots a_p}\, \boldsymbol{e}^{a_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}^{a_p}\,. \tag{4.6}$$

V součtu přes prvky tenzorové báze $\boldsymbol{e}^{a_1} \cdots \boldsymbol{e}^{a_p}$ lze totiž seskupit členy lišící se pouze pořadím činitelů. Díky antisymetrii souřadnice $\omega_{a_1\dots a_p}$ můžeme tuto souřadnici od $\binom{d}{p}$ seskupených členů vytknout a jejich antisymetrická kombinace vytvoří vnější součin $\boldsymbol{e}^{a_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}^{a_p}$, viz (4.2) a následující příklad.

Příklad P4.2

Na třídimenzionální varietě M ($d = 3$) s kotečnou bází $\{\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3\}$ můžeme antisymetrickou 2-formu $\boldsymbol{\omega}$ rozepsat následovně

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \omega_{ab}\, \boldsymbol{e}^a \boldsymbol{e}^b\\ &= \omega_{12}\,(\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}^2 - \boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}^1) + \omega_{13}\,(\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}^3 - \boldsymbol{e}^3\boldsymbol{e}^1) + \omega_{23}\,(\boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}^3 - \boldsymbol{e}^3\boldsymbol{e}^2)\\ &= \omega_{12}\, \boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^2 + \omega_{13}\, \boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^3 + \omega_{23}\, \boldsymbol{e}^2 \wedge \boldsymbol{e}^3\,.\end{aligned}$$

Máme-li zadané souřadnice x^j na varietě M, na prostoru p-forem volíme typicky bázi $\{\,\mathbf{d}x^{a_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{a_p}\}_{1 \le a_1 < \dots < a_p \le d}$.

M4.3 Transformační vlastnosti souřadnic
Souřadnice totálně antisymetrických forem (tj. forem stupně $d = \dim M$) mají speciální transformační vlastnosti. Prostor d-forem je jednodimenzionální, tj. tyto formy mají pouze jednu nezávislou komponentu. Forma $\boldsymbol{\alpha}$ je tak charakterizována komponentou $\alpha_{1\dots d}$, všechny ostatní komponenty jsou buď nula nebo se liší pouze permutací indexů. Tato komponenta se při změně báze

$$\boldsymbol{e}^j = A^j_{i'}\, \boldsymbol{e}'^{i'}$$

mění následovně

$$\alpha'_{1'\dots d'} = \left(\det A^j_{i'}\right) \alpha_{1\dots d}\,.$$

Vskutku, díky antisymetrii formy $\boldsymbol{\alpha}$ můžeme psát

$$\begin{aligned}\alpha'_{1'2'\dots d'} &= A^{j_1}_{1'} A^{j_2}_{2'} \dots A^{j_d}_{d'}\, \alpha_{j_1 j_2 \dots j_d}\\ &= \sum_{\text{permutace } \sigma} A^{\sigma_1}_{1'} A^{\sigma_2}_{2'} \dots A^{\sigma_d}_{d'}\, \alpha_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_d}\\ &= \Big(\sum_{\text{permutace } \sigma} \operatorname{sign}\sigma\, A^{\sigma_1}_{1'} A^{\sigma_2}_{2'} \dots A^{\sigma_d}_{d'}\Big)\, \alpha_{12\dots d}\\ &= \left(\det A^j_{i'}\right) \alpha_{12\dots d}\,.\end{aligned}$$

4.4 Vnější derivace

Již jsme se zmínili, že je obtížné zobecnit operaci gradientu na obecná tenzorová pole. K derivování obecných tenzorových polí je potřeba dodatečná geometrická struktura – ať již se jedná o vektorové pole podél kterého můžeme definovat Lieovu derivaci (viz definice D3.11) nebo o paralelní přenos umožňující zavést kovariantní derivaci (viz kapitolu 7, zejména oddíl 7.2). Prostor antisymetrických polí $\mathcal{A}^p M$ však zaujímá v tomto směru speciální postavení – pro antisymetrické formy lze přirozeně zavést tzv. *vnější derivaci* a to bez použití jakýchkoli dodatečných struktur. Vnější derivace zvyšuje stupeň antisymetrické formy a jedná se o jisté zobecnění operací gradient a rotace známých z euklidovského třídimenzionálního prostoru.

Definice D4.3 (Vnější derivace)
Vnější derivace $\mathbf{d}$ je zobrazení z prostoru antisymetrických p-forem do prostoru $(p+1)$-forem definovaných na varietě M splňující následující vlastnosti:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{d} : \mathcal{A}^p M \to \mathcal{A}^{p+1} M \,, && \\
&\mathbf{d}(\boldsymbol{\omega} + a\,\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} + a\,\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} \,, \qquad a \in \mathbb{R} \,, && \text{(i)} \\
&\mathbf{d}(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma} + (-1)^p\, \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} \,, && \text{(ii)} \\
&\mathbf{d} \text{ působí na } \mathcal{A}^0 M = \mathfrak{F} M \text{ jako obyčejný gradient} \,, && \text{(iii)} \\
&\mathbf{d}\,\mathbf{d}\,\boldsymbol{\omega} = 0 \,, && \text{(iv)}
\end{aligned}
$$

pro $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}^p M$ a $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{A}^q M$.

Při použití tenzorových indexů budeme výsledek vnějšího derivování zapisovat $\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_0} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_p}$. Složky vnější derivace $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}$ budeme označovat $\mathrm{d}_{a_0} \omega_{a_1 \ldots a_p}$ nebo, s využitím lemmatu V4.1, přímo pomocí antisymetrizované parciální derivace jako $(p+1)\, \omega_{[a_1 \ldots a_p, a_0]}$. ◦

POZNÁMKA
Pravidlo pro derivování vnějšího součinu obsahuje zdánlivě neintuitivní znaménko $(-1)^p$. Toto znaménko souvisí s antisymetrickou povahou výsledné formy a vymizí, pokud zachováme ve všech členech stejné pořadí indexů, tj. nejdříve index od derivace, následovaný indexy od prvního činitele a indexy od druhého činitele:

$$\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} (\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{b}\ldots} \wedge \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{c}\ldots}) = \mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{b}\ldots} \wedge \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{c}\ldots} + \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{b}\ldots} \wedge \mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{c}\ldots} \,.$$

POZNÁMKA
Zdůrazněme, že zápis $\mathrm{d}_{a_0} \omega_{a_1 \ldots a_p}$ značí souřadnice vnější derivace $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}$ formy $\boldsymbol{\omega}$, a ne souřadnice gradientu skalárů $\omega_{a_1 \ldots a_p}$. Ty bychom zapsali přímo pomocí parciální derivace jako $\omega_{a_1 \ldots a_p, a_0}$.

Poznamenejme, že z pravidla pro derivování vnějšího součinu vyplývá pravidlo pro derivování násobku formy funkcí:

$$\mathbf{d}(f\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{d}f \wedge \boldsymbol{\omega} + f\,\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} \,, \qquad f \in \mathfrak{F} M \,, \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}^p M \,. \tag{4.7}$$

Pravidla z definice D4.3 určují již vnější derivaci jednoznačně jak je vidět z rozpisu do libovolně zvolených souřadnic x^m

$$
\begin{aligned}
\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} &= \mathbf{d}\Big(\sum_{a_1 < \cdots < a_p} \omega_{a_1 \ldots a_p}\, \mathbf{d}x^{a_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{a_p} \Big) \\
&= \sum_{a_1 < \cdots < a_p} \mathbf{d}\omega_{a_1 \ldots a_p} \wedge \mathbf{d}x^{a_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{a_p} \,.
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

Zde jsme využili linearitu vnější derivace vůči součtu, pravidlo pro derivování vnějšího součinu a fakt, že $\mathbf{d}\,\mathbf{d}\,x^a = 0$. Výsledný výraz je již součet vnějších součinů 1-forem daných obyčejnými gradienty, tj. explicitní předpis pro výpočet vnější derivace. Z (4.8) již lehce nahlédneme vztah pro souřadnice vnější derivace (nahlédněte sami či v dodatku 4.A):

Lemma V4.1 (Souřadnice vnější derivace)
Souřadnice $\mathrm{d}_{a_0} \omega_{a_1 \ldots a_p}$ vnější derivace $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}$ p-formy $\boldsymbol{\omega}$ jsou

$$\mathrm{d}_{a_0} \omega_{a_1 \ldots a_p} = (p+1)\, \omega_{[a_1 \ldots a_p, a_0]} \,.$$ □

POZNÁMKA
Ze souřadnicového zápisu vidíme, že vnější derivace je v nějakém smyslu ‘antisymetrizace gradientu tenzorového pole’. Přesnější význam tomuto tvrzení dáme po zavedení kovariantní derivace ve větě V7.20.

M4.4 Vnější derivace a vektorové operátory
Na třídimenzionální varietě s metrikou $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{ab}}$ a příslušně normovaným Levi-Civitovým tenzorem $\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{abc}}$ lze definovat gradient funkcí a rotaci a divergenci vektorových polí – viz oddíl 10.1, zejména marginálii M10.1. Vnější derivace je s těmito operacemi úzce spojena:

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{grad}\, f)^{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{an}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} f \,, \\
&(\mathbf{rot}\, \boldsymbol{a})^{\boldsymbol{c}} = (\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{b}})\, \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{abc}} \,, \\
&\mathbf{div}\, \boldsymbol{a} = \tfrac{1}{3!}\, \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{abc}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} (\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{bcn}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}})
\end{aligned}
$$

(indexy se snižují a zvyšují pomocí metriky). Rotace je tak Hodgeův duál (viz definici D6.14) vnější derivace 1-formy metricky asociované s vektorovým polem, $\mathbf{rot}\, \boldsymbol{a} = {}^*\mathbf{d}\boldsymbol{a}$, a divergence je duál vnější derivace duálu vektorového pole, $\mathbf{div}\, \boldsymbol{a} = {}^*\mathbf{d}^*\boldsymbol{a}$.

PŘÍKLAD P4.3
Pro vnější derivaci 1-formy γ zúženou s dvěma vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ dostáváme

$$\boldsymbol{a}^m\,\big(\mathbf{d}_m\gamma_n\big)\,\boldsymbol{b}^n = \boldsymbol{a}^m\,\mathbf{d}_m\big(\boldsymbol{b}^n\gamma_n\big) - \boldsymbol{b}^n\,\mathbf{d}_n\big(\boldsymbol{a}^m\gamma_m\big) - [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]^c\,\gamma_c\ .$$

Analogický výraz pro formy vyššího stupně je uveden v marginálii M4.5 a dokázán v dodatku 4.A.

M4.5 Zúžení vnější derivace
Pro vnější derivaci formy $\boldsymbol{\omega}$ zúženou s vektory $\boldsymbol{a}_j$ lze odvodit vztah

$$\begin{aligned}&\big(\mathbf{d}_{n_0}\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p}\big)\,\boldsymbol{a}_0^{n_0}\,\boldsymbol{a}_1^{n_1}\cdots\boldsymbol{a}_p^{n_p}\\ &= \sum_{0\le k\le p}(-1)^k\boldsymbol{a}_k^{n_k}\ \mathbf{d}_{n_k}\big(\underbrace{\boldsymbol{\omega}_{n_0\dots n_p}\,\boldsymbol{a}_0^{n_0}\cdots\boldsymbol{a}_p^{n_p}}_{\text{mimo } n_k}\big)\\ &+\sum_{0\le k<l\le p}(-1)^{k+l}\,\big[\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_l\big]^{n}\,\underbrace{\boldsymbol{\omega}_{nn_0\dots n_p}\,\boldsymbol{a}_0^{n_0}\cdots\boldsymbol{a}_p^{n_p}}_{\text{mimo } n_k,\ n_l}\ .\end{aligned}$$

Speciálně, pro $p=1$ dostáváme vztah z příkladu P4.3. Důkaz tvrzení viz dodatek 4.A.

4.5 Vztah vnější a Lieovy derivace

Vnější derivace lze využít při výpočtu Lieovy derivace antisymetrické formy. Za prvé, obdobně gradientu, vnější a Lieova derivace komutují.

Lemma V4.2 (Záměnnost $\mathbf{d}$ a $\pounds_{\boldsymbol{a}}$)
Pro antisymetrickou formu $\boldsymbol{\omega}$ a vektorové pole $\boldsymbol{a}$ platí

$$\mathbf{d}\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\omega} = \pounds_{\boldsymbol{a}}\,\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\ . \qquad \square$$

Důkaz lze provést pomocí tzv. Cartanovy identity vyjadřující Lieovu derivaci formy pomocí vnější derivace:

Věta V4.3 (Cartanova identita)
Pro Lieovu derivaci antisymetrické formy $\boldsymbol{\omega}$ podél vektorového pole $\boldsymbol{a}$ platí

$$\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p} = \boldsymbol{a}^n\ \mathbf{d}_n\,\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p} + \mathbf{d}_{n_1}\big(\boldsymbol{a}^n\boldsymbol{\omega}_{nn_2\dots n_p}\big)\ . \qquad \square$$

DŮKAZ:
Zde tvrzení dokážeme pouze pro 1-formy (tj. pro $p=1$). Důkaz pro obecné p je analogický a lze nalézt v dodatku 4.A.

Využitím Leibnizova pravidla pro Lieovu derivaci zúžení 1-formy γ s vektorovým polem $\boldsymbol{b}$ dostáváme

$$\big(\pounds_{\boldsymbol{a}}\gamma_r\big)\boldsymbol{b}^r = \pounds_{\boldsymbol{a}}(\gamma_r\boldsymbol{b}^r) - \big(\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}^r\big)\gamma_r = \boldsymbol{a}^n\,\mathbf{d}_n(\gamma_r\boldsymbol{b}^r) - [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]^r\gamma_r\ .$$

Použitím identity z příkladu P4.3 dostáváme

$$\big(\pounds_{\boldsymbol{a}}\gamma_r\big)\boldsymbol{b}^r = \boldsymbol{a}^n\big(\,\mathbf{d}_n\gamma_r\big)\boldsymbol{b}^r + \boldsymbol{b}^r\,\mathbf{d}_r\big(\gamma_n\boldsymbol{a}^n\big)\ .$$

Jelikož $\boldsymbol{b}$ bylo zvoleno libovolně, je lemma dokázáno. ■

DŮKAZ: (LEMMA V4.2)
Použijeme Cartanovu identitu postupně pro obě strany tvrzení:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_{n_0}\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p} &= \mathbf{d}_{n_0}\big(\boldsymbol{a}^n\,\mathbf{d}_n\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p}\big) + \mathbf{d}_{n_0}\,\mathbf{d}_{n_1}\big(\boldsymbol{a}^n\boldsymbol{\omega}_{nn_2\dots n_p}\big)\ ,\\ \pounds_{\boldsymbol{a}}\,\mathbf{d}_{n_0}\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p} &= \boldsymbol{a}^n\,\mathbf{d}_n\,\mathbf{d}_{n_0}\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p} + \mathbf{d}_{n_0}\big(\boldsymbol{a}^n\,\mathbf{d}_n\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p}\big)\ .\end{aligned}$$

Použitím $\mathbf{d}\,\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} = 0$ dostaneme požadovanou rovnost

$$\mathbf{d}_{n_0}\pounds_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p} = \pounds_{\boldsymbol{a}}\,\mathbf{d}_{n_0}\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p} = \mathbf{d}_{n_0}\big(\boldsymbol{a}^n\,\mathbf{d}_n\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p}\big)\ . \qquad ■$$

Obdobně komutaci s difeomorfismy (generovanými Lieovou derivací) komutuje vnější derivace též s restrikcí na podvarietu. Na podvarietě N variety M je vnější derivace samozřejmě odlišná od analogické operace na varietě M. Jelikož je však v obou případech dána vnější derivace stejnými vlastnostmi, platí

Lemma V4.4 (Vnější derivace a restrikce na podvarietu)
Pro antisymetrickou formu $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}^p M$ platí

$$\big(\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\big)|_N = \mathbf{d}\big(\boldsymbol{\omega}|_N\big)\ . \qquad \square$$

Důkaz:
Vložení podvariety N do M zachovává vlastnosti definice D4.3. Jelikož tyto vlastnosti určují vnější derivaci jednoznačně, stačí pouze ukázat, že $(\mathbf{d}\boldsymbol{\omega})|_N$ závisí pouze na restrikci $\boldsymbol{\omega}|_N$. Jinými slovy, že platí

$$\boldsymbol{\omega}|_N = 0 \quad\Rightarrow\quad (\mathbf{d}\boldsymbol{\omega})|_N = 0\ .$$

Ovšem $(\mathbf{d}\boldsymbol{\omega})|_N = 0$ znamená, že pro vektorová pole $\boldsymbol{a}_i$ tečná k N platí $(\mathbf{d}_{n_0}\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p})\, \boldsymbol{a}_0^{n_0}\, \boldsymbol{a}_1^{n_1}\cdots \boldsymbol{a}_p^{n_p} = 0$. Tvrzení $(\mathbf{d}\boldsymbol{\omega})|_N = 0$ pak plyne z marginálie M4.5 (viz též Lemma V4.7), užitím rozpisu předpokladu $\boldsymbol{\omega}|_N = 0$ a faktu, že Lieova závorka dvou vektorových polí tečných k podvarietě je opět vektorové pole tečné k podvarietě. ∎

4.6 Uzavřené a exaktní formy

Antisymetrická forma jejíž vnější derivace vymizí se nazývá *uzavřená*, forma, jež lze napsat jako vnější derivace jiné formy, se nazývá *exaktní*.

Definice D4.4 (Uzavřené a exaktní formy)

$$\boldsymbol{\omega} \text{ je } \textit{uzavřená} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = 0\ ,$$
$$\boldsymbol{\omega} \text{ je } \textit{exaktní} \quad\Leftrightarrow\quad \exists\boldsymbol{\sigma}\quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}\ .$$

Prostor uzavřených (anglicky *closed*) forem označíme $\mathcal{A}^p_{\mathrm{c}}M$ a prostor exaktních (anglicky *exact*) forem $\mathcal{A}^p_{\mathrm{e}}M$. Pro $p=0$ dodefinujeme $\mathcal{A}^0_{\mathrm{e}}M = \{0\}$.

Máme tedy $\mathcal{A}^p_{\mathrm{c}}M = \ker \mathbf{d}$ a $\mathcal{A}^p_{\mathrm{e}}M = \operatorname{img} \mathbf{d}$. ◦

Zřejmě, každá d-forma ($d = \dim M$) je uzavřená – neexistuje žádná nenulová $(d+1)$-forma. Vnější součin dvou uzavřených forem je opět uzavřená forma (díky pravidlu pro derivování vnějšího součinu). Vnější součin uzavřené formy $\boldsymbol{\kappa}$ a exaktní formy $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}$ je exaktní forma, $\boldsymbol{\kappa}\wedge\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}(\boldsymbol{\kappa}\wedge\boldsymbol{\sigma})$.

Z vlastnosti (iv) definice D4.3 vidíme, že každá exaktní forma je uzavřená. Přirozeně se nabízí otázka, zda tomu je i naopak: “Je každá uzavřená forma exaktní?” Odpověď dává tzv. Poincarého lemma a je obecně negativní – uzavřené formy jsou exaktní pouze na ‘topologicky jednoduchých’ varietách. K vymezení ‘topologické jednoduchosti’, zavedeme několik užitečných pojmů.

Definice D4.5 (de Rhamova kohomologie)

Faktorizaci uzavřených forem stupně p modulo exaktní formy nazýváme p-tou de Rhamovou kohomologickou grupou $H^p(M)$:

$$H^p(M) = \mathcal{A}^p_{\mathrm{c}}M/\mathcal{A}^p_{\mathrm{e}}M\ .$$

Prvky kohomologické grupy se nazývají třídy kohomologie. Konkrétně, pro $\boldsymbol{\omega}\in\mathcal{A}^p_{\mathrm{c}}M$ budeme $[\boldsymbol{\omega}] = \boldsymbol{\omega} + \mathcal{A}^p_{\mathrm{e}}M$ nazývat třídou kohomologie formy $\boldsymbol{\omega}$. Grupová operace na $H^p(M)$ je přirozeně definované sčítání. $H^p(M)$ navíc tvoří vektorový prostor.

Pokud je dimenze $H^p(M)$ konečná, nazýváme ji p-té Bettiho číslo variety M,

$$b^p(M) = \dim H^p(M)\ .$$

Alternující součet Bettiho čísel nazýváme Eulerovou charakteristikou variety M

$$\chi(M) = \sum_{p=0,\dots,d} (-1)^p\, b^p(M)\ .$$ ◦

M4.6 Potenciál uzavřené 1-formy
Otázkou zda uzavřená 1-forma $\boldsymbol{\omega}$ je exaktní se ptáme, zda pro formu splňující $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = 0$ existuje funkce f, nazývaná skalární potenciál, taková, že $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}f$.
Pokud je odpověď kladná, potenciál lze explicitně zkonstruovat předpisem

$$f(x) = \int_\gamma \boldsymbol{\omega} = \int_\gamma \frac{\boldsymbol{D}^a\gamma}{d\eta}\boldsymbol{\omega}_a d\eta\ , \qquad (*)$$

kde $\gamma(\eta)$ je parametrizovaná křivka začínající v nějakém fixním bodě x_0 a končící v x, a $D\gamma/d\eta$ je tečný vektor ke křivce γ. Tento předpis je konzistentní pokud nezávisí na volbě křivky γ spojující body x_0 a x. Nezávislost na volbě křivky je zajištěna, pokud integrál podél libovolné smyčky je nulový.
To lze garantovat, pokud na libovolnou smyčku λ lze napnout dvoudimenzionální plochu S topologicky homeomorfní s kruhem, $\partial S = \lambda$. Pak můžeme pomocí Gaussovy věty V10.16 převést křivkový integrál na plošný, který vymizí díky uzavřenosti formy $\boldsymbol{\omega}$:

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{\omega} = \int_S \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = 0\ .$$

Fakt, že pro funkci f definovanou pomocí (*) platí $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}f$ plyne již z toho, že vnější derivace působí na funkcích jako obyčejný gradient. Lehce totiž nahlédneme, že pro libovolný vektor $\boldsymbol{a}$ pomoci Newtonova vzorce máme

$$\boldsymbol{a}^n\boldsymbol{\omega}_n = \boldsymbol{a}^n\,\mathbf{d}_n \int_\gamma \boldsymbol{\omega}$$

kde křivku γ zvolíme tečnou k $\boldsymbol{a}$. Užitím (*) a ‘zkrácením’ obecně zvoleného vektoru $\boldsymbol{a}$ dostáváme $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}f$.
Otázku existence skalárního potenciálu pro uzavřenou 1-formu jsme tedy převedli na otázku zda každá smyčka λ lze napsat jako hranice dvoudimenzionálního topologického kruhu. Jinými slovy, zda je libovolná smyčka spojitě stáhnutelná do bodu. Takové variety se nazývají jednoduše souvislé.
Podmínka jednoduché souvislosti je tak podmínkou dostatečnou pro existenci skalárního potenciálu uzavřené 1-formy. Je to ale i podmínka nutná. Konstrukce skalárního potenciálu pomocí (*) lze totiž vždy provést lokálně. Existence křivky nestáhnutelné do bodu však zabrání pro obecnou formu $\boldsymbol{\omega}$ lokálně definovanou funkci f konzistentně rozšířit na funkci jednoznačně definovanou na celé varietě.

De Rhamovy kohomologické grupy vystihují ‘topologický charakter’ variety. Kohomologické grupy, vágně řečeno, určují, kolik různě dimenzionálních ‘děr’ či ‘uch’ varieta obsahuje.

Nulté Bettiho číslo je např. dáno počtem souvislých komponent variety: nultá kohomologická grupa $H^0(M)$ je ekvivalentní prostoru konstantních funkcí na M a pro každou souvislou komponentu M máme jednu nezávislou konstantní funkci. Triviálnost *první kohomologické grupy* znamená, že varieta je jednoduše souvislá, tj., že každá smyčka lze spojitě stáhnout do bodu (viz marginálie M4.6).

Definice D4.6 (Kontrahovatelná varieta)

Varietu nazýváme *kontrahovatelnou (stáhnutelnou) do bodu*, pokud všechny její body lze *spojitě* stáhnout do jednoho bodu. Tj., pokud existuje *spojité* zobrazení $\phi : \langle 0,1\rangle \times M \to M$ takové, že $\phi(0,x) = x$ a $\phi(1,x) = x_0$ pro nějaký fixovaný bod x_0. ∘

POZNÁMKA

Zdůrazněme, že v této definici je klíčová *spojitost* zobrazení stahujícího varietu do bodu. Pokud varieta obsahuje ‘díry’, body okolo těchto děr nelze stáhnout do jednoho bodu *spojitým* způsobem.

PŘÍKLAD P4.4

$\mathbb{R}^n$ je kontrahovatelná varieta, $\mathbb{R}^n - 0$ není.

Kontrahovatelnost variety do bodu dává přesný význam ‘topologické jednoduchosti’ zmíněné výše. Platí totiž

Věta V4.5 (Poincarého lemma)

Na varietě kontrahovatelné do bodu je každá uzavřená forma exaktní. To znamená, že $b^0(M) = 1$ a pro $p > 0$ jsou všechny de Rhamovy kohomologické grupy triviální, $b^p(M) = 0$. □

Důkaz lze nalézt ve většině učebnic diferenciální geometrie.

PŘÍKLAD P4.5

Prostor $\mathbb{R}^n$ je kontrahovatelný do bodu a tudíž na $\mathbb{R}^n$ platí $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = 0 \Rightarrow \exists\, \boldsymbol{\sigma}\;\; \boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}$.

PŘÍKLAD P4.6

Kružnice S^1 není kontrahovatelná do bodu. První kohomologická grupa je netriviální, dimenze jedna, $b^1(S^1) = 1$.

Zavedeme-li na S^1 víceznačnou úhlovou souřadnici φ s periodou 2π (tj. hodnoty $\varphi = \varphi_0$ a $\varphi = \varphi_0 + 2\pi$ popisují tentýž bod kružnice), můžeme zavést 1-formu $\boldsymbol{\omega}$, která je na libovolné jednoduše souvislé oblasti $I \subset S^1$ dána $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}\varphi$. Tato 1-forma je uzavřená, není však exaktní, jelikož vztah $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}\varphi$ nelze rozšířit na kružnici tak aby φ byla jednoznačná spojitá funkce na celém S^1. První kohomologická grupa je pak generována třídou kohomologie formy $\boldsymbol{\omega}$.

PŘÍKLAD P4.7

Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ má Bettiho čísla $b^0(T^2) = 1, b^1(T^2) = 2$ a $b^2(T^2) = 1$. Analogicky příkladu P4.6 můžeme pomocí úhlových souřadnic podél hlavních kruhů torusu zavést uzavřené formy $\boldsymbol{\omega}$ a $\boldsymbol{\sigma}$. Tyto formy generují nezávislé kohomologické třídy grupy $H^1(T^2)$. Jednodimenzionální kohomologická grupa $H^2(T^2)$ je generována třídou kohomologie formy $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma}$.

PŘÍKLAD P4.8

Obecně, n-dimenzionální sféra S^n není kontrahovatelná do bodu. Všechny kohomologické grupy mimo $H^0(M)$ a $H^n(M)$ jsou triviální a $b^0(S^n) = b^n(S^n) = 1$. Eulerova charakteristika sféry tedy je $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$. Konkrétně, $\chi(S^2) = 2$.

M4.8 Vektorový a skalární potenciál

V kontextu marginálie M4.4 lehce nahlédneme, že z $\mathbf{dd}\boldsymbol{\omega} = 0$ vyplývá $\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\, f = 0$ a $\mathbf{div}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{a} = 0$. Poincarého lemma (věta V4.5) nám pak říká, že na kontrahovatelné varietě (např. na E^3) podmínky $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{e} = 0$ a $\mathbf{div}\,\boldsymbol{b} = 0$ jsou dostatečné pro existenci skalárního a vektorového potenciálu φ a $\boldsymbol{a}$ takových, že $\boldsymbol{e} = \mathbf{grad}\,\varphi$ a $\boldsymbol{b} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{a}$.

Poznámka

Ve světle posledního příkladu vidíme, že obecně má varieta M netriviální kohomologickou grupu stupně n pokud obsahuje vnořenou topologickou sféru S^n nestáhnutelnou do bodu. Jednoduše nesouvislé variety obsahují nestáhnutelné smyčky, což vypovídá o existenci děr 'rozprostraněných podél $d-2$ dimenzí' ($d = \dim M$), kolem kterých jsou tyto smyčku obtočeny. Netriviální kohomologická grupa $H^2(M)$ ukazuje na existenci děr 'rozprostraněných podél $d-3$ dimenzí', které lze 'zabalit' do nestáhnutelných dvoudimenzionálních sfér. Na trojdimenzionální varietě $b^1(M) \neq 0$ tak ukazuje na přítomnost 'lineárních děr' ('chybějících křivek') a $b^2(M) \neq 0$ na přítomnost 'bodových děr'. Pojem 'díry' je zde ale užit pouze na intuitivní úrovni – odkazuje se zejména na situaci, kdy z topologicky triviálního prostoru E^d vytváříme nekontrahovatelný prostor 'vyřezáváním' různých útvarů.

4.A Některé vztahy pro antisymetrické formy

V tomto dodatku si dokážeme některé vztahy z hlavního textu. Začneme explicitní formou vnějšího násobení z marginálie M4.2:

Lemma V4.6 (Explicitní tvar vnějšího násobení)

Pro vnější součin p-formy $\boldsymbol{\omega}$ a $(r-p)$-formy $\boldsymbol{\sigma}$ platí

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}\wedge\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{a}_{p+1}\dots\boldsymbol{a}_r}\\&\qquad=\sum_{1\le k_1<\dots<k_p\le r}(-1)^{k_1+\dots+k_p+\frac{p(p+1)}{2}}\ \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_{k_1}\dots\boldsymbol{a}_{k_p}}\ \boldsymbol{\sigma}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_r}_{\text{mimo }\boldsymbol{a}_{k_1}\dots\boldsymbol{a}_{k_p}}}\ .\qquad\square\end{aligned}$$

Důkaz:

První co si uvědomíme je, že znaménko v sčítancích na pravé straně odpovídá přesně znaménku permutace

$$\sigma:\ [1,\dots,r]\ \rightarrow\ [k_1,\dots,k_p,\underbrace{1,\dots,r}_{\text{mimo }k_1,\dots,k_p}]$$

Díky podmínce $k_1<\dots<k_p$ se jedná o po částech uspořádanou permutaci, tj. permutaci, ve které je prvních p i zbývajících $r-p$ prvků uspořádaných. Obecná permutace se liší od po částech uspořádané permutace separátními permutacemi v prvních p a zbývajících $r-p$ prvcích. Ovšem díky antisymetrii forem $\boldsymbol{\omega}$ a $\boldsymbol{\sigma}$, permutace v prvních p indexech a ve zbývajícících $r-p$ indexech může pouze změnit znaménko součinu $\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{\sigma}$. Sumu přes uspořádané permutace indexů tedy můžeme uvolnit na sumu přes všechny permutace indexů s tím, že vezmeme v úvahu změnu znaménka. Samozřejmě, jednomu členu s uspořádanou permutací indexů přísluší $p!\,(r-p)!$ členů s libovolným prohozením prvních p a zbývajících $r-p$ indexů a tak tímto faktorem musíme uvolnění podmínky uspořádanosti kompenzovat:

$$\begin{aligned}&\sum_{1\le k_1<\dots<k_p\le r}(-1)^{k_1+\dots+k_p+\frac{p(p+1)}{2}}\ \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_{k_1}\dots\boldsymbol{a}_{k_p}}\ \boldsymbol{\sigma}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_r}_{\text{mimo }\boldsymbol{a}_{k_1}\dots\boldsymbol{a}_{k_p}}}\\&\quad=\sum_{\substack{\text{po částech uspořádané}\\\text{permutace }\sigma}}\operatorname{sign}\sigma\ \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_{\sigma_1}\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_p}}\ \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{a}_{\sigma_{p+1}}\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_r}}\\&\quad=\frac{1}{p!\,(r-p)!}\sum_{\text{permutace }\sigma}\operatorname{sign}\sigma\ \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_{\sigma_1}\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_p}}\ \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{a}_{\sigma_{p+1}}\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_r}}\\&\quad=\tfrac{r!}{p!(r-p)!}\ \boldsymbol{\omega}_{[\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}\ \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{a}_{p+1}\dots\boldsymbol{a}_r]}=\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}\wedge\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{a}_{p+1}\dots\boldsymbol{a}_r}\ .\end{aligned}$$

V posledním řádku jsme již jen užili správnou normalizaci antisymetrizace a definici vnějšího součinu. ∎

Dále dokážeme lemma V4.1

Důkaz: (Lemma V4.1)

Máme dokázat, že souřadnice vnější derivace p-formy $\boldsymbol{\omega}$ jsou

$$\mathrm{d}_{a_0}\omega_{a_1\dots a_p}=(p+1)\,\omega_{[a_1\dots a_p,a_0]}\ .$$

V rovnici (4.8) se sčítá přes uspořádané hodnoty souřadnicových indexů. Díky antisymetrii souřadnic $\omega_{a_1\dots a_p}$ a vnějšího součinu $\mathbf{d}x^{a_1}\wedge\dots\wedge\mathbf{d}x^{a_p}$ jsou členy s obecnou volbou indexů buď nulové nebo se liší od členů s uspořádaným pořadím indexů pouze permutací. Permutace indexů však tyto členy nezmění, jelikož se jedná o součiny dvou veličin antisymetrických v těchto indexech. V rovnici (4.8) tedy můžeme uvolnit podmínku na uspořádání sčítacích indexů a multiplikaci členů kompenzovat faktorem $1/p!$.

$$\begin{aligned}\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}&=\frac{1}{p!}\ \mathbf{d}\omega_{a_1\dots a_p}\wedge\mathbf{d}x^{a_1}\wedge\dots\wedge\mathbf{d}x^{a_p}\\&=\frac{1}{p!}\ \omega_{[a_1\dots a_p,a_0]}\ \mathbf{d}x^{a_0}\wedge\mathbf{d}x^{a_1}\wedge\dots\wedge\mathbf{d}x^{a_p}\ .\end{aligned}\tag{4.9}$$

V druhém řádku jsme rozepsali gradient souřadnic pomocí parciálních derivací $\mathbf{d}\omega_{a_1\ldots a_p} = \omega_{a_1\ldots a_p,a_0}\,\mathbf{d}x^{a_0}$ a využili toho, že vnější součin je antisymetrický. Teď již zbývá pouze opět zúžit sumu na sčítání přes různé sčítance, tj. požadovat podmínku $a_0 < \cdots < a_p$, a tuto redukci sčítanců kompenzovat faktorem $(p{+}1)!$:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = \sum_{a_0<\cdots<a_1} (p+1)\,\omega_{[a_1\ldots a_p,a_0]}\ \mathbf{d}x^{a_0} \wedge \mathbf{d}x^{a_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{a_p}\ .$$

Srovnáním s (4.6) je lemma dokázáno. ■

Nyní se vrátíme k tvrzení z marginálie M4.5.

Lemma V4.7 (Zúžení vnější derivace)

Zúžení vnější derivace p-formy $\boldsymbol{\omega}$ s vektorovými poli $\boldsymbol{a}_0,\ \boldsymbol{a}_1,\ \ldots, \boldsymbol{a}_p$ lze vyjádřit:

$$\begin{aligned}
&\big(\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_0}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\ldots\boldsymbol{n}_p}\big)\ \boldsymbol{a}_0^{\boldsymbol{n}_0}\ \boldsymbol{a}_1^{\boldsymbol{n}_1}\cdots\boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p}\\
&\quad= \sum_{0\le k\le p} (-1)^k\,\boldsymbol{a}_k^{\boldsymbol{n}_k}\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_k}\big(\underbrace{\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_0\ldots\boldsymbol{n}_p}\ \boldsymbol{a}_0^{\boldsymbol{n}_0}\cdots\boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p}}_{\text{mimo } \boldsymbol{n}_k}\big)\\
&\qquad+ \sum_{0\le k<l\le p} (-1)^{k+l}\,\big[\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_l\big]^{\boldsymbol{n}}\ \underbrace{\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_0\ldots\boldsymbol{n}_p}\ \boldsymbol{a}_0^{\boldsymbol{n}_0}\cdots\boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p}}_{\text{mimo } \boldsymbol{n}_k,\ \boldsymbol{n}_l}.
\end{aligned}$$ □

Důkaz:

Vyjdeme opět z rovnice (4.8) a použijeme vztah (4.3), kde za 1-formu vezmeme $\mathbf{d}\omega_{a_1\ldots a_p}$. Dostaneme

$$\begin{aligned}
&\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_0}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\ldots\boldsymbol{n}_p}\\
&\quad= \sum_{a_1<\cdots<a_p}\ \sum_{0\le k\le p} (-1)^k\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_k}\omega_{a_1\ldots a_p}\underbrace{\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_0}x^{a_1}\wedge\cdots\wedge\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_p}x^{a_p}}_{\text{mimo } \boldsymbol{n}_k}\\
&\quad= \sum_{0\le k\le p} (-1)^k\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_k}\omega_{a_1\ldots a_p}\underbrace{\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_0}x^{a_1}\cdots\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_p}x^{a_p}}_{\text{mimo } \boldsymbol{n}_k}\\
&\quad= \sum_{0\le k\le p} (-1)^k\ \omega_{\underbrace{c_0\ldots c_p}_{\text{mimo } c_k},c_k}\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_0}x^{c_0}\cdots\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_p}x^{c_p}\ .
\end{aligned}$$

V třetím řádku jsme nahradili vnější součin tenzorovým ($\omega_{a_1\ldots a_p}$ je antisymetrické) a odlišnou normalizaci vnějšího součinu jsme vykompenzovali uvolněním podmínky na uspořádání hodnot souřadnicových indexů. V posledním řádku jsme vyjádřili gradient souřadnic pomocí parciálních derivací $\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_k}\omega_{a_1\ldots a_p} = \omega_{a_1\ldots a_p,a_0}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_k}x^{a_0}$ a přejmenovali sčítací indexy $[a_0, a_1, \ldots, a_p] \to [c_k, c_0, \ldots, c_p]$.

Výsledný vztah zúžíme s $(p+1)$ vektory $\boldsymbol{a}_0, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ a použijeme pravidlo pro derivování součinu

$$\begin{aligned}
&\big(\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_0}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\ldots\boldsymbol{n}_p}\big)\,\boldsymbol{a}_0^{\boldsymbol{n}_0}\boldsymbol{a}_1^{\boldsymbol{n}_1}\cdots\boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p}\\
&\quad= \sum_{0\le k\le p} (-1)^k\,\omega_{\underbrace{c_0\ldots c_p}_{\text{mimo } c_k},c_k}\ a_0^{c_0}\cdots a_p^{c_p}\\
&\quad= \sum_{0\le k,\le p} (-1)^k\,a_k^{c_k}\,\big(\underbrace{\omega_{c_0\ldots c_p}\,a_0^{c_0}\cdots a_p^{c_p}}_{\text{mimo } c_k}\big)_{,c_k}\\
&\qquad- \sum_{\substack{0\le k,\,l\le p\\ l\ne k}} (-1)^k\,a_k^{c_k}\,(a_l^{c_l})_{,c_k}\ \omega_{\underbrace{c_0\ldots c_p}_{\text{mimo } c_k}}\ \underbrace{a_0^{c_0}\cdots a_p^{c_p}}_{\text{mimo } a_k^{c_k},\ a_l^{c_l}}\ .
\end{aligned}$$

V druhé sumě přejmenujeme sčítací indexy $c_k \to m$, $c_l \to n$ a prokomutujeme index n v souřadnici $\omega_{c_0\ldots c_p}$ na první místo. To přispěje pro $l < k$

faktorem $(-1)^{(l+1)}$ a pro $l > k$ faktorem $(-1)^l$ (index c_k chybí!). Ve sčítancích s $l < k$ přejmenujeme $l \leftrightarrow k$ a tím převedeme sumu na součet přes uspořádané indexy $k < l$.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{d}_{n_0}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\ldots\boldsymbol{n}_p}\boldsymbol{a}_0^{\boldsymbol{n}_0}\boldsymbol{a}_1^{\boldsymbol{n}_1}\cdots\boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p}\\
&\quad=\sum_{0\le k,\le p}(-1)^k\,a_k^{c_k}\,\underbrace{\left(\omega_{c_0\ldots c_p}\,a_0^{c_0}\cdots a_p^{c_p}\right)}_{\text{mimo } c_k}{}_{,c_k}\\
&\quad\quad-\sum_{0\le k<l\le p}(-1)^{k+l}\left(a_k^m\,(a_l^n)_{,m}-a_l^m\,(a_k^n)_{,m}\right)\underbrace{\omega_{nc_0\ldots c_p}\,a_0^{c_0}\cdots a_p^{c_p}}_{\text{mimo } c_k,\ c_l}.
\end{aligned}$$

Ovšem závorka v druhé sumě je přesně n-tá souřadnice Lieovy závorky $[\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_l]$. Obdrželi jsme tak tvrzení lemmatu v souřadnicovém zápisu. ■

Nakonec dokážeme Cartanovu identitu V4.3. V textu jsme uvedli důkaz pro $p = 1$. Pro formy vyššího stupně probíhá důkaz analogicky, pouze s využitím obecného tvrzení z marginálie M4.5 – tj. s použitím právě dokázaného lemmatu V4.7.

Důkaz: (Věta V4.3)

Aplikací Leibnizova pravidla pro Lieovu derivaci zúžení p-formy $\boldsymbol{\omega}$ s vektorovými poli $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ dostaneme

$$\begin{aligned}
&\left(\pounds_{\boldsymbol{a}_0}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\ldots\boldsymbol{n}_p}\right)\boldsymbol{a}_1^{\boldsymbol{n}_1}\ldots\boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p}\\
&\quad=\boldsymbol{a}_0^{\boldsymbol{n}_0}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_0}\left(\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\ldots\boldsymbol{n}_p}\boldsymbol{a}_1^{\boldsymbol{n}_1}\ldots\boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p}\right)\\
&\quad\quad-\sum_{1\le k\le p}(-1)^{k+1}\left(\pounds_{\boldsymbol{a}_0}\boldsymbol{a}_k^{\boldsymbol{n}}\right)\underbrace{\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_1\ldots\boldsymbol{n}_p}\boldsymbol{a}_1^{\boldsymbol{n}_1}\ldots\boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p}}_{\text{mimo } \boldsymbol{n}_k}.
\end{aligned}$$

Znaménko $(-1)^{k+1}$ vzniklo prokomutováním indexu $\boldsymbol{n}$ (přejmenovaný index $\boldsymbol{n}_k$) na první pozici. Nyní použijeme lemma V4.7 pro formu $\boldsymbol{\omega}$ a lemma V3.7 k převedení Lieovy derivace na Lieovu závorku:

$$\begin{aligned}
&\left(\pounds_{\boldsymbol{a}_0}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\ldots\boldsymbol{n}_p}\right)\boldsymbol{a}_1^{\boldsymbol{n}_1}\ldots\boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p}\\
&\quad=\left(\boldsymbol{a}_0^{\boldsymbol{n}_0}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_0}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\ldots\boldsymbol{n}_p}\right)\boldsymbol{a}_1^{\boldsymbol{n}_1}\ldots\boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p}\\
&\quad\quad-\sum_{1\le k\le p}(-1)^k\boldsymbol{a}_k^{\boldsymbol{n}_k}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_k}\underbrace{\left(\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_0\ldots\boldsymbol{n}_p}\boldsymbol{a}_0^{\boldsymbol{n}_0}\ldots\boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p}\right)}_{\text{mimo } \boldsymbol{n}_k}\\
&\quad\quad-\sum_{0\le l<k\le p}(-1)^{l+k}\left[\boldsymbol{a}_l,\boldsymbol{a}_k\right]^{\boldsymbol{n}}\underbrace{\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_0\ldots\boldsymbol{n}_p}\boldsymbol{a}_0^{\boldsymbol{n}_0}\ldots\boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p}}_{\text{mimo } \boldsymbol{n}_l,\ \boldsymbol{n}_k}\\
&\quad\quad+\sum_{1\le k\le p}(-1)^k\left[\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{a}_k\right]^{\boldsymbol{n}}\underbrace{\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_1\ldots\boldsymbol{n}_p}\boldsymbol{a}_1^{\boldsymbol{n}_1}\ldots\boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p}}_{\text{mimo } \boldsymbol{n}_k}.
\end{aligned}$$

Poslední řádek se vyruší s členy $l = 0$ z předchozího řádku. Zbývající členy na druhém a třetím řádku lze identifikovat jako členy z pravé strany lemmatu V4.7 aplikovaného na $(p-1)$-formu $\boldsymbol{a}_0^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_2\ldots\boldsymbol{n}_p}$. Dostaneme tak

$$\begin{aligned}
&\left(\pounds_{\boldsymbol{a}_0}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\ldots\boldsymbol{n}_p}\right)\boldsymbol{a}_1^{\boldsymbol{n}_1}\ldots\boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p}\\
&\quad=\Big(\boldsymbol{a}_0^{\boldsymbol{n}}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\ldots\boldsymbol{n}_p}+\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}_1}\left(\boldsymbol{a}_0^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_2\ldots\boldsymbol{n}_p}\right)\Big)\boldsymbol{a}_1^{\boldsymbol{n}_1}\ldots\boldsymbol{a}_p^{\boldsymbol{n}_p}.
\end{aligned}$$

Vektorová pole $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ mohou být libovolná a můžeme je tedy ‘zkrátit’. Tím dostáváme Cartanovu identitu pro obecnou p-formu $\boldsymbol{\omega}$. ■

Kapitola 5

Integrování na varietách

Dosud jsme se zabývali převážně lokálními objekty na varietě. V této kapitole vybudujeme aparát pro zkoumání globálních extenzivních veličin. Naučíme se, co a jak lze na varietě integrovat.

5.1 Souřadnicové integrování

Budeme předpokládat, že ze standardní matematické analýzy víme jak spočítat integrál funkce f od d proměnných přes obecnou oblast $O \subset \mathbb{R}^d$

$$\int_O f(x^1, \ldots, x^d)\, dx^1 \ldots dx^d \; . \tag{5.1}$$

Význam tohoto integrálu je 'spojitá suma' 'infinitezimální kvantity' $f\, dx^1 \ldots dx^d$ přes oblast O. Pokud zvolíme speciálně $f = 1$, integrál udává *souřadnicový objem* oblasti O, měřený v počtu jednotkových souřadnicových krychliček. Integrování samozřejmě vyčísluje tento objem 'chytrým' způsobem fungujícím i pro oblasti, které nerespektují mříž souřadnic x^j – rozdělí si oblast na nekonečně malé krychličky a přes ně pak provede sumu. Kvantitu $dx^1 \ldots dx^d$ tak lze formálně chápat, jako souřadnicový objem elementárně malé krychličky.

Integrování v $\mathbb{R}^d$ lze přenést na obecnou varietu pomocí souřadnicové mapy.

Definice D5.1 (Souřadnicové integrování)

Pro zvolený souřadnicový systém x^j zadaný na oblasti U d-dimenzionální variety M definujeme *souřadnicové integrování* funkce f přes oblast $\Omega \subset U$ následovně:

$$\int_\Omega f\, d^d x = \int_{x^j(\Omega)} \tilde{f}(x^1, \ldots, x^d)\, dx^1 \ldots dx^d \; .$$

Zde $x^j(\Omega)$ je obraz oblasti Ω v $\mathbb{R}^d$ a $\tilde{f}$ je funkce f chápaná jako funkce od souřadnic

$$f(z) = \tilde{f}(x^1(z), \ldots, x^d(z)) \; , \quad z \in U \; .$$ ◦

Poznámka

Obvykle se funkce $\tilde{f}$ a f nerozlišují.

Takto definovaný integrál měří objem v jednotkách souřadnicových krychliček souřadnic x^j a d^dx lze chápat jako souřadnicový objem infinitezimální oblasti.

Na obecné varietě však máme k dispozici mnoho souřadnicových systémů a výše definované integrování závisí na volbě jednoho z nich. Věta o substituci pro integrování v d proměnných nám dá vztah mezi integrováním v různých souřadnicových systémech

Lemma V5.1

Nechť x^j a y^j jsou dva souřadnicové systémy definované na oblasti U, f funkce definovaná na U a $\Omega \subset U$. Pak platí

$$\int_\Omega f\, d^dx = \int_\Omega f \left|\det \frac{\partial x^k}{\partial y^l}\right| d^dy \,. \qquad \square$$

Determinant přechodové matice $\partial x^k/\partial y^l$, neboli Jacobián, je faktor převádějící ‘počet krychliček’ napnutých na souřadnicích x^j na ‘počet krychliček’ napnutých na y^j.

5.2 Integrovatelné hustoty – motivace

Nás však většinou nezajímá souřadnicový objem: v geometrii nás zajímá skutečný objem, nezávislý na volbě souřadnic. Ve fyzice nás pak většinou zajímají množství určitých extenzivních veličin – hmotnosti, energie, náboje, atd. – v dané oblasti. Extenzivní veličinou míníme kvantitu, která je lokálně rozprostřená po varietě a je aditivní vůči skládání disjunktních oblastí. Určení množství takové veličiny v zadané oblasti Ω se pak redukuje na sumu přes infinitezimálně malé části této oblasti. Potřebujeme proto zavést matematický objekt vystihující *velikost* infinitezimální oblasti či lépe *množství zkoumané kvantity* v infinitezimální oblasti. Integrál pak lze chápat jako ‘spojitou sumu’ této veličiny. Hledaný objekt se nazývá *objemový element* či *integrovatelná hustota*.

Než uvedeme přesnou definici integrovatelné hustoty, ujasníme si její vlastnosti. Integrovatelná hustota (v daném bodě) je intuitivně řečeno nekonečně malé číslo určující množství kvantity v infinitezimální oblasti kolem bodu. Toto množství nelze vyčíslit přímo, můžeme s ním však formálně manipulovat. Např. můžeme dvě hustoty sečíst (složení dvou extenzivních veličin) nebo zkoumat jejich *poměr*. Ten by měl určovat, kolik je v elementární oblasti první kvantity na jednotku druhé kvantity – např. množství náboje na jednotku objemu či množství entropie na jednotku hmotnosti. Poměr dvou integrovatelných hustot je konečné číslo.

Poznámka

Název *objemový element* může být trochu matoucí, protože označuje matematický objekt, který může mít i zcela negeometrickou interpretaci – viz třeba množství hmoty či náboje. Objemový element měřící ‘skutečný’ objem dV (zadaný např. pomocí metriky – budeme též říkat *geometrický* objem) je jen jeden konkrétní příklad objemového elementu. Častěji proto budeme používat označení *integrovatelná hustota* (či krátce *hustota*) – např. hustota energie nebo náboje. Je potřeba ale odlišit *integrovatelnou hustotu* (např. náboje) dq od *objemové hustoty* ρ. Ta udává poměr mezi hustotou náboje dq a hustotou geometrického objemu dV, tj. $dq = \rho\, dV$.

Ze své povahy mají integrovatelné hustoty skalární charakter – k jejich určení stačí podchytit jejich velikost. Zvolíme-li v daném bodě

M5.1 Jednodimenzionální integrování
Poznamenejme, že pro $d = 1$ umožňuje integrál zavedený v textu integrovat přes *neorientovanou* oblast. Pro interval $I = \langle x_z, x_k\rangle$ máme integrál $\int_I f\,dx$ nezávisející na orientaci reálné osy, tj. na tom, která z mezí x_z, x_k je dolní a která horní. Vedle toho se často používá zápis pomocí *orientovaného integrálu*, $\int_{x_z}^{x_k} f\,dx$, rozlišující pořadí mezí. V prvním případě musíme při substituci $y = y(x)$ použít Lemma V5.1

$$\int_{x\in I} f\,dx = \int_{y\in y(I)} f \left|\frac{dx}{dy}\right| dy \,.$$

V druhém případě se musí užít transformační faktor bez absolutní hodnoty,

$$\int_{x_z}^{x_k} f\,dx = \int_{y(x_z)}^{y(x_k)} f\,\frac{dx}{dy}\,dy \,,$$

přičemž znaménko obstarává pořadí mezí – při záměně horní a dolní meze (např. při vzestupném přeuspořádání mezí pokud substituce změní jejich pořadí) je nutné přidat dodatečné minus.
Jelikož možnost uspořádat meze je speciální vlastnost integrálu v jedné dimenzi, která nelze přímočaře zobecnit na obecné oblasti ve více dimenzích, nebudeme orientovaný integrál používat.

jednu referenční hustotu (např. dV), každá další hustota (řekněme dm) bude již jednoznačně dána svým poměrem k referenční hustotě

$$dm = \mu \, dV \; . \tag{5.2}$$

Hustoty v daném bodě tak tvoří jednodimenzionální vektorový prostor a poměr μ hraje roli *souřadnice* hustoty dm vzhledem k dV.

K určení obecné hustoty tedy stačí zadat její vztah k jistým speciálním hustotám, které máme dobře pod kontrolou. V předchozím oddíle jsme se s takovými hustotami již setkali – jednalo se o kvantitu $d^d x$ měřící *souřadnicový objem*, tj. objem měřený v počtu souřadnicových krychliček napnutých na souřadnicové čáry. Souřadnicovou hustotu můžeme charakterizovat i mírně odlišným způsobem – zadáním infinitezimálních souřadnic. V okolí daného bodu lze souřadnicové čáry systému x^j aproximovat tečnými vektory $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial} x^j$. Elementární souřadnicová krychlička je tak dána bází vektorů. S každou bází vektorů můžeme tedy asociovat souřadnicovou hustotu měřící objem v počtu krychliček napnutých na této bázi.

Je přirozené se nyní ptát, jak se mění souřadnicová hustota se změnou souřadnic. Zvětšíme-li souřadnicové krychličky např. dvakrát (zdvojnásobíme jeden z vektorů báze), změní se souřadnicová hustota na polovinu (do elementární oblasti se vejde jen polovina zvětšených souřadnicových krychliček). Tento princip určuje transformační vlastnosti souřadnicových hustot i při obecné změně báze. Konkrétně, máme-li souřadnicovou hustotu $d^d x$ definovanou pomocí krychliček napnutých na bázi $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial} x^j$ a hustotu $d^d y$ danou bází $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial} y^j$, pak jejich poměr je dán faktorem J určujícím, kolikrát musíme krychličku napnutou na $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial} x^j$ zvětšit, abychom dostali krychličku napnutou na $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial} y^j$,

$$d^d y = J^{-1} \, d^d x \; . \tag{5.3}$$

Z elementární vektorové algebry víme, že faktor J je dán velikostí determinantu matice přechodu mezi oběma bázemi. Ta je v našem případě $\frac{\partial x^i}{\partial y^j}$, čili

$$J = \left| \det \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right| \; , \tag{5.4}$$

čímž jsme v podstatě zreprodukovali Lemma V5.1 o chování souřadnicového integrování při změně souřadnic.

Zvolme nyní souřadnicové hustoty $d^d x$ a $d^d y$ jako dvě referenční hustoty. Poměry integrovatelné hustoty dm k těmto referenčním hustotám označíme μ_x a μ_y:

$$dm = \mu_x \, d^d x = \mu_y \, d^d y \; . \tag{5.5}$$

Pak okamžitě dostáváme transformační vztah

$$\mu_y = \left| \det \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right| \mu_x \; . \tag{5.6}$$

Tento transformační vztah je klíčem k exaktní definici integrovatelných hustot.

5.3 Integrovatelné hustoty – definice

V předchozím oddíle jsme motivovali pojem integrovatetelné hustoty potřebou umět integrovat extenzivní veličiny rozprostřené na varietě. Aditivita těchto veličin však umožňuje zkoumat integrovatelné hustoty lokálně. Hustotu v bodě x lze definovat jako *ultralokální* objekt 'žijící' pouze v tomto bodě, tj. nezávisející na propojení s okolními body. Integrovatelné hustoty se budou vztahovat pouze k tečnému prostoru daného bodu. Obecně lze hustoty vybudovat nad každým vektorovým prostorem, stejně jako umíme nad každým vektorovým prostorem vybudovat tenzorovou algebru. Hustoty tak lze chápat, jako jisté rozšíření pojmu tenzoru. Samozřejmě, v praxi nás budou hlavně zajímat hustoty definované ne v jednom bodě, nýbrž na celé oblasti, přes kterou chceme integrovat.

Obecná hustota je dána svým vztahem k souřadnicové hustotě a transformačními vlastnostmi při změně souřadnic. Souřadnicovou hustotu budeme lokálně specifikovat zadáním 'referenční kostičky', tj. zadáním vektorové báze, na které je kostička napnutá. Obecná hustota pak bude určena svojí souřadnicí vůči takto zadané referenční hustotě.

Definice D5.2 (Integrovatelné hustoty)

Integrovatelná hustota (též *objemový element*) $\mathfrak{a}$ v bodě x variety M je objekt, který je určen vzhledem k libovolné bázi $\boldsymbol{e}_j$ vektorů z tečného prostoru $\boldsymbol{T}_x M$ svojí souřadnicí $\mathfrak{a}[\boldsymbol{e}_j] \in \mathbb{R}$. Souřadnice hustoty se přitom při změně báze

$$\boldsymbol{e}'_{j'} = A^i_{j'}\, \boldsymbol{e}_i$$

transformuje

$$\mathfrak{a}[\boldsymbol{e}'_{j'}] = \left|\det A^i_{j'}\right|\, \mathfrak{a}[\boldsymbol{e}_i]\ .$$

Prostor hustot v bodě x označíme $\boldsymbol{H}_x M$, prostor polí těchto hustot (funkcí přiřazujících každému bodu hustotu v tomto bodě) budeme značit $\widetilde{\mathfrak{F}} M$.

Pole hustoty na oblasti Ω nazveme hladké, pokud jeho souřadnice vzhledem k bázi tvořené hladkými vektorovými poli je hladká funkce. ◦

M5.2 Souvislost s fibrovanými prostory
V definici D5.2 integrovatelných hustot vztahujeme souřadnici hustoty k vektorové bázi a ne k referenční hustotě – to provedeme až později, v lemmatu V5.3. Skrytým důvodem pro tento postup je, že se jedná o obecnou metodu tvorby objektů asociovaných s tečnou strukturou. Prostor bází je tzv. hlavní tečný bundle, na kterém působí grupa obecných nesingulárních lineárních transformací $\mathsf{GL}(d)$. Pro každou reprezentaci této grupy na $\mathbb{R}^n$ lze definovat jistý typ objektů asociovaných s tečnou strukturou (konkrétně, lze definovat vektorový bundle asociovaný s hlavním tečným bundlem). Pro definiční reprezentaci na $\mathbb{R}^d$ tímto postupem dostaneme 1-formy, pro duální reprezentaci dostaneme obyčejné vektory. Hustoty jsou pak dány reprezentací na $\mathbb{R}$

$$A^i_j \to \left|\det A^i_j\right|\ , \qquad A^i_j \in \mathsf{GL}(d)\ .$$

Více o této konstrukci viz část o fibrovaných prostorech.

Poznámka
Hustoty budeme značit gotickými písmeny (např. $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$) nebo stylem dV, dm, přirozeným z hlediska použití hustot při integrování.

Poznámka
V definici by se místo tečného prostoru $\boldsymbol{T}_x M$ mohl použít libovolný vektorový prostor V a obdrželi bychom prostor hustot H asociovaný s V. Lze též zavést prostor komplexních hustot, jejichž souřadnice nabývá hodnoty z $\mathbb{C}$.

Poznámka
V terminologii teorie míry odpovídá pole integrovatelné hustoty diferenciálu dostatečně hladké míry.

Lemma V5.2

Prostor hustot $\boldsymbol{H}_x M$ tvoří jednodimenzionální vektorový prostor s operacemi sčítání a násobení číslem danými následovně:

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})[\boldsymbol{e}_i] = \mathfrak{a}[\boldsymbol{e}_i] + \mathfrak{b}[\boldsymbol{e}_i]\ ,$$
$$(r\mathfrak{a})[\boldsymbol{e}_i] = r\mathfrak{a}[\boldsymbol{e}_i]\ ,$$

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \in \boldsymbol{H}_x M$ a $r \in \mathbb{R}$. Transformační vlastnosti souřadnice výsledku jsou evidentně splněny. □

V definici hustoty vztahujeme souřadnice k vektorové bázi, která zadává ‘referenční krychličku’. Můžeme však přímo identifikovat i referenční souřadnicovou hustotu.

Definice D5.3 (Souřadnicová hustota)

S každou vektorovou bází $\boldsymbol{e}_j$ můžeme asociovat *souřadnicovou hustotu* $\mathfrak{e}$ požadavkem

$$\mathfrak{e}[\boldsymbol{e}_j] = 1 \ .$$

Máme-li zadaný systém souřadnic x^j $(j = 1, \dots, d)$, budeme souřadnicovou hustotu asociovanou s bází $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial} x^j$ označovat $d^d x$. ∘

Poznámka

V případě, že máme jednotlivé souřadnice pojmenovány vlastními symboly, jako např. u sférických souřadnic $\{x^1, x^2, x^3\} = \{r, \vartheta, \varphi\}$, budeme psát místo d^3x formální součin $dr d\vartheta d\varphi$.

Zřejmě platí

Lemma V5.3

Nechť $\mathfrak{e}$ je souřadnicová hustota asociovaná s bází $\boldsymbol{e}_j$. Pak libovolnou hustotu $\mathfrak{a}$ můžeme zapsat

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}[\boldsymbol{e}_j]\, \mathfrak{e} \ .$$ □

Každé hladké pole hustot dq můžeme tedy na oblasti pokryté souřadnicovým systémem x^j vyjádřit

$$dq = dq\big[\tfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^j}\big]\, d^d x \ , \tag{5.7}$$

tj. jako součin hladké funkce $dq\big[\tfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^j}\big]$ a souřadnicové hustoty $d^d x$. Tímto způsobem se hustota dq také typicky zadává. Inspirováni vztahem (5.7), budeme pro souřadnici hustoty také užívat značení

$$dq\big[\tfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^j}\big] = \frac{dq}{d^d x} \ . \tag{5.8}$$

Příklad P5.1 (Plošný element v rovině a na sféře)

Jako příklad si uvedeme vyjádření plošného elementu dS v euklidovské rovině. dS je integrovatelná hustota na E^2, která je nejjednodušeji zadána v kartézských souřadnicích x, y

$$dS = dx dy \ , \quad dS\big[\tfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x}, \tfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} y}\big] = 1 \ .$$

Jedná se tedy přímo o souřadnicovou hustotu asociovanou s kartézskými souřadnicemi. Využitím transformačních vlastností souřadnic hustoty (definice D5.2) dostaneme vyjádření v polárních souřadnicích r, φ

$$dS = r\, dr d\varphi \ .$$

Vskutku, matice přechodu od x, y k r, φ je

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix}$$

a determinant dá $dS\big[\tfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} r}, \tfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} \varphi}\big] = r$.

Jen trochu netriviálnější příklad je zadání plošného elementu na sféře S^2. Tato hustota již není souřadnicová vzhledem k běžným systémům souřadnic. Ve standardních sférických souřadnicích ϑ, φ máme

$$dS = \sin\vartheta\, d\vartheta d\varphi \ .$$

Cvičení C5.1

Nalezněte souřadnice na S^2, ve kterých bude dS z příkladu P5.1 souřadnicovou hustotou. ✓

5.4 Integrování hustot

Nyní se vrátíme k hlavnímu tématu této kapitoly – integrování. Hustoty jsme zavedli hlavně proto, že nám umožňují definovat jejich integrál.

Definice D5.4 (Integrování hustot)
Mějme pole integrovatelné hustoty $\mathfrak{a}$ definované na oblasti Ω, pak integrál této hustoty přes oblast Ω je

$$\int\limits_{\Omega} \mathfrak{a} = \int\limits_{\Omega} \mathfrak{a}\big[\tfrac{\partial}{\partial x^j}\big]\, d^d x\ ,$$

kde x^j je libovolný souřadnicový systém definovaný na okolí oblasti Ω. Pravá strana této rovnosti je chápána ve smyslu definice D5.1. $\circ$

Poznámka
Dále budeme již místo ‘pole integrovatelné hustoty na oblasti Ω’ krátce říkat ‘hustota na Ω’.

Užitím lemmatu V5.1 a transformačních vlastností souřadnice hustoty (definice D5.2) lehce ověříme, že se integrál nezmění při změně souřadnicového systému.

Integrál z definice D5.4 je však použitelný pouze pro oblasti, které lze pokrýt jedním souřadnicovým systémem. To však nemusí být vždy možné – typicky při integraci přes topologicky netriviální variety nelze zvolit globální souřadnicový systém. Praktická odpověď na tuto obtíž je rozdělit oblast integrace na podoblasti, které již lze pokrýt souřadnicovým systémem (jednotlivé podoblasti různými systémy), spočítat integrály přes tyto podoblasti a výsledky sečíst.

Elegantnější alternativa tohoto postupu (vyhýbající se potenciálním potížím s hladkostí při dělením oblasti na podoblasti) využívá tzv. *rozkladu jednotky*.

Definice D5.5 (Rozklad jednotky)
Mějme varietu pokrytou souřadnicovými systémy definovanými na oblastech U_k. Rozklad jednotky pro takovéto pokrytí je přiřazení ke každé oblasti U_k hladké funkce φ_k s nosičem v této oblasti tak, že

$$\sum_k \varphi_k = 1\ .$$ $\circ$

Lze ukázat, že takovýto rozklad jednotky vždy existuje. Rozklad jednotky nám zprostředkuje ‘hladké’ rozdělení variety na podoblasti lokalizované již v oblastech definice souřadnicových systémů. Můžeme tak definovat integrál přes libovolnou oblast Ω:

Definice D5.6 (Globální integrování hustot)
Integrál hustoty $\mathfrak{a}$ přes obecnou oblast Ω definujeme

$$\int\limits_{\Omega} \mathfrak{a} = \sum_k \int\limits_{\Omega\cap U_k} \varphi_k\, \mathfrak{a}\ ,$$

kde U_k jsou oblasti definice souřadnicových systémů pokrývající celou varietu a $\{\varphi_k\}$ je rozklad jednotky pro toto pokrytí. Integrály na pravé straně lze již chápat ve smyslu definice D5.4. $\circ$

Z náhledu je zřejmé, že integrál nezávisí na volbě pokrytí variety a výběru rozkladu jednotky – přestože formální důkaz vyžaduje jisté technické úsilí.

POZNÁMKA
Definice D5.6 samozřejmě definuje i integrál typu $\int_\Omega f\mathfrak{a}$, jelikož $f\mathfrak{a}$ je též integrovatelná hustota.

Tímto jsme završili definici integrálu obecné integrovatelné hustoty přes obecnou oblast variety. Shrňme ještě jednotlivé kroky. Integrál se nejdříve rozdělí pomocí rozkladu jednotky na integrály přes oblasti, z nichž každá je pokrytá jedním souřadnicovým systémem (definice D5.6). V těchto oblastech se hustota vyjádří pomocí souřadnicové hustoty (definice D5.4) a integrál ze souřadnicové hustoty se převede na integrál v $\mathbb{R}^d$ (definice D5.1).

PŘÍKLAD P5.2 (INTEGROVÁNÍ NA VÁLCOVÉ PLOŠE)
V tomto příkladě provedeme podrobně všechny právě popsané kroky při integrování přes válcovou plochu.

Válcová plocha C je varieta topologie $\mathbb{R}\times S^1$. Pro její pokrytí potřebujeme alespoň dva souřadnicové systémy, které označíme x,φ a y,ψ. Souřadnice $x,y\in\mathbb{R}$ běžící ve směru podél osy válce zvolíme totožné, $x=y$. Souřadnice $\varphi,\psi\in(-\pi,\pi)$ číslují směr okolo válce a zvolíme je posunuté o polovinu válce

$$\psi=\begin{cases}\varphi-\pi & \text{pro}\quad \varphi>0\,,\\ \varphi+\pi & \text{pro}\quad \varphi<0\,.\end{cases}$$

Oba souřadnicové systémy pokrývají celý válce mimo jedné přímky – systém x,φ nepokrývá přímku $\psi=0$ (oblast U), systém y,ψ přímku $\varphi=0$ (oblast V). Rozklad jednotky je dán např. funkcemi $\cos^2\frac{\varphi}{2}$ na U a $\cos^2\frac{\psi}{2}=\sin^2\frac{\varphi}{2}$ na V.

Přirozený plošný element dS je přímo souřadnicová hustota asociovaná s těmito systémy, tj. $dS=dxd\psi$ na U a $dS=dyd\varphi$ na V. Na průniku $U\cap V$ je definice zjevně konzistentní .

Chceme-li nyní zintegrovat např. hustotu

$$\mathfrak{a}=\exp(-x^2)\,\cos^2\!\varphi\;dS=\exp(-y^2)\,\cos^2\!\psi\;dS$$

přes celý válec C, postupujeme následovně:

$$\begin{aligned}\int_C\mathfrak{a}&=\int_U\cos^2\frac{\varphi}{2}\,\mathfrak{a}+\int_V\cos^2\frac{\psi}{2}\,\mathfrak{a} && \text{rozdělení na podoblasti}\\ &=\int_U\cos^2\frac{\varphi}{2}\,\exp(-x^2)\cos^2\!\varphi\,dxd\varphi+\int_V\cos^2\frac{\psi}{2}\,\exp(-y^2)\cos^2\!\psi\,dyd\psi && \text{přechod k souřadnicové hustotě}\\ &=\int_{x\in\mathbb{R}}\exp(-x^2)\,dx\int_{\varphi\in(-\pi,\pi)}\cos^2\frac{\varphi}{2}\,\cos^2\varphi\,d\varphi && \text{přechod k integrování v }\mathbb{R}^d\\ &\qquad+\int_{y\in\mathbb{R}}\exp(-y^2)\,dy\int_{\psi\in(-\pi,\pi)}\cos^2\frac{\psi}{2}\,\cos^2\psi\,d\psi && \text{a faktorizace na jednodimenzionální integrály}\\ &=\pi^{3/2}\,. && \text{vyčíslení integrálů}\end{aligned}$$

V praxi si samozřejmě výpočet integrálu můžeme usnadnit. Využijeme faktu, že oblast U pokrývá celý válec C až na jednu přímku. Ta je však míry nula vzhledem k hladké integrovatelné hustotě $\mathfrak{a}$. Můžeme proto tuto přímku ignorovat a přeskočit první krok v uvedeném postupu:

$$\int_C\mathfrak{a}\;=\int_U\exp(-x^2)\cos^2\!\varphi\,dxd\varphi=\int_{x\in\mathbb{R}}\exp(-x^2)\,dx\int_{\varphi\in(-\pi,\pi)}\cos^2\varphi\,d\varphi=\pi^{3/2}\,.$$

5.5 Vlastnosti hustot a operace s nimi

Hustoty v daném bodě můžeme rozlišit na kladné a záporné.

Definice D5.7 (Absolutní hodnota hustoty)

Hustotu nazýváme kladnou (zápornou), pokud její souřadnice vůči libovolné bázi je kladná (záporná). Prostor kladných a záporných hustot budeme značit $\boldsymbol{H}_x^+ M$ a $\boldsymbol{H}_x^- M$.

Absolutní hodnotu hustoty $\mathfrak{a}$ definujeme zadáním její souřadnice:

$$|\mathfrak{a}|\,[\boldsymbol{e}_j] = \big|\mathfrak{a}[\boldsymbol{e}_j]\big| \ . \qquad \circ$$

Zjevně $|a| \in \boldsymbol{H}_x^+ M$. Stejně tak jsou kladné všechny souřadnicové hustoty $d^d x$.

Jelikož má prostor hustot lineární charakter, můžeme ho tenzorově vynásobit s prostorem tečných tenzorů. Dostaneme tak objekty, které mají zároveň charakter hustoty i tenzoru. Ve většině ohledů se tyto objekty chovají jako běžné tenzory. Fakt, že se jedná i o hustoty intuitivně znamená, že jsou přeškálované nekonečně malým číslem.

Definice D5.8 (Tenzorové hustoty)

Prvky tenzorového součinu prostoru hustot a tečných tenzorů nazýváme *tenzorové hustoty*. Prostor tenzorových hustot označíme $\tilde{\boldsymbol{T}}_x M$, tj.

$$\tilde{\boldsymbol{T}}_x M = \boldsymbol{H}_x M \otimes \boldsymbol{T}_x M \ .$$

Prostor příslušných polí označíme $\tilde{\mathfrak{T}} M$. $\circ$

Poznámka

Tenzorové hustoty budeme někdy odlišovat od běžných tenzorů vlnovkou, např. $\tilde{\boldsymbol{a}}$.

Vzhledem k tomu, že prostor hustot je jednodimenzionální, každou tenzorovou hustotu $\tilde{\boldsymbol{a}}$ lze faktorizovat na součin hustoty a obyčejného tenzoru, $\tilde{\boldsymbol{a}} = \mathfrak{a}\,\boldsymbol{a}$. Tento rozklad však není jednoznačný.

Samozřejmě se nabízí provést i tenzorový součin prostoru hustot se sebou. To, že $\dim \boldsymbol{H}_x M = 1$ nám dokonce dovolí definovat obecnou w-tou tenzorovou mocninu, $w \in \mathbb{R}$. Vytvoříme tak objekty nového druhu nazývané hustoty váhy w.

Definice D5.9 (Hustoty váhy w)

Hustoty váhy w jsou definovány obdobně jako integrovatelné hustoty (definice D5.2) pomocí své souřadnice vůči bázi $\boldsymbol{e}_j$ v tečném prostoru. $\mathfrak{a}$ je hustota váhy w, pokud se její souřadnice $\mathfrak{a}[\boldsymbol{e}_j]$ transformuje

$$\mathfrak{a}[A^i_{j'}\,\boldsymbol{e}_i] = \big|\det A^i_{j'}\big|^w\ \mathfrak{a}[\boldsymbol{e}_i] \ .$$

Prostor hustot váhy w v bodě x označíme $\boldsymbol{H}_x^w M$. $\circ$

Integrovatelné hustoty z definice D5.2 jsou pak hustoty váhy $w = 1$ a hustoty váhy $w = 0$ se redukují na obyčejné čísla (jejich 'souřadnice' se při změně báze nemění).

Definice D5.10 (Součiny a mocniny hustot)

Obecná r-tá mocnina ($r \in \mathbb{R}$) kladné hustoty $\mathfrak{a}$ váhy w je hustota váhy rw, jejíž souřadnice je

$$\mathfrak{a}^r[\boldsymbol{e}_j] = \big(\mathfrak{a}[\boldsymbol{e}_j]\big)^r \ .$$

Celočíselné mocniny můžeme definovat i pro záporné hustoty.

Součin dvou hustot $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ váh a a b je hustota váhy $a+b$ daná opět souřadnicově

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})[\boldsymbol{e}_j] = \mathfrak{a}[\boldsymbol{e}_j]\,\mathfrak{b}[\boldsymbol{e}_j]\ . \qquad \circ$$

Na varietě bez dodatečné struktury neexistuje nějaká kanonická, speciální integrovatelná hustota. Různé geometrické struktury však mohou význačnou hustotu specifikovat. Nejdůležitějším příkladem je metrická struktura, umožňující definovat délky křivek, velikosti úhlů a – jak nyní ukážeme – měřit objem. Metrickou strukturou se budeme podrobně zabývat v kapitole 6, nyní nám však postačí vědět, že je určena metrikou, což je symetrický nedegenerovaný tenzor typu $\boldsymbol{T}^0_2 M$ (viz definici D6.1). Metrika $\boldsymbol{g}_{mn}$ definuje skalární součin vektorů $\boldsymbol{a}^m$, $\boldsymbol{b}^n$ vztahem $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{g}_{mn}\boldsymbol{a}^m\boldsymbol{b}^n$. S metrikou lze asociovat objemový element dV, který měří objem v množství 'krychliček' napnutých na ortonormální bázi, tj. na bázi na sebe kolmých a normalizovaných vektorů ve smyslu metrického skalárního součinu (viz definici D6.2).

Definice D5.11 (Metrický objemový element)

Metrický objemový element (též *metrická hustota*) dV asociovaný s metrikou $\boldsymbol{g}$ splňuje

$$dV[\boldsymbol{e}_j] = 1\ ,$$

pro každou bázi $\boldsymbol{e}_j$ ortonormální ve smyslu metriky $\boldsymbol{g}$. $\circ$

Díky tomu, že determinant matice přechodu mezi dvěmi ortonormálními bázemi je ± 1, definice metrického objemového elementu nezávisí na volbě báze. Jinými slovy, objem referenční ortonormální krychličky nezávisí na jejím natočení.

Poznámka

Na varietách dimenze $1, 2$ a 3 se metrické objemové elementy obvykle značí $d\ell$, dS a dV.

Souřadnice metrického objemového elementu vzhledem k obecné bázi jsou dány pomocí složek metriky:

Věta V5.4

Nechť dV je metrický objemový element metriky $\boldsymbol{g}$. Pak

$$dV[\boldsymbol{e}_j] = |\det g_{ij}|^{1/2}\ ,$$

kde g_{ij} jsou složky metriky vzhledem k bázi $\boldsymbol{e}_j$. $\square$

Důkaz:

Nechť $A^{i'}_j$ je matice přechodu od ortonormální báze $\boldsymbol{e}'_{j'}$ k obecné bázi $\boldsymbol{e}_j$,

$$\boldsymbol{e}_j = A^{i'}_j\,\boldsymbol{e}'_{i'}\ .$$

Pro složky metriky dostáváme

$$g_{ij} = A^{m'}_i\,A^{n'}_j\,g_{m'n'}\ ,$$

kde $g_{m'n'}$ jsou komponenty metriky vzhledem k ortonormální bázi $\boldsymbol{e}'_{j'}$, tj. diagonální matice mající na diagonále pouze 1, případně -1 (viz definici D6.2). Absolutní hodnota determinantu je

$$|\det g_{ij}| = \big(\det A^{i'}_j\big)^2\ .$$

Na druhou stranu však transformační vlastnosti souřadnice hustoty (viz definici D5.2) dávají

$$dV[\boldsymbol{e}_j] = \left|\det A^{i'}_j\right|\,dV[\boldsymbol{e}'_{j'}]\ .$$

Porovnáním posledních dvou rovnic a uvážením, že $dV[\boldsymbol{e}'_{j'}] = 1$, dostáváme dokazované tvrzení. ∎

Věta V5.4 nás může inspirovat k definici nové operace.

Definice D5.12 (Determinant metriky)

Zobrazení Det přiřazující každému tenzoru $\boldsymbol{g}$ typu $(0,2)$ hustotu $\mathrm{Det}\,\boldsymbol{g}$ váhy 2,

$$\mathrm{Det}: \boldsymbol{T}_{x}{}^{0}_{2}M \to \boldsymbol{H}^{2}_{x}M\ , \quad \boldsymbol{g} \to \mathrm{Det}\,\boldsymbol{g}\ ,$$

je definováno vzhledem k libovolné bázi $\boldsymbol{e}_j$ podmínkou

$$(\mathrm{Det}\,\boldsymbol{g})[\boldsymbol{e}_j] = \det g_{ij}\ . \qquad \circ$$

Transformační vlastnosti souřadnice výsledné hustoty (definice D5.9) jsou zřejmě splněny. Poznamenejme, že jsme v definici nepoužili absolutní hodnotu a hustota $\mathrm{Det}\,\boldsymbol{g}$ tak nemusí být nutně kladná.

Pomocí operace Det můžeme napsat metrický objemový element dV následovně

$$dV = |\mathrm{Det}\,\boldsymbol{g}|^{1/2}\ . \tag{5.9}$$

Pro absolutní hodnotu determinantu metriky se často zavádí samostatný symbol – např. pro metriky $\boldsymbol{g}$ a $\boldsymbol{q}$ symboly $\mathfrak{g} = |\mathrm{Det}\,\boldsymbol{g}|$ a $\mathfrak{q} = |\mathrm{Det}\,\boldsymbol{q}|$. Metrický objemový element pak bude $\mathfrak{g}^{1/2}$, případně $\mathfrak{q}^{1/2}$. V souřadnicích x^j lze tuto hustotu zapsat

$$\mathfrak{g}^{1/2} = |\det g_{ij}|^{1/2}\, d^d x\ . \tag{5.10}$$

Často se můžeme setkat se zápisem

$$\int_\Omega f\,\mathfrak{g}^{1/2} = \int_\Omega f\,|\det g_{ij}|^{1/2}\, d^d x\ . \tag{5.11}$$

Příklad P5.3

Euklidovská metrika na E^d je v kartézských souřadnicích dána výrazem

$$\boldsymbol{g} = \mathbf{d}x^1\,\mathbf{d}x^1 + \cdots + \mathbf{d}x^d\,\mathbf{d}x^d\ .$$

S ní asociovaný metrický element samozřejmě je

$$\mathfrak{g}^{1/2} = d^d x\ .$$

Pokud zapíšeme euklidovskou metriku v polárních ($d=2$), případně sférických ($d=3$) souřadnicích

$$\begin{aligned} {}^2\boldsymbol{g} &= \mathbf{d}\rho\,\mathbf{d}\rho + \rho^2\,\mathbf{d}\varphi\,\mathbf{d}\varphi\ ,\\ {}^3\boldsymbol{g} &= \mathbf{d}r\,\mathbf{d}r + r^2\big(\mathbf{d}\vartheta\,\mathbf{d}\vartheta + \sin^2\vartheta\ \mathbf{d}\varphi\,\mathbf{d}\varphi\big) \end{aligned}$$

odpovídající objemové elementy budou

$$\begin{aligned} dS &= \rho\ d\rho d\varphi\ ,\\ dV &= r^2 \sin\vartheta\ dr d\vartheta d\varphi\ . \end{aligned}$$

V kapitole 6 uvidíme, že standardní metriky na 2-sféře a 3-sféře jsou

$$\begin{aligned} {}^2\boldsymbol{g} &= \mathbf{d}\vartheta\,\mathbf{d}\vartheta + \sin^2\vartheta\ \mathbf{d}\varphi\,\mathbf{d}\varphi\ ,\\ {}^3\boldsymbol{g} &= \mathbf{d}\chi\,\mathbf{d}\chi + \sin^2\chi\big(\mathbf{d}\vartheta\,\mathbf{d}\vartheta + \sin^2\vartheta\ \mathbf{d}\varphi\,\mathbf{d}\varphi\big)\ . \end{aligned}$$

Odpovídající objemové elementy jsou

$$\begin{aligned} dS &= \sin\vartheta\ d\vartheta d\varphi\ ,\\ dV &= \sin^2\chi\ \sin\vartheta\ d\chi d\vartheta d\varphi\ . \end{aligned}$$

Více příkladů viz kapitolu 6.

Cvičení C5.2

Nalezněte souřadniceový objemový element na Lobačevského rovině dané metrikou

$$\boldsymbol{g} = \mathbf{d}\chi\,\mathbf{d}\chi + \sinh^2\chi\;\mathbf{d}\varphi\,\mathbf{d}\varphi\;.$$

Nalezněte euklidovský plošný element dS v parabolických souřadnicích u, v daných vztahy

$$x = uv\;,\quad y = \tfrac{1}{2}(u^2 - v^2)\;. \qquad \checkmark$$

5.6 Vztah hustot k antisymetrickým d-formám

Integrovatelné hustoty mají velmi blízko k antisymetrickým formám maximálního stupně $d = \dim M$, tj. k totálně antisymetrickým tenzorům typu $(0, d)$. Jak jsme se zmínili v kapitole 4, prostor d-forem $\boldsymbol{\Lambda}^d_x M$ je jednodimenzionální, stejně jako prostor hustot $\boldsymbol{H}_x M$. Navíc, souřadnice d-formy se transformuje podobně jako souřadnice hustoty. Pro hustotu $\mathfrak{a}$ je tato transformace dána definicí D5.2

$$\mathfrak{a}[\boldsymbol{e}'_{j'}] = \left|\det A^i_{j'}\right|\,\mathfrak{a}[\boldsymbol{e}_i]\;, \tag{5.12}$$

pro d-formu $\boldsymbol{\alpha}$ jsme odvodili v marginálii M4.3 vztah

$$\alpha'_{1'\ldots d'} = (\det A^i_{j'})\;\alpha_{1\ldots d}\;. \tag{5.13}$$

Oba vztahy se liší pouze absolutní hodnotou. d-forma tedy nese podobnou informaci jako hustota – ke každé bázi přiřadí číslo určující objem měřený v počtu 'krychliček' napnutých na bázi. Oproti hustotám však ještě nese informaci o orientaci báze – při změně orientace změní souřadnice formy znaménko.

Díky této podobnosti můžeme svázat oba prostory několika vztahy. Za prvé, můžeme zavést operaci smazávající informaci o orientaci. Definujeme absolutní hodnotu d-formy, jejíž výsledek bude integrovatelná hustota

Definice D5.13 (Absolutní hodnota d-formy)

Nechť $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\Lambda}^d_x M$, $d = \dim M$. Absolutní hodnotu d-forem

$$|\;\;|\,:\;\boldsymbol{\Lambda}^d_x M \to \boldsymbol{H}_x M\;,\quad \boldsymbol{\alpha} \to |\boldsymbol{\alpha}|\;,$$

definujeme souřadnicovým vztahem

$$|\boldsymbol{\alpha}|\,[\boldsymbol{e}_j] = |\alpha_{1\ldots d}|\;,$$

kde $\alpha_{1\ldots d}$ je komponenta formy vzhledem k bázi $\boldsymbol{e}_j$. Díky (5.12) a (5.13) nezávisí definice na volbě báze. ∘

Absolutní hodnota není prosté zobrazení – přiřazuje formám $\boldsymbol{\alpha}$ a $-\boldsymbol{\alpha}$ stejný výsledek. Hustota získaná absolutní hodnotou d-formy je vždy kladná. Pro souřadnicové hustoty můžeme psát

$$d^d x = \left|\,\mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^d\right|\;. \tag{5.14}$$

Každé dva jednodimenzionální vektorové prostory si jsou isomorfní, neexistuje však obecně kanonický isomorfismus. V případě hustot a d-forem však máme pro kanonický isomorfismus k dispozici dva kandidáty. Jedná se o isomorfismy, které ztotožní 'kladnou' d-formu s její absolutní hodnotou. Nejednoznačnost spočívá v tom, že na rozdíl od hustot u d-forem nelze přirozeným způsobem rozhodnout, které jsou kladné a které záporné. Prostor $\mathbf{\Lambda}^d_x M$ se rozpadá do dvou tříd, reprezentanti každé z nichž se navzájem liší o násobek *kladným* číslem. Ani jedna z těchto tříd však není preferovaná; nelze určit, která z nich reprezentuje ‘kladné’ a která ‘záporné’ d-formy. Proto máme k dispozici dva kanonické isomorfismy mezi $\mathbf{\Lambda}^d_x M$ a $\boldsymbol{H}_x M$. Výběr jednoho z nich znamená konvenční volbu kladných d-forem.

Taková volba souvisí s pojmem *orientace*. Báze vektorů v tečném prostoru můžeme též rozdělit na dvě třídy lišící se vzájemnou orientací.

Definice D5.14 (Orientace báze)

Řekneme, že dvě báze $\boldsymbol{e}_j$ a $\boldsymbol{e}'_{j'}$ v $\boldsymbol{T}_x M$ mají stejnou orientaci, pokud determinant matice přechodu je kladný. Tato ekvivalence rozdělí všechny báze na dvě třídy. Jednu z nich nazýváme *pozitivně orientované báze*, druhou *negativně orientované*. Volba, která je která, se nazývá *orientace tečného prostoru*. ◦

Poznámka

Používá se též označení *báze s kladnou (zápornou) orientací*, případně *pravotočivé* a *levotočivé* báze. Pravotočivé báze jsou ty, které můžeme přirozeně utvořit z prstů pravé ruky, levotočivé z prstů levé ruky. To se samozřejmě zakládá na předpokladu, že máme dost prstů pro d dimenzí, a že je nemůžeme volně ohýbat na obě strany. Volba pravé a levé strany je navíc z hlediska geometrie také konvenční.

Orientaci lze zvolit v každém bodě variety. Není však samozřejmé, že lze zvolit orientaci na celé varietě hladkým způsobem – tj. takovým způsobem, že pokud hladce přenášíme bázi z místa na místo, zůstává tato báze stále stejně orientovaná.

M5.3 Hladký přenos báze
Hladký přenos báze podél křivky znamená volbu hladkých vektorových polí podél křivky tak, že v každém bodě tvoří tyto vektory *nedegenerovanou* bázi.

Definice D5.15 (Orientovatelnost)

Varietu nazveme *orientovatelnou*, pokud na ní lze zvolit globálně hladkým způsobem orientaci. V opačném případě nazýváme varietu *neorientovatelnou*. ◦

Příklad P5.4 (Möbiův pásek)

Standardním příkladem neorientovatelné variety je Möbiův pásek. Ten získáme tak, že slepíme hranice pásu $\mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi \rangle$ ‘přetočeným způsobem’. Označíme-li souřadnice na pásu x, φ, ‘přetočené slepení’ znamená identifikaci bodů $[x, -\pi]$ a $[-x, \pi]$. Tato varieta je neorientovatelná, protože pokud hladce přeneseme bázi kolem dokola (ve φ směru), dostaneme bázi opačně orientovanou.

Möbiův pásek můžeme stejně jako válcovou plochu z příkladu P5.2 pokrýt dvěma systémy souřadnic. Jedním budou již zmíněné souřadnice x, φ definované na oblasti U a druhý – souřadnice y, ψ na oblasti V – zvolíme posunutý o π ve φ směru. Přetočené slepení se projeví znaménkem minus mezi y a x v následujících transformačních vztazích

$$
\begin{aligned}
y &= x \,, \quad & \psi &= \varphi - \pi \quad \text{pro} \quad \varphi > 0 \,, \\
y &= -x \,, \quad & \psi &= \varphi + \pi \quad \text{pro} \quad \varphi < 0 \,.
\end{aligned}
$$

Volba orientace tečného prostoru nám umožní definovat ‘kladné’ d-formy.

Definice D5.16 (Orientace d-forem)

Mějme tečný prostor $\boldsymbol{T}_x M$ se zvolenou orientací. Antisymetrickou d-formu $\boldsymbol{\alpha}$ nazveme *pozitivně orientovanou*, pokud její souřadnice $\alpha_{12\ldots d}$ vzhledem k pozitivně orientované bázi je kladná. Obdobně definujeme *negativně orientované* d-formy. ◦

Lemma V5.5

Na neorientovatelné varietě neexistuje globální pole antisymetrických d-forem, které by bylo všude nenulové. □

DŮKAZ:
Kdyby taková forma existovala, umožňovala by definovat orientaci variety. ■

Nyní se můžeme vrátit k isomorfismu prostorů d-forem a hustot.

Definice D5.17 (Isomorfismy $\iota_\pm$)

Mějme zvolenou v bodě x orientaci. Pak definujeme dva isomorfismy ι_+ a ι_- zobrazující $\mathbf{\Lambda}^d_x M$ na $\boldsymbol{H}_x M$

$$\iota_\pm \boldsymbol{\alpha} = \begin{cases} \pm|\boldsymbol{\alpha}| & \text{pro pozitivně orientovanou formu } \boldsymbol{\alpha}\,, \\ \mp|\boldsymbol{\alpha}| & \text{pro negativně orientovanou formu } \boldsymbol{\alpha}\,. \end{cases}$$ ∘

Pokud je varieta orientovatelné, lze tyto isomorfismy zvolit globálně. Zřejmě platí

$$|\boldsymbol{\alpha}| = |\iota_+\boldsymbol{\alpha}| = |\iota_-\boldsymbol{\alpha}|\ ,\quad \iota_-\boldsymbol{\alpha} = -\iota_+\boldsymbol{\alpha}\ , \tag{5.15}$$

$$(\iota_\pm\boldsymbol{\alpha})[\boldsymbol{e}_j] = \pm\alpha_{1\ldots d} \quad \text{pro pozitivně orientovanou bázi } \boldsymbol{e}_j\ . \tag{5.16}$$

CVIČENÍ C5.3
Přesvědčte se o tom! ✓

Na orientovatelných varietách lze tedy integrovatelné hustoty globálně reprezentovat pomocí antisymetrických d-forem. Obvykle k tomu volíme isomorfismus ι_+ převádějící pozitivně orientované d-formy na kladné hustoty. Na neorientovatelných varietách toto ztotožnění nelze provést globálně. Můžeme však alespoň z variety vybrat oblast, která již orientovatelná je, a na níž již toto ztotožnění provést lze.

Isomorfismus ι_+ lze zapsat i tenzorově – zavedeme proto tenzor orientace (přesněji řečeno půjde o tenzorovou hustotu).

Definice D5.18 (Tenzor orientace)

Mějme v bodě x zvolenou orientaci. *Tenzor orientace* $\tilde{\varepsilon}_{\boldsymbol{i}_1\ldots\boldsymbol{i}_d}$ je definován:

$$\tilde{\varepsilon} = (\iota_+\boldsymbol{\alpha})^{-1}\boldsymbol{\alpha}$$

pro libovolnou d-formu $\boldsymbol{\alpha}$. Jedná se o tenzorovou hustotu typu $(0,d)$ váhy -1. ∘

Vzhledem k tomu, že ι_+ je isomorfismus, na volbě formy $\boldsymbol{\alpha}$ nezávisí. Tenzor orientace zprostředkovává inverzní zobrazení k isomorfismu ι_+

$$\boldsymbol{\alpha} = \tilde{\varepsilon}\ \iota_+\boldsymbol{\alpha}\ ,\quad \mathfrak{a} = \iota_+(\tilde{\varepsilon}\ \mathfrak{a})\ . \tag{5.17}$$

Můžeme též vytvořit i *inverzní tenzor orientace* $\tilde{\varepsilon}^{-1}$ (tenzorová hustota typu $(d,0)$ váhy 1), který lze s pomocí definice D5.18 rozepsat

$$\tilde{\varepsilon}^{-1} = (\iota_+\boldsymbol{\alpha})\,\boldsymbol{\alpha}^{-1}\ . \tag{5.18}$$

Inverzi d-formy $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$ jsme zavedli v kapitole 1, viz též marginálii M5.4. Inverzní tenzor orientace umožňuje zapsat akci ι_+ následovně

$$\iota_+\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{d!}\,\tilde{\varepsilon}^{-1\boldsymbol{i}_1\ldots\boldsymbol{i}_d}\ \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{i}_1\ldots\boldsymbol{i}_d} \tag{5.19}$$

Lemma V5.6 (Vlastnosti tenzoru orientace)

Tenzor orientace splňuje

$$\tilde{\varepsilon}_{\boldsymbol{i}_1\ldots\boldsymbol{i}_d}\ \tilde{\varepsilon}^{-1\boldsymbol{i}_1\ldots\boldsymbol{i}_d} = d!\ , \tag{i}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\boldsymbol{i}_1\ldots\boldsymbol{i}_d}\ \tilde{\varepsilon}^{-1\boldsymbol{j}_1\ldots\boldsymbol{j}_d} = d!\ {}^{[d]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{j}_1\ldots\boldsymbol{j}_d}_{\boldsymbol{i}_1\ldots\boldsymbol{i}_d}\ , \tag{ii}$$

$$\tilde{\varepsilon} = (d^dx)^{-1}\ \mathbf{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathbf{d}x^d\ , \tag{iii}$$

$$\tilde{\varepsilon}^{-1} = d!\ \mathcal{A}\Big(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^1}\cdots\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^d}\Big)\ d^dx\ , \tag{iv}$$

M5.4 Inverze d-forem

V definici D1.4 v kapitole 1 jsme zavedli operaci inverze převádějící antisymetrické tenzory typu $(0,d)$ na antisymetrické tenzory typu $(d,0)$ a naopak ($d = \dim M$). Připomeňme zde několik vlastností tohoto zobrazení.

$$^{-1}\ :\ \boldsymbol{T}_x{}^0_{[d]}M \leftrightarrow \boldsymbol{T}_x{}^{[d]}_0 M\ ,$$

tak, že pro $\boldsymbol{\omega}\in\boldsymbol{T}_x{}^0_{[d]}M$ platí

$$\boldsymbol{\omega}^{-1\boldsymbol{i}_1\ldots\boldsymbol{i}_d}\ \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{i}_1\ldots\boldsymbol{i}_d} = d!\ ,$$
$$\boldsymbol{\omega}^{-1\boldsymbol{i}_1\ldots\boldsymbol{i}_d}\ \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{j}_1\ldots\boldsymbol{j}_d} = d!\ {}^{[d]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{i}_1\ldots\boldsymbol{i}_d}_{\boldsymbol{j}_1\ldots\boldsymbol{j}_d}\ ,$$
$$(\boldsymbol{\omega}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{\omega}\ ,$$
$$\omega^{-11\ldots d} = (\omega_{1\ldots d})^{-1}\ .$$

kde x^j je pozitivně orientovaný souřadnicový systém, tj. systém, pro který je souřadnicová báze $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial} x^j$ pozitivně orientovaná. □

Na závěr tohoto oddílu ještě definujeme *hustotní duál*.

Definice D5.19 (Hustotní duál)

Hustotní duál * je lineární isomorfismus mezi prostorem antisymetrických $(d–p)$-forem a prostorem antisymetrických tenzorových hustot typu $(p, 0)$ váhy 1 (viz následující definici):

$$
\begin{aligned}
{}^\star &: \boldsymbol{\Lambda}^{d-p}_x M \to \boldsymbol{\Lambda}^{\star p}_x M \;, \\
&\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_{p+1}\dots\boldsymbol{n}_d} \to ({}^\star\boldsymbol{\omega})^{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_p} = \tfrac{1}{(d-p)!}\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_d}\,\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{r}_{p+1}\dots\boldsymbol{r}_d} \;, \\
{}^\star &: \boldsymbol{\Lambda}^{\star p}_x M \to \boldsymbol{\Lambda}^{d-p}_x M \;, \\
&\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{n}_1\dots\boldsymbol{n}_p} \to ({}^\star\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{r}_{p+1}\dots\boldsymbol{r}_d} = \tfrac{1}{p!}\,\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_p}\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_d} \;.
\end{aligned}
$$
∘

Zde užíváme značení

Definice D5.20 (Antisymetrické tenzorové hustoty)

Prostor antisymetrických tenzorových hustot v bodě x s p kontravariantními indexy, spojený s prostorem antisymetrických forem hustotním duálem, označíme

$$\boldsymbol{\Lambda}^{\star p}_x M = \tilde{\boldsymbol{T}}^{[p]}_{x0} M$$
∘

Pro hustotní duál platí

Lemma V5.7

$$
\begin{aligned}
&{}^{\star\star}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} && \text{pro } \boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Lambda}^p_x M \;, && \text{(i)}\\
&{}^\star\boldsymbol{\alpha} = \iota_+\boldsymbol{\alpha} && \text{pro } \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\Lambda}^d_x M \;, && \text{(ii)}\\
&{}^\star\mathfrak{a} = \iota_+^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} && \text{pro } \mathfrak{a} \in \boldsymbol{H}_x M \;, && \text{(iii)}\\
&{}^\star f = f\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1} && \text{pro } f \in \boldsymbol{\Lambda}^0_x M = \mathbb{R} \;, && \text{(iv)}\\
&{}^\star(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\omega}\bullet{}^\star\boldsymbol{\sigma} && \text{pro } \boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Lambda}^p_x M \;,\quad \boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Lambda}^{d-q}_x M \;, && \text{(v)}\\
&{}^\star(\boldsymbol{\omega}\bullet\mathfrak{a}) = \boldsymbol{\omega}\wedge{}^\star\mathfrak{a} && \text{pro } \boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Lambda}^p_x M \;,\quad \mathfrak{a} \in \boldsymbol{\Lambda}^{\star q}_x M \;, && \text{(vi)}
\end{aligned}
$$

kde $p \leq q$ a operace $\boldsymbol{\omega}\bullet\mathfrak{a}$ značí zúžení všech indexů antisymetrické p-formy s posledními p indexy tenzorové hustoty o q indexech dělené $p!$:

$$(\boldsymbol{\omega}\bullet\mathfrak{a})^{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_{q-p}} = \frac{1}{p!}\,\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{r}_{q-p+1}\dots\boldsymbol{r}_q}\mathfrak{a}^{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_q} \;.$$
□

Důkaz:

Vztahy (ii) a (iii) plynou přímo z rovnic (5.19) a (5.17), vztah (iv) je speciální případ definice D5.19 pro $p = d$. Vztah (i) dostaneme užitím lemma V5.6(ii) a identity (viz (iv) v lemmatu V1.2)

$$\tbinom{d}{p}\;{}^{[d]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_{d-p}}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_p\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_{d-p}} = {}^{[p]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_p} \;.$$

Rovnost (v) dostaneme rozpisem duálu formy podle definice D5.19, přepisem vnějšího násobení pomocí antisymetrizace tenzorového součinu a opětovným použitím definice duálu. Vztah (vi) je duální forma rovnosti (v). ■

Hustotní duál zprostředkovává dualitu mezi dvěma typy objektů, které můžeme integrovat na podvarietách – mezi tenzorovými hustotami a antisymetrickými formami. Jak uvidíme ve větě V5.9(i) níže, převádí integrování pomocí tzv. tečného objemového elementu na integrování pomocí normálového objemového elemntu. Hustotní duál může také v mnoha případech nahradit obvyklejší Hodgeův duál (který zavedeme v příští kapitole v definici D6.14), jak tomu je např. v definici D10.2 divergence a rotace antisymetrických forem. Na rozdíl od Hodgeova duálu, k jehož definic potřebujeme metriku, hustotní duál nevyužívá žádnou dodatečnou geometrickou strukturu.

5.7 Integrování antisymetrických d-forem

Díky příbuznosti integrovatelných hustot a forem, můžeme na orientovatelných varietách definovat integrál antisymetrických d-forem.

Definice D5.21 (Integrování d-forem)

Nechť M je globálně orientovatelná varieta. Integraci pole $\boldsymbol{\omega}$ antisymetrických d-forem definujeme

$$\int\limits_\Omega \boldsymbol{\omega} = \int\limits_\Omega \iota_+ \boldsymbol{\omega} \ . \qquad \circ$$

Věta V5.8 (Integrování d-forem)

Integrace d-formy $\boldsymbol{\omega}$ lze rozepsat

$$\int\limits_\Omega \boldsymbol{\omega} = \sum_k \int\limits_{\Omega\cap U_k} \varphi_k \, \boldsymbol{\omega} \ ,$$

kde $\{\varphi_k\}$ je rozklad jednotky pro pokrytí variety systémy souřadnic definovanými na oblastech U_k.

Na oblasti Ω pokryté jedním systémem souřadnic x^j pak dostáváme

$$\int\limits_\Omega \boldsymbol{\omega} = \int\limits_\Omega \omega_{1\dots d} \, d^d x = \int\limits_{x^i(\Omega)} \omega_{1\dots d}(x^1,\dots,x^d) \, dx^1 \dots dx^d \ .$$

Systém souřadnic x^j musí být přitom zvolen pozitivně orientovaný. (Toho lze vždy dosáhnout vhodným přeuspořádáním souřadnic.) □

Důkaz:

Rozepsání integrálu pomocí rozkladu jednotky plyne z linearity isomorfismu ι_+. Pro pozitivně orientovaný souřadný systém pak můžeme použít (5.16). Poslední rovnost je již jen explicitní přepsání definice D5.1. ■

Na neorientovatelných varietách nelze integrace d-forem zavést. V definici D5.21 se využívá orientovatelnosti ke ztotožnění d-forem a hustot pomocí isomorfismu ι_+. V konkrétním rozepsání integrálu se volba orientace projeví v tom, že potřebujeme mít varietu pokrytou pozitivně orientovanými systémy souřadnic. Pokud bychom zvolili orientaci pro každý systém souřadnic zvlášť, nekorelovaně s ostatními, nelze zaručit nezávislost výsledku integrálu na výběru souřadných systémů a na volbě rozkladu jednotky – viz příklad P5.5.

Integrace hustot však na orientovatelnosti variety nezáleží. Zhruba řečeno, hustoty slouží k měření 'velikosti' objemu, d-formy měří 'orientovaný objem'. Na orientovatelných varietách lze jednoduše ztotožnit positivně orientovaný objem s jeho velikostí. Na neorientovatelných varietách nemá orientovaný objem globálně smysl.

Příklad P5.5 (Integrace přes Möbiův pásek)

Potíže s integrací d-forem na neorientovatelné varietě si můžeme dokumentovat na Möbiově pásku popsaném v příkladu P5.4.

Jelikož se jedná o neorientovatelnou varietu, neexistuje zde všude nenulová 2-forma, která by mohla měřit 'skutečnou plochu'. Můžeme však zadat 2-formu, která v některých bodech vymizí. Vezměme si jako příklad 2-formu

$$\boldsymbol{\omega} = \exp(-x^2)\sin^2\varphi\ \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}\varphi\ .$$

Využitím transformačních vztahů z příkladu P5.4 můžeme přepsat tuto formu i v souřadnicích y, ψ

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{cases} +\exp(-y^2)\sin^2\psi\ \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}\psi & \text{pro } \psi < 0\ , \\ -\exp(-y^2)\sin^2\psi\ \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}\psi & \text{pro } \psi > 0\ . \end{cases}$$

Forma $\boldsymbol{\omega}$ vymizí na přímkách $\varphi = 0$ a $\psi = 0$. Zdálo by se tedy, že místo integrace přes celý pásek se stačí omezit pouze na oblast U nebo pouze na oblast V. Zanedbáme tak pouze množinu míry nula (vůči jakékoli hladké hustotě), navíc forma $\boldsymbol{\omega}$ je na zanedbávané množině nulová. Obě tyto oblasti již jsou orientovatelné. Nabízí se zvolit orientaci tak, aby systém x, φ měl pozitivní orientaci na U a systém y, ψ pozitivní orientaci na V. To znamená, že forma $\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}\varphi$ je pozitivně orientovaná ve smyslu orientace na U a forma $\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}\psi$ je pozitivně orientovaná ve smyslu orientace na V. Vyčíslíme nyní integrál formy $\boldsymbol{\omega}$ jak přes U, tak přes V:

$$\begin{aligned}
\int_U \boldsymbol{\omega} &= \int_U \exp(-x^2)\sin^2\varphi\ \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}\varphi \\
&= \int_U \exp(-x^2)\sin^2\varphi\ dxd\varphi = \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\,dx \int_{(-\pi,\pi)} \sin^2\varphi\ d\varphi \\
&= \pi^{3/2}\ , \\
\int_V \boldsymbol{\omega} &= -\int_V \operatorname{sign}\psi\ \exp(-y^2)\sin^2\psi\ \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}\psi \\
&= -\int_V \operatorname{sign}\psi\ \exp(-y^2)\sin^2\psi\ dyd\psi \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \exp(-y^2)\ dy \int_{(-\pi,\pi)} \operatorname{sign}\psi\ \sin^2\psi\ d\psi \\
&= 0\ .
\end{aligned}$$

Vidíme, že odlišná volba souřadného systému (a s ním spojené orientace) vede k nejednoznačnosti integrálu. Integrál $\boldsymbol{\omega}$ tak nemá smysl globálně.

Můžeme samozřejmě zintegrovat absolutní hodnotu formy $\boldsymbol{\omega}$. Ta má tvar

$$|\boldsymbol{\omega}| = \exp(-x^2)\sin^2\varphi\ dxd\varphi = \exp(-y^2)\sin^2\psi\ dyd\psi$$

a její integrál je

$$\int |\boldsymbol{\omega}| = \int_U |\boldsymbol{\omega}| = \int_V |\boldsymbol{\omega}| = \pi^{3/2}\ .$$

Na Möbiově pásku lze zvolit plochou metriku, ve které jsou oba diskutované souřadnicové systémy lokálně kartézské,

$$\boldsymbol{g} = \mathbf{d}x\,\mathbf{d}x + \mathbf{d}\varphi\,\mathbf{d}\varphi = \mathbf{d}y\,\mathbf{d}y + \mathbf{d}\psi\,\mathbf{d}\psi\ .$$

S touto metrikou je spojen přirozený objemový element $\mathfrak{g}^{1/2}$

$$\mathfrak{g}^{1/2} = |\operatorname{Det}\boldsymbol{g}|^{1/2} = dxd\varphi = dyd\psi\ .$$

5.8 Integrování na podvarietách

Nyní budeme zkoumat integrování přes podvarietu N (dimenze $d-n$) variety M (dimenze d). Nejprve nás bude zajímat vztah tenzorových hustot definovaných na podvarietě N a varietě M. Při přechodu mezi objekty definovanými na varietě M k objektům na podvarietě N se typicky využívá informace týkající se pouze směrů tečných nebo pouze normálových k N. Potřebujeme proto uchopit informaci o tečných či normálových směrech.

Jeden ze způsobů, jak to provést, je zavést integrovatelnou hustotu na N, která navíc nese informaci o tečných směrech k N – zavést tzv. *tečný objemový element* $\boldsymbol{d\Sigma}_N$. Bude se jednat o zobecnění délkového elementu $\boldsymbol{d\ell}$ užívaného při integraci přes křivku. Ten je dán součinem integrovatelné hustoty ds (s je parametr křivky) a tečného vektoru $\boldsymbol{t}$.

Alternativně, můžeme zadat místo informace o tečných směrech informaci o směrech doplňkových, tj. o směrech normálových. To lze provést pomocí *normálového objemového elementu* $\tilde{\boldsymbol{dS}}_N$, který je s tečným objemovým elementem spojen pomocí hustotního duálu. Tento element umožní transformovat jisté tenzorové hustoty na M na integrovatelné hustoty na N. Jedná se zobecnění normálového plošného elementu $\boldsymbol{dS} = \boldsymbol{n}dS$ sloužícímu k integraci normálových složek vektorových polí přes plochy vnořené do třídimenzionálního prostoru.

Naším cílem bude nejprve přiřadit antisymetrické formě stupně $d-n$ definované na M integrovatelnou hustotu na N. Přirozený postup je provést nejdříve restrikci formy 'žijící' na M na formu 'žijící' na N a po té ji převést na hustotu pomocí isomorfismu ι_+.

Pro antisymetrickou formu $\boldsymbol{\omega}$ stupně $d-n$ můžeme v přizpůsobených souřadnicích x^i psát

$$\boldsymbol{\omega}|_N = \omega_{n+1\dots d}\ \mathbf{d}x^{n+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^d\ , \tag{5.20}$$

kde 1-formy $\mathbf{d}x^u$ jsou chápány jako gradienty souřadnic na N, tj. jako prvky $\boldsymbol{T}^*_x N$. Vskutku, rozepíšeme-li jednotkový tenzor na prostoru antisymetrických forem $\boldsymbol{\Lambda}^p_x M$ řádu $p = d-n$ v přizpůsobených souřadnicích

$${}^{[p]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_p} = \sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le d} \frac{\boldsymbol{\partial}^{[\boldsymbol{a}_1}}{\boldsymbol{\partial}x^{i_1}} \cdots \frac{\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{a}_p]}}{\boldsymbol{\partial}x^{i_p}}\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{b}_1}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathbf{d}_{\boldsymbol{b}_p}x^{i_p}\ , \tag{5.21}$$

a provedeme-li restrikci na podvarietu v části obsahující kovektory, dostaneme smíšený tenzorový objekt z prostoru $\boldsymbol{T}_{x\,0}^{[p]}M \otimes \boldsymbol{T}_{x\,[p]}^{\,0}N$ provádějící restrikci $\boldsymbol{\omega}$ na $\boldsymbol{\omega}|_N$ zúžením přes všechny indexy odpovídající varietě M:

$$\boldsymbol{\omega}|_{N\,\boldsymbol{u}_1\dots\boldsymbol{u}_p} = \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}\,{}^{[p]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d}_{\boldsymbol{u}_1\dots\boldsymbol{u}_p}\ . \tag{5.22}$$

Ale při restrikci souřadnicových 1-forem $\mathbf{d}x^i$ všechny formy s indexem $i = 1,\dots,n$ vymizí, čili v sumě na pravé straně (5.21) zbyde po restrikci na N pouze člen

$$\frac{\boldsymbol{\partial}^{[\boldsymbol{a}_{n+1}}}{\boldsymbol{\partial}x^{n+1}} \cdots \frac{\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{a}_d]}}{\boldsymbol{\partial}x^d}\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{u}_{n+1}}x^{n+1}\wedge\cdots\wedge\mathbf{d}_{\boldsymbol{u}_d}x^d\ . \tag{5.23}$$

Zúžením tohoto tenzoru s $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_{n+1}\dots\boldsymbol{a}_d}$ dostaneme výraz (5.20). Nyní zbývá aplikovat isomorfismus ι_+, který provede záměnu $\mathbf{d}x^{n+1}\wedge\cdots\wedge\mathbf{d}x^d$ na hustotu $d^{d-n}x$ na N.

M5.5 Podvariety – opakování
V podkapitole 3.4 jsme definovali pojem podvariety N dimenze $d-n$ (tj. kodimenze n) vnořené do variety M dimenze d. Připomeňme (viz definici D3.15), že v souřadnicích x^i *přizpůsobených podvarietě* N je tato podvarieta dána podmínkami

$$x^i|_N = 0 \qquad \text{pro} \quad i = 1,\dots,n\ ,$$

a zbývající souřadnicové funkce x^u, $u = n+1,\dots,d$ tvoří souřadný systém na N. Pro souřadnicové a tenzorové indexy na podvarietě N budeme používat písmenka z konce abecedy.
Zopakujme též, že máme přirozené vnoření prostoru tečných vektorů $\boldsymbol{T}_xN$ do tečného prostoru $\boldsymbol{T}_xM$ a obdobně pro tenzory s indexy pouze v horní poloze. Pro kovektory (a obecně tenzory s indexy pouze v dolní pozici) máme pouze pojem restrikce z $\boldsymbol{T}^*_xM$ do $\boldsymbol{T}^*_xN$ – viz definici D3.16.

Celou tuto proceduru můžeme spojit zavedením tečného objemového elementu:

Definice D5.22 (Tečný objemový element podvariety)

Mějme orientovatelnou podvarietu N dimenze $d-n$ vnořenou do orientovatelné variety M dimenze d a přizpůsobené souřadnice x^i, které jsou ve smyslu obou variet positivně orientované. Pak definujeme *tečný objemový element podvariety* N

$$\boldsymbol{d\Sigma}_N \in \boldsymbol{T}_x^{d-n} M \otimes \boldsymbol{H}_x N$$

následovně

$$\boldsymbol{d\Sigma}_N = d^{d-n}x \;\mathcal{A}\Big(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^{n+1}} \cdots \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^d}\Big) \,.$$

Tato smíšená tenzorová hustota je nezávislá na volbě přizpůsobených souřadnic x^i a zprostředkovává zobrazení z prostoru antisymetrických $d-n$ forem na M do hustot na N:

$$\begin{aligned} |_N \;:\; & \boldsymbol{\Lambda}_x^{d-n} M \to \boldsymbol{H}_x M \,, \\ & \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_{n+1}\ldots\boldsymbol{a}_d} \to \boldsymbol{\omega}|_N = \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_{n+1}\ldots\boldsymbol{a}_d}\, \boldsymbol{d\Sigma}_N^{\boldsymbol{a}_{n+1}\ldots\boldsymbol{a}_d} \,. \end{aligned}$$ ◦

Poznámka

Označení $\boldsymbol{\omega}|_N$ je stejné jako označení pro restrikci formy na podvarietu N. Jelikož se jedná o velmi blízké operace, nebudeme je explicitně rozlišovat – rozdíl je dán implicitně povahou výsledku (tj. zda $\boldsymbol{\omega}|_N$ je forma či hustota).

Poznámka

Srovnáním se vztahem (iv) lemmatu V5.6 vidíme, že tečný objemový element $\boldsymbol{d\Sigma}_N$ je shodný s inverzním tenzorem orientace na N (přeškálovaným faktorem $1/(d-n)!$), jehož tenzorová část (patřící do $\boldsymbol{T}_x{}^{[d-n]}_{\;0} N$) je vnořená do tečného prostoru $\boldsymbol{T}_x{}^{[d-n]}_{\;0} M$ a hustotní část (patřící do $\boldsymbol{H}_x N$) zůstává spojená s varietou N. To dokazuje nezávislost definice D5.22 na volbě souřadnic.

Souřadnicové vyjádření tečného objemového elementu s explicitně uvedenými tenzorovými indexy je:

$$\boldsymbol{d\Sigma}_N^{\boldsymbol{a}_{n+1}\ldots\boldsymbol{a}_d} = d^{d-n}x\, \frac{\boldsymbol{\partial}^{[\boldsymbol{a}_{n+1}}}{\boldsymbol{\partial} x^{n+1}} \cdots \frac{\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{a}_d]}}{\boldsymbol{\partial} x^d} \,. \tag{5.24}$$

Pro hustotu asociovanou s formou $\boldsymbol{\omega}$ tak vůči positivně orientované bázi přizpůsobené podvarietě N dostáváme

$$\boldsymbol{\omega}|_N = \omega_{n+1\ldots d}\, d^{d-n}x \,. \tag{5.25}$$

Vidíme, že tečný objemový element $\boldsymbol{d\Sigma}_N$ vybírá z antisymetrické $d-n$ formy definované na M část tečnou k N a z ní vytváří integrovatelnou hustotu na N.

Tečný objemový element je tak zobecněním lineárního tečného elementu na křivce $\boldsymbol{d\ell}^{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{a}} ds$. Zde $\boldsymbol{t}$ je tečný vektor ke křivce parametrizované parametrem s. Ke každé 1-formě $\boldsymbol{\omega}$ nám $\boldsymbol{d\ell}$ přiřazuje hustotu na křivce $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{d\ell}^{\boldsymbol{a}} = \omega_s ds$, která je nezávislá na parametrizaci s a závisí pouze na tečné komponentě ω_s formy $\boldsymbol{\omega}$.

Nyní již můžeme definovat integraci antisymetrických forem přes podvarietu:

Definice D5.23 (Integrování forem přes podvarietu)

Mějme orientovatelnou podvarietu N dimenze $d-n$ orientovatelné variety M dimenze d. Integrál formy $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}^{d-n} M$ definované na varietě M přes oblast Ω v podvarietě N je definován

$$\int_\Omega \boldsymbol{\omega} = \int_\Omega \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_{n+1}\ldots\boldsymbol{a}_d}\, \boldsymbol{d\Sigma}_N^{\boldsymbol{a}_{n+1}\ldots\boldsymbol{a}_d} \,,$$

tj. jako integrál z hustoty $\boldsymbol{\omega}|_N \in \tilde{\mathfrak{F}}N$. ◦

V positivně orientovaných souřadnicích x^i přizpůsobených podvarietě N dostáváme

$$\int_\Omega \boldsymbol{\omega} = \int_\Omega \omega_{n+1\dots d}\, d^{d-n}x\ . \tag{5.26}$$

Příklad P5.6 (Integrace přes podvarietu I)

Mějme dvoudimenzionální sféru S vnořenou do třídimenziálního euklidovského prostoru E. Jako přizpůsobené souřadnice můžeme zvolit sférické souřadnice r, ϑ, φ. Sféra o poloměru R je dána podmínkou $r = R$. (Zde jsme částečně uvolnili podmínky definující souřadnice přizpůsobené podvarietě – namísto podmínky $r|_S = R$ bychom měli psát $x^1|_S = 0$, kde $x^1 \equiv (r - R)$. To ale nijak neovlivní další diskuzi.) Pomocí přizpůsobených souřadnic můžeme zapsat tečný objemový element

$$\boldsymbol{d\Sigma}_S^{\boldsymbol{ab}} = \frac{\boldsymbol{\partial}^{[\boldsymbol{a}}}{\boldsymbol{\partial}\vartheta}\frac{\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{b}]}}{\boldsymbol{\partial}\varphi}\, d\vartheta d\varphi = \frac{1}{R}\frac{\boldsymbol{\partial}^{[\boldsymbol{a}}}{\boldsymbol{\partial}\vartheta}\ \frac{1}{R\sin\vartheta}\frac{\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{b}]}}{\boldsymbol{\partial}\varphi}\, dS\ ,$$

kde dS označuje plošný element asociovaný s indukovanou metrikou $\boldsymbol{q}$ na sféře (viz definici D5.11)

$$dS = |\mathrm{Det}\, \boldsymbol{q}|^{\frac{1}{2}} = R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta d\varphi\ .$$

Poznamenejme, že kombinace $\frac{1}{R}\frac{\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{a}}}{\boldsymbol{\partial}\vartheta}$ a $\frac{1}{R\sin\vartheta}\frac{\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{b}}}{\boldsymbol{\partial}\varphi}$ jsou jednotkové vektory měřeno metrikou $\boldsymbol{q}$.

Jako příklad nyní integrujme 2-formu $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$, kde x, y, z jsou kartézské souřadnice, přes oblast Ω danou podmínkou $\vartheta < \pi/2$. Ze vztahů mezi sférickými a kartézskými souřadnicemi dostaneme

$$\boldsymbol{\omega} = r\sin^2\vartheta\ \mathbf{d}r \wedge \mathbf{d}\varphi + r^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\ \mathbf{d}\vartheta \wedge \mathbf{d}\varphi\ .$$

Zúžením s tečným objemovým elementem na sféře S dostaneme

$$\boldsymbol{\omega}|_S = \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{ab}}\ \boldsymbol{d\Sigma}_S^{\boldsymbol{ab}} = R^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\ d\vartheta d\varphi\ .$$

Alternativně bychom mohli nejdříve provést restrikci formy $\boldsymbol{\omega}$ na S vedoucí k $R^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\ \mathbf{d}\vartheta \wedge \mathbf{d}\varphi$ a tu pak převést na integrovatelnou hustotu s využitím vztahu $\iota_+\, \mathbf{d}\vartheta \wedge \mathbf{d}\varphi = d\vartheta d\varphi$.

Integrace nakonec dává

$$\int_\Omega \boldsymbol{\omega} = \int_{\substack{\vartheta\in(0,\pi/2)\\ \varphi\in(-\pi,\pi)}} R^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\ d\vartheta d\varphi = \pi R^2$$

Nyní přistoupíme k zavedení duálního normálového objemového elementu:

Definice D5.24 (Normálový objemový element podvariety)

Mějme orientovatelnou podvarietu N dimenze $d-n$ vnořenou do orientovatelné variety M dimenze d a přizpůsobené souřadnice x^i, které jsou ve smyslu obou variet positivně orientované. Pak definujeme *normálový objemový element podvariety* N

$$\tilde{\boldsymbol{dS}}_N \in \boldsymbol{T}_x{}^0_{[n]}M \otimes \boldsymbol{H}_x^{-1}M \otimes \boldsymbol{H}_x N$$

následovně

$$\tilde{\boldsymbol{dS}}_{N\,\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_n} = \frac{1}{n!}\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d}\ \boldsymbol{d\Sigma}_N^{\boldsymbol{a}_{n+1}\dots\boldsymbol{a}_d}\ .$$

Tato smíšená tenzorová hustota zprostředkovává zobrazení z prostoru antisymetrických tenzorových hustot stupně n na M do integrovatelných hustot na N:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Lambda}^{\star n}_x M \rightarrow \boldsymbol{H}_x M\;,\\ &\qquad \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_n} \rightarrow \mathfrak{a} = \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_n}\, \tilde{\boldsymbol{dS}}_{N\,\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_n}\;.\end{aligned}$$

$\circ$

V souřadnicích x^i přizpůsobených podvarietě N můžeme psát

$$\tilde{\boldsymbol{dS}}_N = \frac{1}{n!}\,\big(d^d x\big)^{-1}\, d^{d-n}x\;\mathbf{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathbf{d}x^n\;. \tag{5.27}$$

Pokud označíme $\alpha^{r_1\dots r_n}$ komponentu tenzorové hustoty $\boldsymbol{\alpha}$ vůči souřadnicím x^i,

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha^{r_1\dots r_n}\,\mathcal{A}\Big(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^r_1}\cdots\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^r_n}\Big)\, d^d x\;, \tag{5.28}$$

pro indukovanou hustotu $\mathfrak{a}$ na N dostaneme

$$\mathfrak{a} = \alpha^{1\dots n}\, d^{d-n}x\;. \tag{5.29}$$

Normálový objemový element tak vybírá z tenzorové hustoty směry normálové k podvarietě a mění charakter hustoty na varietě M na hustotu na podvarietě N. Speciálně pro nadplochu Σ kodimenze $n=1$ $\tilde{\boldsymbol{dS}}_{\Sigma\,\boldsymbol{a}}$ odpovídá plošnému elementu jehož směr je kolmý k nadploše Σ.

Mezi tečným a normálovým objemovým elementem platí následující vztahy:

Lemma V5.9

$$\big({}^\star\boldsymbol{\omega}\big)^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_n}\,\tilde{\boldsymbol{dS}}_{N\,\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_n} = \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_{n+1}\dots\boldsymbol{a}_d}\,\boldsymbol{d\Sigma}_N^{\boldsymbol{a}_{n+1}\dots\boldsymbol{a}_d} \tag{i}$$

$$\boldsymbol{d\Sigma}_N^{\boldsymbol{a}_{n+1}\dots\boldsymbol{a}_n} = \frac{1}{(d-n)!}\,\tilde{\varepsilon}^{-1\,\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d}\,\tilde{\boldsymbol{dS}}_{N\,\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_n} \tag{ii}$$

$$\tilde{\boldsymbol{dS}}_{N\,\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_n} = \frac{1}{n!}\,\tilde{\varepsilon}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d}\,\boldsymbol{d\Sigma}_N^{\boldsymbol{a}_{n+1}\dots\boldsymbol{a}_d}\;. \tag{iii}$$

$\square$

Normálový objemový element umožňuje integrovat tok tenzorových hustot stupně n přes $d-n$-dimenzionální podvarietu

Definice D5.25 (Integrování tenzorových hustot přes podvarietu)
Mějme orientovatelnou podvarietu N dimenze $d-n$ orientovatelné variety M dimenze d. Integrál tenzorové hustoty $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{Sect}\,\boldsymbol{\Lambda}^{\star n}M$ definované na varietě M přes oblast Ω v podvarietě N je definován

$$\int\limits_\Omega \boldsymbol{\alpha} = \int\limits_\Omega \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_n}\,\tilde{\boldsymbol{dS}}_{N\,\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_n}\;.$$

$\circ$

Pro nadplochu Σ kodimenze $n=1$ tak můžeme definovat tok vektorové hustoty $\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{a}}$ skrze tuto nadplochu jako integrál

$$\int\limits_\Sigma \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{a}}\,\tilde{\boldsymbol{dS}}_{\Sigma\,\boldsymbol{a}}\;. \tag{5.30}$$

Tento integrál je přímočaré zobecnění plošného integrálu s normálovým plošným elementem $\boldsymbol{dS} = \boldsymbol{n}dS$ užívaným pro dvoudimenzionální plochy vnořené do třídimenzionálního prostoru.

Příklad P5.7 (Integrace přes podvarietu II)
V kontextu příkladu P5.6 má normálový objemový element tvar:

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{dS}}_S &= (dr d\vartheta d\varphi)^{-1}\, d\vartheta d\varphi\ \mathbf{d}r\\ &= (dr d\vartheta d\varphi)^{-1}\, d\vartheta d\varphi \left(\frac{x}{r}\,\mathbf{d}x + \frac{y}{r}\,\mathbf{d}y + \frac{z}{r}\,\mathbf{d}z\right)\end{aligned}$$

Budeme integrovat vektorovou hustotu

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} z}\, dx dy dz = \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} z}\, r^2 \sin\vartheta\, dr d\vartheta d\varphi$$

přes oblast Ω danou podmínkou $\vartheta < \pi/2$. Zúžením s normálovým objemovým elementem na sféře S (a použitím $z/r = \cos\vartheta$) dostaneme

$$\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{a}}\ \tilde{\boldsymbol{dS}}_{S\,\boldsymbol{a}} = R^2 \sin\vartheta \cos\vartheta\ d\vartheta d\varphi\ .$$

Integrál této hustoty na S je již totožný s integrálem počítaným v příkladě P5.6.

To, že výsledek je totožný, není náhoda. Platí totiž

$$\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} z}\, dx dy dz = {}^{\star}\big(\,\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y\big)\ ,$$

čili s využitím (i) lemmatu V5.9 vidíme, že hustota indukovaná na S musí být v obou příkladech P5.6 a P5.7 stejná.

Kapitola 6

Metrika

Jedna z nejdůležitějších a nejbohatších geometrických struktur je *metrická struktura* – schopnost v prostoru proměřovat délky, plochy, objemy, případně úhly. Metrická struktura naplňuje v nejširší možné míře význam slova *geometrie*. Pomocí měření délek lze zachytit všechny lokální geometrické vlastnosti prostoročasu. Z tohoto důvodu hrají prostory s metrickou strukturou klíčovou roli jak v geometrii, tak i ve fyzice.

6.1 Metrika

Měření délky křivek, velikosti ploch a objemů, úhlů a dalších veličin lze převést na proměřování elementárních délek, které lze charakterizovat pomocí tzv. metrického tenzoru. Metrická struktura tak lze zachytit a popsat pomocí lokální tenzorové veličiny.

Definice D6.1 (Metrika)

Metrickým tenzorem či krátce *metrikou* v bodě $x \in M$ budeme rozumět symetrický nedegenerovaný tenzor typu $(0,2)$. Tj., $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{T}_x{}^0_2 M$ je metrika, pokud

$$\boldsymbol{g_{mn}} = \boldsymbol{g_{nm}}\,, \qquad \text{(symetrie)}$$
$$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{T}_x M,\ \boldsymbol{a} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{g_{mn}} \boldsymbol{a^n} \neq 0\,. \qquad \text{(nedegenerovanost)}$$

Metrikou na varietě M je míněno pole z $\mathfrak{T}^0_2 M$, které je v každém bodě metrikou.

Symetrický nedegenerovaný tenzor $\boldsymbol{g}^{-1}$ typu $(2,0)$ splňující

$$\boldsymbol{g}^{-1\,\boldsymbol{an}} \boldsymbol{g_{nb}} = \boldsymbol{\delta^a_b}$$

se nazývá *inverzní metrikou*. ∘

Poznámka

Pokud není splněna podmínka nedegenerovanosti, mluvíme někdy o *degenerované metrice*.

Geometrický význam metriky spočívá v tom, že definuje *skalární součin* dvou vektorů – viz definici D6.4 níže. Pomocí vektorů však můžeme charakterizovat elementární úsečky či oblouky: např. malý úsek parametrizované křivky $z(\tau)$ mezi hodnotami parametru τ_o a $\tau_o + d\tau$ je určen vektorem $\frac{\boldsymbol{D}z}{d\tau} d\tau$. Metrika nám umožní změřit délku těchto malých úseků a jejich integrací délku konečné křivky – viz definici D6.12 níže.

Poznamenejme však nejdříve, že v definici metriky nevyžadujeme podmínku *positivity*. Ve fyzice hrají podstanou roli i metriky, které nejsou positivně definitní a proto jsme je připustili v obecné definici. To však komplikuje geometrický význam metriky – obvyklý pojem vzdálenosti potřebuje positivitu skalárního součinu. Pro metriky, které nejsou positivně definitní jejich geometrická interpretace bude mírně odlišná.

Abych mohli zavést jemnější klasifikaci metrik, potřebujeme pojem *signatury* metriky. Tu zavedeme pomocí ortonormální báze.

Definice D6.2 (Ortonormální báze)

Mějme v bodě x metriku $\boldsymbol{g}$. *Ortonormální báze* či *ortonormální n-áda* vektorů $\{\boldsymbol{e}_j\}_{j=1,\dots,d}$ (kde $d = \dim M$) je báze vektorů splňující

$$\boldsymbol{e}_i^{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{e}_j^{\boldsymbol{l}}\,\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{kl}} = \begin{cases} \pm 1 & \text{pro} \quad i = j\ , \\ 0 & \text{pro} \quad i \neq j\ . \end{cases}$$

Duální bázi $\{\boldsymbol{e}^j\}$ nazýváme ortonormální bází v prostoru 1-forem. Vektory se záporným '*kvadrátem velikosti*' $\boldsymbol{e}_i^{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{e}_i^{\boldsymbol{l}}\,\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{kl}}$ obvykle řadíme před vektory s 'kvadrátem velikosti' kladným ◦

Poznámka

Slovo "n-áda" je trochu nešťasné 'zobecní' užívaných slov "*triáda*" a "*tetráda*" v případě tří a čtyř dimenzí. Alternativně se též užívají názvy "*reper*", "*frejm*" (anglicky "frame") či "*neholonomní báze*" (pokud se jedná o bázi, která není tečná k souřadnicovým čarám nějakých souřadnic). V tomto textu budeme používat buď "báze vektorů" nebo "n-áda" a to ať už bude název dimenze jakýkoli (tj. vyhneme se např. nečitelnému "d-áda").

Lemma V6.1 (Existence ortonormální báze)

Ke každé metrice existuje ortonormální báze.

Pro zadanou metriku je počet vektorů v ortonormální bázi se záporným 'kvadrátem velikosti' nezávislý na volbě ortonormální báze. □

Důkaz:

Důkaz přenecháme čtenáři k vyhledání v učebnicích z lineární algebry. Jedná se o aplikaci Gramovy-Schmidtovy ortonormalizační metody a o elementární vlastnost kvadratických forem. ■

Díky tomuto lemmatu můžeme definovat:

Definice D6.3 (Signatura metriky)

Počty n a p vektorů se záporným a kladným 'kvadrátem velikosti' v ortonormální bázi se nazývají *signatura metriky*. Signatura se obvykle zapisuje ve formě (n, p) či

$$(\underbrace{-\cdots-}_{n\text{-krát}}\underbrace{+\cdots+}_{p\text{-krát}})\ .$$

Pod $\operatorname{sign}\boldsymbol{g}$ budeme chápat součin znamének v signatuře. Tj. pro metriku signatury (n, p) máme

$$\operatorname{sign}\boldsymbol{g} = (-1)^n\ .$$

Metrika se signaturou $(+\cdots+)$ se nazývá *riemanovská*, metrika se signaturou $(-+\cdots+)$ se nazývá *lorentzovská*. Obecně, pokud signatura obsahuje znaménka minus, budeme ji nazývat *smíšenou*. ◦

Zřejmě, $\operatorname{sign}\boldsymbol{g}$ je znaménko hustoty $\operatorname{Det}\boldsymbol{g}$:

$$\operatorname{Det}\boldsymbol{g} = (\operatorname{sign}\boldsymbol{g})\,|\operatorname{Det}\boldsymbol{g}|\ . \tag{6.1}$$

6.2 Riemannovské a lorentzovské metriky

Riemanovské metriky jsou pozitivně definitní a definují standardní skalární součin, velikost a úhel vektorů.

Definice D6.4 (Skalární součin)

Riemanovská metrika definuje *skalární součin* předpisem

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^m \boldsymbol{b}^n \boldsymbol{g}_{mn} \,. \qquad \text{(skalární součin)}$$

Velikost vektoru $|\boldsymbol{a}|$ a *úhel* γ dvou vektorů jsou definovány následovně:

$$|\boldsymbol{a}| = \left(\boldsymbol{a}^k \, \boldsymbol{g}_{kl} \, \boldsymbol{a}^l\right)^{1/2} , \qquad \text{(velikost)}$$

$$\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{a}^m \, \boldsymbol{g}_{mn} \, \boldsymbol{b}^n}{|\boldsymbol{a}| \, |\boldsymbol{b}|} \,. \qquad \text{(úhel)}$$

∘

Lorentzovská metriku zavádí bohatší strukturu. V první řadě definujeme tzv. *kauzální strukturu*, která rozděluje vektory podle znaménka ‘kvadrátu velikosti’ vektoru.

Definice D6.5 (Kauzální struktura)

Nechť $\boldsymbol{g}$ je metrika lorentzovské signatury $(-, +, \ldots, +)$. Vektor $\boldsymbol{a}$ nazýváme v závislosti na znaménku ‘kvadrátu jeho velikosti’ *časupodobný*, *prostorupodobný* či *nulový* (někdy též *světelný*):

$$\boldsymbol{a}^k \, \boldsymbol{a}^l \, \boldsymbol{g}_{kl} \begin{cases} < 0 & \boldsymbol{a} \text{ je časupodobný} \,, \\ = 0 & \boldsymbol{a} \text{ je nulový} \,, \\ > 0 & \boldsymbol{a} \text{ je prostorupodobný} \,. \end{cases}$$

Dva neprostorupodobné vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ nazýváme *(kauzálně) shodně orientované*, pokud $\boldsymbol{a}^i \boldsymbol{b}^j \boldsymbol{g}_{ij} < 0$ nebo pokud si jsou úměrny s kladným koeficentem $\boldsymbol{a} = r\boldsymbol{b}$, $r > 0$.

Lineární podprostor vektorů z $\boldsymbol{T}_x M$ nazýváme *prostorupodobný*, pokud obsahuje pouze prostorupodobné vektory, *nulový*, pokud obsahuje právě jeden nulový vektor a jinak samé prostorupodobné vektory, a konečně *časupodobný*, pokud obsahuje alespoň jeden vektor časupodobný. ∘

Poznámka

Názvosloví je motivováno teorií relativity, ve které lorentzovská metrika popisuje vlastnosti prostoročasu. V případě vektorů můžeme stejné názvosloví zobecnit i pro metriku obecné smíšené signatury. Pro lineární podprostory by však pro obecnou metriku bylo potřeba zavést více typů a to podle signatury metriky indukované na podprostor.

Definice D6.6 (Kauzální orientovatelnost variety)

Shodnost orientace dvou časupodobných (případně nulových) vektorů v daném bodě je ekvivalence, která rozděluje časupodobné (resp. nulové) vektory na dvě třídy. Vektory jedné z nich konvenčně nazýváme vektory *orientované do budoucnosti*, vektory druhé třídy nazýváme *orientované do minulosti*. Pokud lze vydělení vektorů orientovaných do budoucnosti provést globálně a hladce na celé varietě (tj. pokud časupodobný vektor orientovaný do budoucnosti zůstává při spojitém přenosem po varietě pořád orientován do budoucnosti), nazýváme varietu *kauzálně orientovatelnou* a volbu vektorů orientovaných do budoucnosti nazýváme *kauzální orientací*. ∘

Shodně orientované časupodobné vektory tvoří konvexní množinu ohraničenou shodně orientovanými nulovými vektory. Množinu nulových vektorů též nazýváme *světelný kužel*.

Pro lorentzovskou metriku zavádíme následující veličiny

Definice D6.7 (Pseudoskalární součin)

Lorentzovská metrika definuje *pseudoskalární součin* předpisem

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^m \boldsymbol{b}^n \boldsymbol{g}_{mn} .$$

Tento součin není positivně definitní.

Dva vektory nazýváme *kolmé* (též *ortogonální*), pokud mají nulový pseudoskalární součin.

Velikost vektoru $\boldsymbol{a}$ definujeme předpisem

$$|\boldsymbol{a}| = \left|\boldsymbol{a}^k \, \boldsymbol{g}_{kl} \, \boldsymbol{a}^l\right|^{1/2} .$$ ◦

Vztah dvou vektorů může být z hlediska lorentzovské metriky různého typu. Než zavedeme analogie úhlu, podívejme se podrobněji na nejjednodušší případ dvoudimenzionálního vektororového prostoru s lorentzovskou metrikou. Označme $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q}$ ortonormální bázi s časupodobným vektorem $\boldsymbol{t}$ a prostorupodobným vektorem $\boldsymbol{q}$. Analogií jednotkové sféry tvoří vektory normalizované pomocí lorentzovské metriky. Jednotkovou pseudokružnici tvořenou prostorupodobnými vektory $\boldsymbol{a}$ definujeme podmínkou

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 1 , \tag{6.2}$$

jednotkovou pseudokružnici tvořenou časupodobnými vektory $\boldsymbol{n}$ pak podmínkou

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}) = -1 . \tag{6.3}$$

Vzhledem ke zvolené bázi mají vektory jednotkových pseudokružnic tvar

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \pm\big(\sinh\tau\, \boldsymbol{t} + \cosh\tau\, \boldsymbol{q}\big) , \\ \boldsymbol{n} &= \pm\big(\cosh\beta\, \boldsymbol{t} + \sinh\beta\, \boldsymbol{q}\big) . \end{aligned} \tag{6.4}$$

(Jedná se tedy o různé větve hyperbol s asymptotikami $\pm\boldsymbol{t} \pm \boldsymbol{q}$.) Parametry τ a β hrají roli úhlu mezi vektorem báze $\boldsymbol{q}$, případně $\boldsymbol{t}$ a vektorem $\boldsymbol{a}$, resp. $\boldsymbol{n}$. Tyto parametry totiž odpovídají délce oblouku jednotkové pseudokružnice mezi příslušnými dvěma vektory měřené pomocí lorentzovské metriky (viz definici D6.12). τ i β lze přímočaře získat ze skalárního součinu obou vektorů. Můžeme tak definovat

Definice D6.8 (Úhly a pseudoúhly)

Pro dva vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, jejichž lineární obal je prostorupodobný, definujeme vzájemný *úhel* γ obvyklým způsobem

$$\cos\gamma = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|} .$$

Pokud je lineární obal dvou prostorupodobných vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ časupodobný, definujeme jejich vzájemný *pseudoúhel* τ výrazem

$$\cosh\tau = \left|\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}\right| .$$

Pro dva shodně orientované časupodobné vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ definujeme jejich vzájemnou *rapiditu* β vztahem

$$\cosh\beta = -\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|} .$$ ◦

6.3 Zvyšování a snižování indexů

Metrika umožňuje ztotožnit prostor vektorů a 1-forem. Toto ztotožnění lze rozšířit na tenzory a umožňuje převádět abstrakní indexy mezi dolní a horní pozicí.

Definice D6.9 (Zvyšování a snižování indexů)
Metrika $\boldsymbol{g}$ definuje operace *zvyšování* $\sharp$ a *snižování* $\flat$ *abstraktních indexů* tenzorů

$$\sharp \quad \boldsymbol{T}^0_k \to \boldsymbol{T}^k_0\ , \quad \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k} \to ({}^\sharp\boldsymbol{\omega})^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}\ ,$$
$$\flat \quad \boldsymbol{T}^k_l \to \boldsymbol{T}^l_k\ , \quad \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k} \to ({}^\flat\boldsymbol{A})_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}$$

předpisem

$$({}^\sharp\boldsymbol{\omega})^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k} = \boldsymbol{g}^{-1\,\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{n}_1}\dots\boldsymbol{g}^{-1\,\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{n}_k}\ \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\dots\boldsymbol{n}_k}\ ,$$
$$({}^\flat\boldsymbol{A})_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k} = \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{n}_1}\cdots\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{n}_k}\ \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}_1\dots\boldsymbol{n}_k}\ .$$

Můžeme samozřejmě zavést i zvedání a snižování jednotlivých indexů zvlášť a to i u tenzorů se složitější indexovou strukturou. To však budeme již zapisovat vždy přímo pomocí indexů, bez užití značek $\sharp$ a $\flat$. ∘

Lehce lze ověřit, že

$${}^{\flat\sharp}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}\ , \quad {}^{\sharp\flat}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\ , \tag{6.5}$$
$${}^\sharp\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}^{-1}\ , \quad {}^\flat\boldsymbol{g}^{-1} = \boldsymbol{g}\ . \tag{6.6}$$

Snížením indexů u vektorů ortonormální báze dostaneme 1-formy lišící se od prvků duální ortonormální báze nanejvýše znaménkem

$${}^\flat\boldsymbol{e}_i = \pm\,\boldsymbol{e}^i\ , \quad {}^\sharp\boldsymbol{e}^i = \pm\,\boldsymbol{e}_i\ , \tag{6.7}$$

přičemž znaménko je určeno znaménkem 'kvadrátu velikosti' příslušného vektoru

$$\pm 1 = \operatorname{sign}\bigl(\boldsymbol{e}_i^{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{e}_i^{\boldsymbol{l}}\,\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{kl}}\bigr)\ . \tag{6.8}$$

V případě, že je jednoznačně definovaná metrika, zavádí se často konvence, že zvyšování a snižování indexů se provádí automaticky. Tenzory lišící se různou polohou indexů se označují stejným symbolem a rozlišuje se mezi nimi pouze explicitním vypsáním indexů. Máme tedy např. $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{mn}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}$. Při používání této konvence je potřeba rozlišovat relativní polohu kovariantních a kontravariantních indexů. Bez této konvence na umístění spodních a horních indexů vůči sobě nezáleží – nemůžou se nikdy promíchat. Pokud však připouštíme automatické snižování a zvyšování indexů, musí mít jednoznačně určené pořadí všech indexů, nezávisle na tom, zda jsou zrovna umístěny nahoře či dole. Budeme např. psát Riemannův tenzor $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{abc}}{}^{\boldsymbol{d}}$, který při snížení posledního indexu přejde na $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{abcd}}$. Vyjímkou jsou symetrické tenzory, kde na pořadí indexů nezáleží.

V duchu této konvence a díky (6.6) se pro inverzní metriku běžně používá stejný symbol jako pro metriku samotnou a oba tenzory se rozlišují pouze zápisem indexů, tj. $\boldsymbol{g}^{\boldsymbol{ab}}$ je tenzor $\boldsymbol{g}^{-1}$ a $\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{ab}}$ je tenzor $\boldsymbol{g}$. Pokud zvýšíme metrice pouze jeden index, dostaneme jednotkový operátor

$$\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}}{}^{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{a}}\ . \tag{6.9}$$

Vzhledem k ortonormální bázi *riemannovské* metriky tvoří komponenty metriky g_{ab} jednotkovou matici. Zvyšování a snižování indexů se tak vzhledem k ortonormální bázi stává triviální operací – komponenty tenzoru lišící se pouze polohou indexu se numericky shodují, např.:

$$a^i = {}^\flat a_i \ , \quad \alpha_i = {}^\sharp \alpha^i \ .$$

Pro metriku se smíšenou signaturou se složky tenzoru vzhledem k ortonormální bázi mohou pro různou polohu indexů lišit znaménkem.

Poznamenejme, že operace zvyšování a snižování indexu je reálná analogie hermitovského sdružení. Vskutku, pro reálné tenzory můžeme pomocí metriky definovat transpozici operátoru:

Definice D6.10 (Transpozice operátoru)

Mějme na varietě M metriku $\boldsymbol{g}$. Pro tenzory typu $(1,1)$ definujeme operaci *transpozice* $^\mathsf{T}$

$$^\mathsf{T} \ : \ \boldsymbol{T}_x{}^1_1 M \to \boldsymbol{T}_x{}^1_1 M \ , \quad \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}^\mathsf{T}$$

vztahem

$$\big(\boldsymbol{A}^\mathsf{T} \cdot \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\big) = \big(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{b}\big) \ .$$

Explicitně můžeme psát

$$\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}\,\boldsymbol{a}}{}_{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{g}^{-1\,\boldsymbol{a}\boldsymbol{i}}\, \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{b}\boldsymbol{j}}\, \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{j}}{}_{\boldsymbol{i}} \ ,$$

případně, s automatickým zvedáním a snižování indexů

$$\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}\,\boldsymbol{a}}{}_{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{b}}{}^{\boldsymbol{a}} \ .$$

Budeme-li chtít zdůraznit, že operace transpozice je definována pomocí metriky $\boldsymbol{g}$, budeme psát $^{\mathsf{T}_g}$. ◦

Poznámka

Pro tenzory v součinovém tvaru $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{\alpha}$ tedy máme $\boldsymbol{A}^\mathsf{T} = {}^\sharp\boldsymbol{\alpha}\,{}^\flat\boldsymbol{a}$.

V případě riemannovské metriky jsou složky transponovaného tenzoru vzhledem k ortonormální bázi tvořeny maticí získanou ze souřadnic původního tenzoru záměnnou indexů (sloupců a řádků). Snižování a zvyšování indexu totiž v tomto případě nemění numerickou hodnotu komponent tenzoru a tvrzení se redukuje na poslední vztah definice D6.10.

Definujme ještě:

Definice D6.11 (Symetrické operátory)

Lineární operátor $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{T}_x{}^1_1 M$ nazveme *symetrický vzhledem k metrice* $\boldsymbol{g}$, pokud $\boldsymbol{A}^\mathsf{T} = \boldsymbol{A}$. ◦

Uvažujme dále, že máme zadané dvě metriky $\boldsymbol{g}$ a $\boldsymbol{q}$. Můžeme definovat operátor $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{q}^{-1} \cdot \boldsymbol{g}$, tj.

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{i}}{}_{\boldsymbol{j}} = \boldsymbol{q}^{-1\,\boldsymbol{i}\boldsymbol{n}}\, \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{j}} \ .$$

Tento operátor je symetrický jak vzhledem k metrice $\boldsymbol{g}$, tak vzhledme k metrice $\boldsymbol{q}$:

$$\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}_g} = \boldsymbol{A} \ , \quad \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}_q} = \boldsymbol{A} \ . \tag{6.10}$$

Standardní věty lineární algebry zaručují existenci vlastních vektorů symetrického operátoru (stačí uvažovat matici složek vzhledem k ortonormální bázi např. metriky $\boldsymbol{g}$). Vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé ve smyslu obou metrik. Z vlastních vektorů tak lze vytvořit báze, která je ortogonální vzhledem k oběma metrikám $\boldsymbol{g}$ a $\boldsymbol{q}$.

Lemma V6.2 (Společná ortonormální báze)

Každé dvě metriky mají společnou ortogonální bázi, tj. bázi tvořenou kolmými vektory ve smyslu obou metrik. Složky obou metrik vzhledem k takové bázi tvoří diagonální matici. □

6.4 Objekty definované pomocí metriky

Pomocí metriky můžeme definovat několik dalších geometrických objektů.

Začneme definicí délky křivky. Intuitivní význam délky křivky je zřejmý pro riemanovské metriky, kdy metrika definuje běžný pojem vzdálenosti. V případě metrik se smíšenou signaturou zobecníme délku na případ křivek, které nemění svůj 'kauzální' charakter, tj. na křivky, pro které se znaménko 'kvadrátu velikosti' tečného vektoru nemění. V případě lorentzovských metrik to znamená na křivky, které jsou všude časupodobné či prostorupodobné.

Definice D6.12 (Délka křivky)

Mějme na varietě M zadanou metriku $\boldsymbol{g}$. Nechť $z(\tau)$ je parametrizovaná křivka, jejíž 'kauzální' charakter ve smyslu metriky $\boldsymbol{g}$ se nemění – tj. křivka, podél které znaménko

$$\operatorname{sign} \frac{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{a}} z}{d\tau} \frac{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{b}} z}{d\tau}\, \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{ab}} \Big|_{\tau}$$

zůstává neměnné.

Pro úseku mezi hodnotami parametru τ_{z} a τ_{k} takovéto křivky definujeme délku ve smyslu metriky $\boldsymbol{g}$ jako integrál

$$\Delta s = \int\limits_{(\tau_{\mathrm{z}},\tau_{\mathrm{k}})} \left| \frac{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{a}} z}{d\tau} \frac{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{b}} z}{d\tau}\, \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{ab}} \right|^{1/2} d\tau = \int\limits_{(\tau_{\mathrm{z}},\tau_{\mathrm{k}})} \left| \frac{\boldsymbol{D} z}{d\tau} \right| d\tau \,. \qquad \circ$$

V případě riemanovské metriky se definice D6.12 redukuje na definici obyčejné délky, pro lorentzovskou metriku dává délku pro prostorupodobné křivky a vlastní čas pro křivky časupodobné.

Pokračujme připomenutím definice D5.11 metrického objemového elementu $\mathfrak{g}^{1/2}$ (ve dvou a třech dimenzích označovaného dS a dV), který měří 'skutečný', 'fyzikální' objem – tj. objem měřený pomocí měřítek popsaných metrikou. Definovali jsme integrovatelnou hustotu $\mathfrak{g}^{1/2}$, jejíž komponenta vůči souřadnicím x^j je dána determinantem komponent metriky (viz (5.10))

$$\mathfrak{g}^{1/2} = \left|\det g_{kl}\right|^{1/2} d^d x \,, \tag{6.11}$$

či zapsáno pomocí operace zavedené v definici D5.12

$$\mathfrak{g}^{1/2} = \left|\operatorname{Det} \boldsymbol{g}\right|^{1/2} \,. \tag{6.12}$$

Dále můžeme definovat Levi-Civitův tenzor $\boldsymbol{\varepsilon}$

Definice D6.13 (Levi-Civitův tenzor)
Mějme zadanou metriku $\boldsymbol{g}$. Levi-Civitův tenzor $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Lambda}^d M$ asociovaný s touto metrikou je positivně orientovaný totálně antisymetrický tenzor s $d = \dim M$ kovariantními indexy splňující normalizační podmínku

$$\varepsilon_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d}\, {}^\sharp\varepsilon^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d} = (\operatorname{sign}\boldsymbol{g})\, d!\ .$$

Indexy byly zvýšeny pomocí metriky $\boldsymbol{g}$. ∘

Levi-Civitův tenzor lze zapsat jednoduše vzhledem k ortonormální positivně orientované bázi 1-forem $\boldsymbol{e}^j$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{e}^1 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}^d\ , \qquad \text{tj.} \qquad \varepsilon_{1\dots d} = 1\ . \tag{6.13}$$

Pro ${}^\sharp\boldsymbol{\varepsilon}$ ale pomocí (6.7) dostáváme

$${}^\sharp\varepsilon^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d} = (\operatorname{sign}\boldsymbol{g})\, d!\, \boldsymbol{e}_1^{[\boldsymbol{a}_1} \dots \boldsymbol{e}_d^{\boldsymbol{a}_d]}\ , \quad \text{tj.} \quad \varepsilon^{1\dots d} = \operatorname{sign}\boldsymbol{g}\ . \tag{6.14}$$

Vzhledem k obecným positivně orientovaným souřadnicím x^j máme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= |\det g_{ij}|^{1/2}\ \mathbf{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^d\ , \\ {}^\sharp\boldsymbol{\varepsilon} &= (\operatorname{sign}\boldsymbol{g})\, |\det g_{ij}|^{-1/2}\ d!\ \mathcal{A}\Big(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^1} \dots \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^d}\Big)\ . \end{aligned} \tag{6.15}$$

Porovnáním defince Levi-Civitova tenzoru s definicí D1.4 inverze totálně antisymetrického tenzoru dostáváme

Lemma V6.3 (Inverze Levi-Civitova tenzoru)
Nechť $\boldsymbol{\varepsilon}$ je Levi-Civitův tenzor asociovaný s metrikou $\boldsymbol{g}$. Pak

$${}^\sharp\boldsymbol{\varepsilon} = (\operatorname{sign}\boldsymbol{g})\ \boldsymbol{\varepsilon}^{-1}\ .$$ □

Poznámka
Jak ${}^\sharp\boldsymbol{\varepsilon}$, tak $\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}$ jsou přirození kandidáti pro roli “Levi-Civitova tenzoru s indexy nahoře”. Bohužel se mohou lišit o znaménko. Pod $\varepsilon^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d}$ budeme vždy mínit ${}^\sharp\varepsilon^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d}$ ve smyslu konvence automatického zvyšování indexů. Poznamenejme však, že mnohé vztahy by vypadaly jednodušeji, kdyby se v nich namísto ${}^\sharp\boldsymbol{\varepsilon}$ použil inverzní tenzor $\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}$.

Z vlastností inverze (lemma V1.3) plyne

$$\begin{aligned} {}^\sharp\varepsilon^{\boldsymbol{i}_1\dots\boldsymbol{i}_d}\ \varepsilon_{\boldsymbol{j}_1\dots\boldsymbol{j}_d} &= (\operatorname{sign}\boldsymbol{g})\ d!\ {}^{[d]}\delta^{\boldsymbol{i}_1\dots\boldsymbol{i}_d}_{\boldsymbol{j}_1\dots\boldsymbol{j}_d}\ , \\ {}^\sharp\varepsilon^{\boldsymbol{i}_1\dots\boldsymbol{i}_k\boldsymbol{n}_1\dots\boldsymbol{n}_{d-k}}\ \varepsilon_{\boldsymbol{j}_1\dots\boldsymbol{j}_k\boldsymbol{n}_1\dots\boldsymbol{n}_{d-k}} &= (\operatorname{sign}\boldsymbol{g})\ (d-k)!\ k!\ {}^{[k]}\delta^{\boldsymbol{i}_1\dots\boldsymbol{i}_k}_{\boldsymbol{j}_1\dots\boldsymbol{j}_k}\ , \\ {}^\sharp\varepsilon^{\boldsymbol{i}_1\dots\boldsymbol{i}_d}\ \varepsilon_{\boldsymbol{i}_1\dots\boldsymbol{i}_d} &= (\operatorname{sign}\boldsymbol{g})\ d!\ . \end{aligned} \tag{6.16}$$

Levi-Civitův tenzor lze vyjádřit explicitně též pomocí tenzoru orientace a metrického objemového elementu. Platí

Lemma V6.4 (Levi-Civitův tenzor a tenzor orientace)
Levi-Civitův tenzor se od tenzoru orientace liší pouze multiplikativně o faktor daný metrickým objemovým elementem.

$$\varepsilon_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d} = \mathfrak{g}^{1/2}\ \tilde{\varepsilon}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d}\ .$$ □

Z toho přímo plyne vztah k absolutní hodnotě forem (definice D5.13) a hustotnímu duálu (definice D5.19)

$$\mathfrak{g}^{1/2} = |\boldsymbol{\varepsilon}| = {}^\star\boldsymbol{\varepsilon}\ , \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = {}^\star\mathfrak{g}^{1/2}\ . \tag{6.17}$$

Nakonec pomocí metriky definujeme Hodgeův duál působící na antisymetrických formách

Definice D6.14 (Hodgeův duál)

Mějme metriku $\boldsymbol{g}$ a s ní asociovaný Levi-Civitův tenzor $\boldsymbol{\varepsilon}$. Ten definuje na prostoru antisymetrických forem *Hodgeův duál* (či krátce *duál*) následovně:

$$
\begin{aligned}
&{}^{*}: \boldsymbol{\Lambda}^{p}_{x} M \rightarrow \boldsymbol{\Lambda}^{d-p}_{x} M\;, \quad \boldsymbol{\omega} \rightarrow {}^{*}\boldsymbol{\omega}\;,\\
&{}^{*}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_{p+1}\dots\boldsymbol{a}_d} = \frac{1}{p!}\,{}^{\sharp}\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}\;\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d}\;.
\end{aligned}
\qquad \circ
$$

Využitím (6.16), lemmatu V6.4 a definice D5.19 dostaneme následující vlastnosti:

Lemma V6.5 (Inverze a vztah k hustotnímu duálu)

Pro Hodgeův duál definovaný metrikou $\boldsymbol{g}$ platí

$$
\begin{aligned}
&{}^{**}\boldsymbol{\omega} = (\operatorname{sign}\boldsymbol{g})\,(-1)^{p\,(d-p)}\,\boldsymbol{\omega}\;,\\
&{}^{*}\boldsymbol{\omega} = {}^{\star\sharp}(\mathfrak{g}^{1/2}\boldsymbol{\omega}) = (\operatorname{sign}\boldsymbol{g})\,(-1)^{p\,(d-p)}\,\mathfrak{g}^{-1/2}\;{}^{\flat\star}\boldsymbol{\omega}\;,
\end{aligned}
$$

kde $\boldsymbol{\omega}$ je antisymetrická p-forma. □

Pomocí metriky můžeme zavést na antisymetrických p-formách přirozený skalární součin

Definice D6.15 (Skalární součin na formách)

Nechť $\boldsymbol{\omega}$ a $\boldsymbol{\sigma}$ jsou antisymetrické p-formy, pak definujme

$$
\boldsymbol{\omega}\bullet\sigma = \frac{1}{p!}\,\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\dots\boldsymbol{n}_p}\,{}^{\sharp}\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{n}_1\dots\boldsymbol{n}_p}\;,\quad \omega^2 = \boldsymbol{\omega}\bullet\boldsymbol{\omega}\;. \qquad \circ
$$

S touto definicí pro Hodgův duál můžeme psát:

Lemma V6.6 (Vlastnosti Hodgeova duálu)

Pro $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Lambda}^p M$ platí

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\omega}\wedge{}^{*}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\wedge{}^{*}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}\bullet\boldsymbol{\sigma}\;\boldsymbol{\varepsilon} = {}^{*}\big(\boldsymbol{\omega}\bullet\boldsymbol{\sigma}\big)\;,\\
&\boldsymbol{\omega}\wedge{}^{*}\boldsymbol{\omega} = \omega^2\,\boldsymbol{\varepsilon} = {}^{*}\omega^2\;.
\end{aligned}
\qquad \square
$$

Cvičení C6.1

Dokažte! ✓

Příklad P6.1 (Hodgeův duál v jednoduchých případech)

Pro riemanovskou metriku ve dvou dimenzích máme

$$
\begin{aligned}
&{}^{**}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} &&\text{pro}\quad \boldsymbol{\omega}\in\boldsymbol{\Lambda}^p M\;,\quad p = 0, 2\;,\\
&{}^{**}\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha} &&\text{pro}\quad \boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{\Lambda}^1 M\;,
\end{aligned}
$$

přičemž pokud ztotožníme 1-formy s vektory, dává ${}^{*}\boldsymbol{\alpha}$ vektor otočený o pravý úhel ve směru positivní orientace báze.

Pro riemanovskou metriku ve třech dimenzích máme

$$
{}^{**}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \qquad \text{pro}\quad \boldsymbol{\omega}\in\boldsymbol{\Lambda}^p M\;,\quad p = 0,1,2,3\;.
$$

Nakonec, pro lorentzovskou metriku ve čtyřech dimenzích dostáváme

$$
\begin{aligned}
&{}^{**}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} &&\text{pro}\quad \boldsymbol{\omega}\in\boldsymbol{\Lambda}^p M\;,\quad p = 1,3\;,\\
&{}^{**}\boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega} &&\text{pro}\quad \boldsymbol{\omega}\in\boldsymbol{\Lambda}^p M\;,\quad p = 0,2,4\;.
\end{aligned}
$$

Příklad P6.2 (Vektorové násobení)
V případě třídimenzionální variety s riemanovskou metrikou definuje Hodgeův duál vektorové násobení dvou vektorů. Definice je přímočařejší pro vektory s indexy umístěnými 'dole' (tj. 1-formami získanými snížením indexů)

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = {}^*(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \ .$$

Vskutku, explicitním rozpisem (s automatickým zvedáním indexů pomocí metriky) dostaneme

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})^{\boldsymbol{ij}}\, \varepsilon_{\boldsymbol{ijk}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{j}}\, \varepsilon_{\boldsymbol{ijk}} \ ,$$

což je standardní definice vektorového násobení.

6.5 Killingovy vektory

Varieta může být vybavena různými metrikami které na ní zadávají 'jednodušší' či 'složitější' geometrii. Mírou 'složitosti geometrie' může být např. jak moc se metrika mění bod od bodu či jak moc se liší od triviální metriky afinního prostoru. V příštích kapitolách charakterizujeme tuto odlišnost od triviální metriky pomocí pojmu křivosti – k jeho zavedení však budeme muset nejdříve vybudovat aparát kovariantního derivování.

Již nyní však můžeme říci, co to znamená, že má metrika symetrii, tj. že se nemění při aplikaci jistých difeomorfismů.

Definice D6.16 (Symetrie metriky)
Říkáme, že difeomorfismus ϕ je *symetrií* metriky $\boldsymbol{g}$, pokud se metrika při aplikaci indukovaného zobrazení ϕ_* nezmění

$$\phi_* \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g} \ .$$

Důležité jsou zejména symetrie podél toku (vůči jednoparametrické grupě difeomorfismů - viz definici D3.3). Říkáme, že metrika je *symetrická vůči toku* ϕ_τ, pokud pro každé τ

$$\phi_{\tau *}\, \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g} \ . \qquad \circ$$

Symetrie vůči toku generovanému vektorovým polem $\boldsymbol{a}$ lze charakterizovat diferenciálně. Zřejmě je neměnnost metriky ekvivalentní vymizení Lieovy derivace $\pounds_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{g}$ metriky podél pole $\boldsymbol{a}$. Vektory splňující tuto podmínku se nazývají Killingovy vektory.

Definice D6.17 (Killingovy vektory)
Vektor $\boldsymbol{a}$ je *Killingův vektor* metriky $\boldsymbol{g}$, pokud

$$\pounds_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{g} = 0 \ .$$

Tok generovaný polem $\boldsymbol{a}$ je pak symetrií metriky. ∘

Obecně nemá metrika žádné Killingovy vektory. Pokud nějaké Killingovy vektory má, tvoří tyto vektorová pole Lieovu algebru s operací násobení danou Lieovou závorkou.

Věta V6.7 (Algebra Killingových vektorů)
Lieova závorka dvou Killingových vektorů metriky $\boldsymbol{g}$ je opět Killingův vektor. Stejně tak lineární kombinace Killingových vektorů (s *konstantními* koeficenty) je opět Killingův vektor. Killingovy vektory tak s operací Lieovy závorky tvoří Lieovu algebru. □

verze 2.03 (2013-12-09)
[2.03,1.12,1.14,2.04,2.02,2.02,2.03,2.03,2.02,0,1.03]

Kapitola 7

Kovariantní derivace

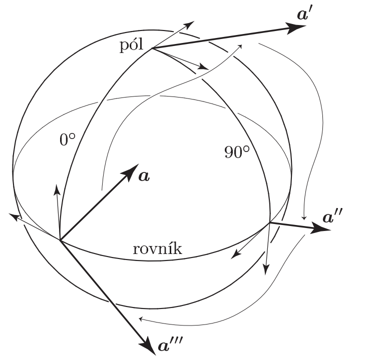
Při zkoumání tenzorových polí na varietách bychom rádi uměli charakterizovat změny těchto polí. Aparát diferenciální geometrie by nám měl umožňovat derivovat obecná tenzorová pole. Jak jsme se však již zmínili v kapitole 3, naivní definice derivace tenzorového pole $\boldsymbol{A}$ podél parametrizované křivky $z(\tau)$

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\Big(\boldsymbol{A}\big(z(\tau)\big)-\boldsymbol{A}\big(z(0)\big)\Big) \tag{7.1}$$

naráží na problém, že v ní odčítáme tenzory v různých bodech – tenzory patřící do různých tečných prostorů. Korektně zavedená derivace musí tedy obsahovat informaci, jak tento rozdíl provést, jak přenést tenzor z jednoho tečného prostoru do prostoru druhého, ve kterém již tenzory odčítat umíme.

V kapitole 3 v definici Lieovy derivace D3.11 jsme tento přenos provedli pomocí difeomorfismu indukovaného vektorovým polem podél kterého derivujeme. V této kapitole nás bude zajímat přenos definovaný geometricky, zobecňující pojem *rovnoběžnosti*.

M7.1 Neexistence globální rovnoběžnosti



Jednoduchou evidencí, že v případě zakřiveného prostoru nemáme globální rovnoběžnost, získáme na příkladu dvoudimenzionální sféry S^2. Přenášíme-li vektor $\boldsymbol{a}$ rovnoběžně z rovníku na pól podél nultého poledníku, poté podél 90-tého poledníku opět na rovník, a nakonec po rovníku zpět do výchozího bodu, zjistíme, že výsledný vektor $\boldsymbol{a}'''$ není rovnoběžný s vektorem původním – rovnoběžný přenos vektoru z bodu do bodu záleží na cestě, po které vektor přenášíme. (Pod rovnoběžným přenosem vektoru podél *poledníku či rovníku na kouli* zde míníme přenos, který zachovává velikost vektoru a úhel mezi vektorem a poledníkem či vektorem a rovníkem. Více viz zavedení paralelního přenosu.)

7.1 Paralelní přenos

V předchozí kapitole jsme obecnou diferencovatelnou varietu vybavili velmi silnou geometrickou strukturou – metrikou. Ta nám umožňuje definovat vzdálenost, měřit úhly, a jak uvidíme později, zavést i pojem rovnoběžnosti. Naším cílem je však popisovat obecný *zakřivený* prostor a jeho základní odlišnost od prostoru *rovného* (*plochého*) je neexistence *globální* rovnoběžnosti.

V plochém prostoru můžeme globálně a invariantně říci, které vektory patřící do tečných prostorů *různých bodů* jsou navzájem rovnoběžné. V křivém prostoru tak učinit nelze. Globální rovnoběžnost je význačná vlastnost právě plochých variet.

V zakřiveném prostoru lze definovat pouze slabší strukturu - *rovnoběžný* či *paralelní přenos vektoru podél křivky*. Paralalní přenos umožňuje přenést rovnoběžně vektor z jednoho bodu do druhého podél konkrétní křivky. Výsledek však obecně závisí na cestě přenosu. Abychom vlastnostem paralelního přenosu lépe porozuměli, navrátíme se k varietě bez metrické struktury, tedy nebudeme předpokládat přítomnost metriky.

Definice D7.1 (Paralelní přenos podél křivky)
Nechť γ je orientovaná po částech hladká křivka spojující body x_z a x_k. *Paralelní přenos* $\mathrm{par}[\gamma]$ *podél* γ je zobrazení splňující následující vlastnosti:

$$\mathrm{par}[\gamma] : \boldsymbol{T}_{x_z} M \to \boldsymbol{T}_{x_k} M \ ,$$
$$\mathrm{par}[\gamma](\boldsymbol{a} + r\boldsymbol{b}) = \mathrm{par}[\gamma]\,\boldsymbol{a} + r\,\mathrm{par}[\gamma]\,\boldsymbol{b} \qquad \text{(linearita)}$$

pro $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{T}_{x_z} M$ a $r \in \mathbb{R}$. Navíc, pokud se křivka γ skládá z dvou částí γ_z a γ_k spojených v bodě x_o, tj. $\gamma = \gamma_z \odot \gamma_k$, a $-\gamma$ je křivka lišící se od γ orientací, paralelní přenos splňuje

$$\mathrm{par}[\gamma] = \mathrm{par}[\gamma_k] \circ \mathrm{par}[\gamma_z] \ , \qquad \text{(pravidlo pro skládání)}$$
$$\mathrm{par}[-\gamma] = \mathrm{par}[\gamma]^{-1} \ , \qquad \text{(přenos v inverzním směru)}$$
$$\mathrm{par}[\gamma] = \mathrm{id} \qquad \text{pro } \gamma \text{ triviální} \ . \qquad \text{(triviální přenos)}$$

Paralelní přenos lze též naindukovat na obecný tečný tenzorový bundle $\boldsymbol{T}^l_k M$ požadavkem, že komutuje s tenzorovým násobením

$$\mathrm{par}[\gamma](\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = (\mathrm{par}[\gamma]\,\boldsymbol{A})\,(\mathrm{par}[\gamma]\,\boldsymbol{B}) \ . \qquad \circ$$

Poznámka
Definice paralelního přenosu by ještě měla obsahovat další podmínky určující hladkost paralelního přenosu. Ty se však snáze formulují v lokální řeči kovariantní derivace. Jelikož již v příštím oddíle budeme chápat kovariantní derivaci jako primární objekt a paralelní přenos jako odvozenou strukturu, nebudeme definici paralelního přenosu dále rozvádět.

Zdůrazněme, že paralelní přenos závisí pouze na geometrické stopě křivky na varietě, nikoli na případné parametrizaci křivky. Pro parametrizované křivky je však výhodné zavést následující označení:

Definice D7.2
Mějme křivku γ reprezentovanou pomocí parametrizace $z : I \to M$, kde I je interval v $\mathbb{R}$ obsahující 0. Pro $\tau \in I$ definujeme

$$\mathrm{par}_\tau[z] = \mathrm{par}[\gamma_\tau] \ .$$

Zde γ_τ je křivka daná částí křivky γ mezi body $z(0)$ a $z(\tau)$ (pro $\tau < 0$ s opačnou orientací než γ). $\circ$

Paralelní přenos na obecné diferencovatelné varietě není určen jednoznačně. Můžeme definovat různé paralelní přenosy. Klasifikace všech možných paralelních přenosů však bude mnohem jednodušší, pokud namísto *globálního* paralelního přenosu zavedeme jeho *lokální* formu – kovariantní derivaci.

Než tak provedeme, zmiňme ještě krátce pojem *grupy holonomie*. Paralelní přenos podél uzavřené křivky, tj. křivky začínající a končící ve stejném bodě x, indukuje lineární zobrazení na tečném prostoru $\boldsymbol{T}_x M$. Všechna tato zobrazení generovaná všemi uzavřenými křivkami skrze x tvoří tzv. *grupu holonomie* $\mathrm{Hol}(x)$ *v bodě* x.

7.2 Kovariantní derivace

Paralelní přenos je globální struktura na varietě – svazuje spolu tečné prostory různých bodů spojených křivkou. Jeho geometrický význam je poměrně názorný. Není však nejvhodnější pro lokální popis rovnoběžnosti. Pro takový popis je výhodnější přejít k lokální veličině – *kovariantní derivaci*.

Paralelní přenos vektorů a tenzorů podél křivky nám totiž umožňuje dát význam vzorci (7.1) pro derivaci tenzorového pole. Tenzory z různých tečných prostorů přeneseme do společného prostoru právě pomocí paralelního přenosu. Definice kovariantní derivace pomocí paralelního přenosu má tak tvar:

Definice D7.3 (Kovariantní derivace pomocí paralelního přenosu)
Mějme tenzorové pole $\boldsymbol{A}$ definované v okolí bodu x a tečný vektor $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{T}_x M$. Kovariantní derivaci $\boldsymbol{\nabla_a A}$ pole $\boldsymbol{A}$ ve směru $\boldsymbol{a}$ defininujeme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla_a A} &= \frac{d}{d\tau}\Big(\mathrm{par}_{-\tau}[z]\, \boldsymbol{A}\Big)\Big|_{\tau=0} \\ &= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\Big(\mathrm{par}_\tau[z]^{-1} \boldsymbol{A}\big(z(\tau)\big) - \boldsymbol{A}\big(z(0)\big)\Big) , \end{aligned}$$

kde $z(\tau)$ je libovolná parametrizovaná křivka vedoucí ze $z(0) = x$ s tečným vektorem $\boldsymbol{a}$. ∘

Poznámka
Kovariantní derivace nezávisí na volbě křivky $z(\tau)$, pouze na vektoru $\boldsymbol{a}$ v bodě x – rozdíl způsobený v odlišné volbě křivky $z(\tau)$ je vyššího řádu v τ.

Kovariantní derivace je natolik užitečný a významný geometrický objekt, že se většinou definuje ne jako druhotný objekt závisející na pojmu paralelního přenosu, ale přímo, jako objekt primární. Kovariantní derivace se definuje axiomaticky. Kdybychom vycházeli z definice D7.3, tyto vlastnosti by již byly jejím důsledkem. My je však zformulujeme jako definiční vlastnosti vymezující význam pojmu kovariantní derivace nezávisle na paralelním přenosu:

Definice D7.4 (Kovariantní derivace)
Kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla_a}$ *ve směru* $\boldsymbol{a}$ v bodě x je operátor působící na tenzorová pole splňující

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\nabla_a A} \in \boldsymbol{T}_{x}{}^k_l M \qquad \text{pro} \quad \boldsymbol{A} \in \mathfrak{T}^k_l M , \\ &\boldsymbol{\nabla}_{(f\boldsymbol{a})}\boldsymbol{A} = f \boldsymbol{\nabla_a A} , && \text{(ultralokalita ve směru)} \\ &\boldsymbol{\nabla}_{(\boldsymbol{a}+r\boldsymbol{b})}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla_a A} + r \boldsymbol{\nabla_b A} , && \text{(linearita ve směru)} \\ &\boldsymbol{\nabla_a}\big(\boldsymbol{A} + r\boldsymbol{B}\big) = \boldsymbol{\nabla_a A} + r\boldsymbol{\nabla_a B} , && \text{(linearita v argumentu)} \\ &\boldsymbol{\nabla_a}\big(\boldsymbol{AB}\big) = \big(\boldsymbol{\nabla_a A}\big)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{\nabla_a B}\big) , && \text{(Leibniz)} \\ &\boldsymbol{\nabla_a}\, \mathrm{C}\boldsymbol{A} = \mathrm{C}\, \boldsymbol{\nabla_a A} , && \text{(komutace s kontrakcí)} \\ &\boldsymbol{\nabla_a} f = \boldsymbol{a}[f] = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} f , && \text{(působení na funkce)} \end{aligned}$$

kde f je funkce a $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ tenzorová pole definované v okolí bodu x, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{T}_x M$, $r \in \mathbb{R}$ a $\mathrm{C}\boldsymbol{A}$ naznačuje libovolné zúžení tenzoru $\boldsymbol{A}$. ∘

Poznámka
Kovariantní derivace je též často nazývána *lineární konexí*. Obdobu kovariantní derivace, kterou jsme zavedli na tečném bundlu, lze totiž definovat na každém lineárním fibre bundlu pomocí obecnějšího objektu *konexe*. Konexe je alternativní lokální popis paralelního přenosu vhodný pro obecné (ne nutně lineární) bundly. V případu lineárního bundlu je pak konexe ekvivalentní kovariantní derivaci.

Pro parametrizovanou křivku můžeme definovat kovariantní derivování tenzorových polí podle parametru křivky.

Definice D7.5 (Kovariantní derivování podél křivky)
Nechť $z : I \to M$ je parametrizovaná křivka a $\boldsymbol{A}$ tenzorové pole definované podél této křivky. *Kovariantní derivací pole* $\boldsymbol{A}$ *podle parametru křivky* τ nazýváme derivaci pole $\boldsymbol{A}$ ve směru tečného vektoru

$\boldsymbol{D}z/d\tau$,

$$\frac{\boldsymbol{\nabla}}{d\tau}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}_{\frac{\boldsymbol{D}z}{d\tau}}\boldsymbol{A}\,.$$ ◦

Kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla_a}$ závisí na směru $\boldsymbol{a}$ ultralokálně – závisí pouze na vektoru $\boldsymbol{a}$ v bodě x a nevyžaduje znalost směru derivování v okolí bodu x (jak tomu naopak bylo u Lieovy derivace). Závislost na směru derivování je navíc lineární. To nám umožňuje reprezentovat tuto závislost tenzorově – jako kontrakci směru a tenzoru nazývaného kovariantní diferenciál. Kovariantní diferenciál je tak zobecněním operace gradientu funkce pro obecná tenzorová pole. V analogii k zavedení gradientu pomocí derivace ve směru (2.1) definujeme

Definice D7.6 (Kovariantní diferenciál)

Kovariantní diferenciál $\boldsymbol{\nabla A}$ tenzorového pole $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{T}^k_l M$ v bodě x je tenzor z $\boldsymbol{T}_x{}^k_{l+1} M$ splňující

$$\boldsymbol{\nabla_a A^{m\ldots}_{n\ldots}} = \boldsymbol{a^c}\,\boldsymbol{\nabla_c}\,\boldsymbol{A^{m\ldots}_{n\ldots}}\,.$$

Kovariantní diferenciál spočtený v každém bodě variety tak převádí tenzorové pole na tenzorové pole s jedním kovariantním indexem navíc. Tento index budeme umisťovat přímo u symbolu $\boldsymbol{\nabla}$ – viz index $\boldsymbol{c}$.

Kovariantní derivaci $\boldsymbol{\nabla}$ a příslušný kovariantní diferenciál nazýváme *hladké*, pokud pole $\boldsymbol{\nabla A}$ je hladké pro libovolné hladké pole $\boldsymbol{A}$. ◦

Poznámka

Zdůrazněme rozdíl mezi kovariantní derivací $\boldsymbol{\nabla_a}$ ve směru vektoru $\boldsymbol{a}$ a kovariantním diferenciálem $\boldsymbol{\nabla_c}$ s abstrakním indexem $\boldsymbol{c}$. V prvním případě je vektor vysázen písmem běžné velikosti, v druhém případě je pro index použito písmo menší. V následujícím textu se většinou bude používat kovariantní diferenciál, derivace ve směru se objeví spíše výjimečně.

Z vlastností kovariantní derivace D7.4 přímočaře plyne

Věta V7.1 (Vlastnosti kovariantního diferenciálu)

Kovarinatní diferenciál splňuje následující vlastnosti

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nabla}\ :\ \mathfrak{T}^k_l M \rightarrow \mathfrak{T}^k_{l+1} M\,,\\
&\boldsymbol{\nabla_c}\big(\boldsymbol{A^{k\ldots}_{m\ldots}} + r\,\boldsymbol{B^{l\ldots}_{n\ldots}}\big) = \boldsymbol{\nabla_c A^{k\ldots}_{m\ldots}} + r\,\boldsymbol{\nabla_c B^{l\ldots}_{n\ldots}}\,,\\
&\boldsymbol{\nabla_c}\big(\boldsymbol{A^{k\ldots}_{m\ldots}}\boldsymbol{B^{l\ldots}_{n\ldots}}\big) = \big(\boldsymbol{\nabla_c A^{k\ldots}_{m\ldots}}\big)\boldsymbol{B^{l\ldots}_{n\ldots}} + \boldsymbol{A^{k\ldots}_{m\ldots}}\big(\boldsymbol{\nabla_c B^{l\ldots}_{n\ldots}}\big)\,,\\
&\boldsymbol{\nabla_c A^{\ldots n\ldots}_{\ldots n\ldots}} = \boldsymbol{\delta^l_k}\,\boldsymbol{\nabla_c A^{\ldots k\ldots}_{\ldots l\ldots}}\,,\\
&\boldsymbol{\nabla_c} f = \mathbf{d}_{\boldsymbol{c}} f\,,
\end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou tenzorová pole, f funkce a $r \in \mathbb{R}$. □

Definice D7.7 (Složky kovariantního diferenciálu)

Složky kovariantního diferenciálu $\boldsymbol{\nabla A}$ tenzorového pole $\boldsymbol{A}$ vzhledem ke zvolenému souřadnicovému systému x^j označujeme $A^{k\cdots}_{l\ldots;n}$:

$$\boldsymbol{\nabla A} = A^{k\ldots}_{l\ldots;n}\ \mathbf{d}x^n\,\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^k}\cdots\ \mathbf{d}x^l\cdots\,.$$ ◦

Poznámka

Výjimečně budeme používat pro složky $A^{k\cdots}_{l\ldots;n}$ kovariantního diferenciálu $\boldsymbol{\nabla A}$ též označení $\nabla_n A^{k\cdots}_{l\ldots}$. U tohoto označení je nutno mít na paměti, že se nejedná o derivaci skalárů $A^{k\cdots}_{l\ldots}$, tj. o složky gradientu $\boldsymbol{\nabla}\big(A^{k\cdots}_{l\ldots}\big)$, nýbrž o složky kovariantní derivace tenzoru $\boldsymbol{A}$. Pokud budeme někdy chtít napsat explicitně složky gradientu komponent $A^{k\cdots}_{l\ldots}$, použijeme přímo parciálních derivací $A^{k\cdots}_{l\ldots,n}$. Připomeňme, že zápis $\mathrm{d}_n\omega_{l\ldots}$ by mohl mít jiný význam – pro antisymetrické formy $\boldsymbol{\omega}$ označuje složky vnější derivace $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}$ (viz definici D4.3).

Příklad P7.1

Derivováním vztahu $\boldsymbol{a}^n = \boldsymbol{\delta}^n_m \boldsymbol{a}^m$ platném pro libovolné vektorové pole $\boldsymbol{a}$ obdržíme, že pro libovolnou kovariantní derivaci platí

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\delta} = 0\ .$$

Kovariantní derivace anihiluje i libovolný tenzor vytvořený z jednotkového tenzoru tenzorovým násobením a permutací indexů. Např. anihiluje projektory na symetrické a antisymetrické tenzory (definice D1.8 a D1.3)

$$\boldsymbol{\nabla}\,{}^{(p)}\boldsymbol{\delta} = 0\ , \quad \boldsymbol{\nabla}\,{}^{[p]}\boldsymbol{\delta} = 0\ .$$

V definici D7.4 jsme zavedli kovariantní derivaci jako primární objekt, nezávislý na paralelním přenosu diskutovaném na začátku kapitoly. Kovariantní derivace naopak umožňuje definovat pojem paralelního přenosu – tenzor je paralelně přenášen podél křivky, pokud se podél křivky 'nemění', tj. pokud jeho kovariantní derivace ve směru křivky je nulová. Můžeme tedy zformulovat definici komplementární k definici D7.3:

Definice D7.8 (Paralelní přenos pomocí kovariantní derivace)

Mějme kovariantní derivaci $\boldsymbol{\nabla}$ a křivku γ vedoucí z bodu x_z do bodu x_k.

O tenzorovém poli $\boldsymbol{A}$ definovaném podél křivky γ řekneme, že je *konstantní ve smyslu derivace* $\boldsymbol{\nabla}$, pokud v každém bodě křivky platí

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{A} = 0\ ,$$

kde $\boldsymbol{a}$ je vektor tečný ke křivce.

Tenzor $\boldsymbol{A}_\mathrm{k} \in \boldsymbol{T}_{x_\mathrm{k}}{}^k_l M$ je *paralelní přenos tenzoru* $\boldsymbol{A}_\mathrm{z} \in \boldsymbol{T}_{x_\mathrm{z}}{}^k_l M$ *podél křivky* γ *ve smyslu derivace* $\boldsymbol{\nabla}$,

$$\boldsymbol{A}_\mathrm{k} = \mathrm{par}[\gamma]\,\boldsymbol{A}_\mathrm{z}\ ,$$

pokud existuje konstantní pole $\boldsymbol{A}$ definované podél γ takové, že $\boldsymbol{A}_\mathrm{z} = \boldsymbol{A}|_{x_\mathrm{z}}$ a $\boldsymbol{A}_\mathrm{k} = \boldsymbol{A}|_{x_\mathrm{k}}$. ∘

Takto definovaný paralelní přenos splňuje podmínky z definice D7.1.

Pro křivku γ reprezentovanou parametrizací $z : I \to M$ jsme v definici D7.2 zavedli přenos $\mathrm{par}_\tau[\gamma]$ z bodu $z(0)$ do bodu $z(\tau)$. Tento přenos zřejmě generuje konstantní pole podél křivky γ:

$$\frac{\boldsymbol{\nabla}}{d\tau}\boldsymbol{A}_\tau = 0\ , \quad \text{kde} \quad \boldsymbol{A}_\tau = \mathrm{par}_\tau[\gamma]\,\boldsymbol{A}_0 \in \boldsymbol{T}_{z(\tau)}{}^k_l M\ . \tag{7.2}$$

Kovariantní derivace není vlastnostmi v definici D7.4 určena jednoznačně. Před tím, než charakterizujeme prostor všech kovariantních derivací, zavedeme v následujícím oddíle důležité příklady kovariantních derivací – tzv. *souřadnicové kovariantní derivace*.

7.3 Souřadnicová kovariantní derivace

V kapitole 2 jsme si v případě kdy máme na okolí $U \subset M$ definované souřadnice x^j zavedli parciální derivace $f_{,j}$ funkce f definované na U. Též jsme viděli, že při změně souřadnic se parciální derivace funkce transformují jako složky složky 1-formy – konkrétně jako složky gradientu $\mathbf{d}f$. Obecně se však parciální derivace komponent tenzorových polí netransformují jako složky tenzoru. Přesto však můžeme z parciálních derivací složek tenzorového pole vytvořit tenzorový objekt.

M7.2 Transformace parciálních derivací
To že se parciální derivace složek tenzoru netransformují při změně souřadného systému jako složky tenzoru lehce nahlédneme na příkladu vektorového pole. Mějme dva souřadné systémy x^j a $x'^{j'}$ definované na stejné oblasti. Parciální derivace složek vektorového pole $\boldsymbol{a}$ se transformují následovně (viz kapitolu 2 ohledně značení):

$$a'^{j'}{}_{,k'} = a^m{}_{,n}\, x'^{j'}{}_{,m}\, x^n{}_{,k'} + a^m\, x'^{j'}{}_{,mn}\, x^n{}_{,k'}\ .$$

(Dokažte!)

Definice D7.9 (Souřadnicová kovariantní derivace)

Mějme souřadnice x^j na oblasti $U \subset M$. S tímto souřadnicovým systémem asociujeme *souřadnicovou kovariantní derivaci* $\boldsymbol{\partial}$ jednoznačně určenou podmínkami

$$\boldsymbol{\partial}\,\mathbf{d}x^j = 0 \quad \text{nebo} \qquad \boldsymbol{\partial}\tfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^j} = 0\;.$$

Obě podmínky jsou díky dualitě bází $\mathbf{d}x^j$ a $\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^j}$ ekvivalentní. ◦

Takto definovaná derivace tenzorového pole má jasnou reprezentaci pokud vyjádříme pole v souřadnicovém systému x^m. Zřejmě platí

Lemma V7.2

$$\boldsymbol{\partial_k A^{m\dots}_{n\dots}} = A^{p\dots}_{q\dots,r}\;\mathbf{d}_{\boldsymbol{k}}x^r\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}}x^q\cdots\frac{\boldsymbol{\partial^m}}{\boldsymbol{\partial}x^p}\cdots\;.$$ □

Důkaz:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\partial_k A^{m\dots}_{n\dots}} &= \boldsymbol{\partial_k}\Big(A^{p\dots}_{q\dots}\;\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}}x^q\cdots\frac{\boldsymbol{\partial^m}}{\boldsymbol{\partial}x^p}\cdots\Big)\\ &= \big(\boldsymbol{\partial_k}A^{p\dots}_{q\dots}\cdots\big)\;\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}}x^q\cdots\frac{\boldsymbol{\partial^m}}{\boldsymbol{\partial}x^p}\cdots\\ &= A^{p\dots}_{q\dots,r}\;\mathbf{d}_{\boldsymbol{k}}x^r\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}}x^q\cdots\frac{\boldsymbol{\partial^m}}{\boldsymbol{\partial}x^p}\cdots\;.\end{aligned}$$

■

Komponenty souřadnicové kovariantní derivace pole jsou tedy parciální derivace komponent pole. Přesněji, vezmeme-li souřadnicovou kovariantní derivaci asociovanou se souřadnicemi $\{x^j\}$ a provedeme-li pomocí ní derivaci tenzorového pole, pak její komponenty vzhledem k $\{x^j\}$ jsou parciální derivace komponent pole vzhledem k $\{x^j\}$. Vyjádříme-li však souřadnicovou kovarinatní derivaci pole v jiném souřadnicovém systému, než se kterým je tato derivace asociována, výsledný vztah bude složitější.

Lehce nahlédneme, že každá souřadnicová kovariantní derivace splňuje

Lemma V7.3

Nechť f je hladká funkce, $\boldsymbol{A}$ hladké tenzorové pole a $\boldsymbol{\partial}$ souřadnicová kovariantní derivace. Pak

$$\boldsymbol{\partial_a\partial_b} f = \boldsymbol{\partial_b\partial_a} f\;, \qquad \text{(torze)}$$

$$\boldsymbol{\partial_a\partial_b A} = \boldsymbol{\partial_b\partial_a A}\;. \qquad \text{(křivost)}$$

□

Důkaz:

V souřadnicích x^j, se kterým je derivace $\boldsymbol{\partial}$ asociována, platí

$$\boldsymbol{\partial_a\partial_b} f = f_{,lk}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}}x^k\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{b}}x^l\;.$$

Druhé parciální derivace funkce f jsou však symetrické. Důkaz pro derivace $\boldsymbol{A}$ je obdobný. ■

Souřadnicové kovariantní derivace asociované s různými souřadnicovými systémy jsou samozřejmě obecně různé. Souřadnicové kovariantní derivace však nevyčerpávají všechny kovariantní derivace. Dalšími speciálními představitely kovariantních derivací jsou derivace asociované s obecnou bází $\{\boldsymbol{e}_j\}$ v tečném prostoru.

Definice D7.10 (n-ádová kovariantní derivace)

Mějme systém hladkých vektorových polí $\boldsymbol{e}_j$, $j = 1, \ldots, n$ tvořící v každém bodě bázi (tj., mějme zadán systém tzv. n-ád). S tímto systémem asociujeme *n-ádovou kovariantní derivaci* $\boldsymbol{\eth}$ jednoznačně určenou podmínkou

$$\boldsymbol{\eth}\boldsymbol{e}_j = 0\ .$$

Ekvivalentně bychom zde mohli použít duální bázi 1-forem $\boldsymbol{e}^j$. ◦

Poznámka

Opět, pro různé systémy n-ád dostáváme různé kovariantní derivace. Derivace tohoto typu hrají roli zejména při zkoumání metrických variet, kdy typicky pracujeme s ortornormálními tetrádami.

Poznámka

“n-ádová kovariantní derivace” není zrovna ‘nejšťastnější’ název – ze stejných důvodů jako samotný pojem n-áda. Podivné slovo n-áda se v češtině neohýbá zrovna nejlépe a navíc dimenze variety nemusí být zrovna n. Jenže zkuste vyslovit “d-ádová derivace”. Nabízely by se názvy “reperová” či “frejmová” nebo dlouhé “neholonomní souřadnicová kovariantní derivace.” Raději však zůstaneme u n-ádové derivace, ať už je dimenze označená jakkoli, a v konkrétních případech utečeme k běžnému “tetrádová,” popřípadě “triádová” a “diádová” kovariantní derivace pro $d = 4$, 3 a 2.

Pro kovariantní derivaci asociovanou se systémem n-ád neplatí obecně obdoba lemmatu V7.3. To ukazuje, že tyto derivace jsou obecně odlišné od souřadnicových kovariantních derivací. Ani n-ádové derivace však nevyčerpávají všechny kovariantní derivace.

Příklad P7.2 (Derivace asociované s polárními souřadnicemi)

Mějme v euklidovské rovině zadané pravoúhlé souřadnice $\{x, y\}$ a polární souřadnice $\{\rho, \varphi\}$ svázané vztahy $x = \rho\cos\varphi$ a $y = \rho\sin\varphi$. Jednotkové vektory tečné k souřadnicovým čarám polárních souřadnic jsou $\boldsymbol{e}_\rho = \boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial}\rho$ a $\boldsymbol{e}_\varphi = \rho^{-1}\,\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial}\varphi$, jednotkové 1-formy mají tvar $\boldsymbol{e}^\rho = \mathbf{d}\rho$ a $\boldsymbol{e}^\varphi = \rho\,\mathbf{d}\varphi$.

Souřadnicovou kovariantní derivaci $\boldsymbol{\partial}$ asociovanou s polárními souřadnicemi definujeme vztahy

$$\boldsymbol{\partial}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\rho} = 0\ ,\quad \boldsymbol{\partial}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\varphi} = 0\ ,\quad \text{případně}\quad \boldsymbol{\partial}\,\mathbf{d}\rho = 0\ ,\quad \boldsymbol{\partial}\,\mathbf{d}\varphi = 0\ .$$

Pro derivaci např. vektoru $\boldsymbol{e}_\varphi$ pak dostáváme

$$\boldsymbol{\partial}\boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{\partial}\Big(\frac{1}{\rho}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\varphi}\Big) = -\frac{1}{\rho^2}\,\mathbf{d}\rho\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\varphi} = -\frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{e}^\rho\boldsymbol{e}_\varphi\ .$$

Obdobně, diádová kovariantní derivace $\boldsymbol{\eth}$ je dána podmínkami

$$\boldsymbol{\eth}\boldsymbol{e}_\rho = 0\ ,\quad \boldsymbol{\eth}\boldsymbol{e}_\varphi = 0\ ,\quad \text{případně}\quad \boldsymbol{\eth}\boldsymbol{e}^\rho = 0\ ,\quad \boldsymbol{\eth}\boldsymbol{e}^\varphi = 0\ .$$

Druhá diádová derivace funkce f je

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eth}\boldsymbol{\eth}f &= \boldsymbol{\eth}\,\mathbf{d}f = \boldsymbol{\eth}\big(f_{,\rho}\,\mathbf{d}\rho + f_{,\varphi}\,\mathbf{d}\varphi\big) = \boldsymbol{\eth}\big(f_{,\rho}\boldsymbol{e}^\rho + \rho^{-1}f_{,\varphi}\boldsymbol{e}^\varphi\big)\\ &= \big(\mathbf{d}f_{,\rho}\big)\,\boldsymbol{e}^\rho + \rho^{-1}\big(\mathbf{d}f_{,\varphi}\big)\,\boldsymbol{e}^\varphi + f_{,\varphi}\big(\mathbf{d}\rho^{-1}\big)\,\boldsymbol{e}^\varphi\\ &= f_{,\rho\rho}\boldsymbol{e}^\rho\boldsymbol{e}^\rho + \rho^{-2}f_{,\varphi\varphi}\boldsymbol{e}^\varphi\boldsymbol{e}^\varphi + \rho^{-1}f_{,\rho\varphi}\big(\boldsymbol{e}^\rho\boldsymbol{e}^\varphi + \boldsymbol{e}^\varphi\boldsymbol{e}^\rho\big)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \rho^{-2}f_{,\varphi}\boldsymbol{e}^\rho\boldsymbol{e}^\varphi\ .\end{aligned}$$

Vidíme, že antisymetrická část je nenulová

$$\boldsymbol{\eth}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\eth}_{\boldsymbol{b}}f - \boldsymbol{\eth}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{\eth}_{\boldsymbol{a}}f = -\rho^{-2}f_{,\varphi}\,\boldsymbol{e}^\rho_{\boldsymbol{a}}\wedge\boldsymbol{e}^\varphi_{\boldsymbol{b}}\ .$$

Pro kovariantní derivaci asociovanou s diádou $\boldsymbol{e}_\rho$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ vskutku neplatí analogie prvního vztahu lemmatu V7.3.

M7.3 Globální rovnoběžnost derivace $\boldsymbol{\eth}$

n-ádové kovariantní derivace jsou specifické tím, že definují globální rovnoběžnost.

Je-li $\boldsymbol{\eth}$ asociovaná s n-ádou $\{\boldsymbol{e}_j\}$, derivace vektorového pole $\boldsymbol{a}$ lze jednoduše vyjádřit v souřadnicích vzhledem k této tetrádě

$$\boldsymbol{\eth}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\eth}(a^n\boldsymbol{e}_n) = (\,\mathbf{d}a^n)\boldsymbol{e}_n = (\boldsymbol{e}_j[a^n])\,\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}_n\ .$$

Souřadnice derivace $\boldsymbol{\eth}\boldsymbol{a}$ jsou tedy derivace $\boldsymbol{e}_j[a^n]$ souřadnic a^n ve směrech $\boldsymbol{e}_j$.

Globálně rovnoběžné vektorové pole je pole splňující $\boldsymbol{\eth}\boldsymbol{a} = 0$. Tuto rovnici zřejmě splňují všechny pole s konstními souřadnicemi a^j vzhledem k bázi $\{\boldsymbol{e}_j\}$. Libovolný vektor v jednom bodě můžeme tedy jednoduše roznést po varietě užitím stejných komponent a^j vzhledem k $\{\boldsymbol{e}_j\}$.

To však v obecnosti neznamená, že by derivace $\boldsymbol{\eth}$ definovala triviální plochou strukturu. V oddíle 7.5 o torzi níže se vrátíme k otázce, čím se globální rovnoběžnost definovaná pomocí $\boldsymbol{\eth}$ liší od ‘triviální’ rovnoběžnosti afinního prostoru.

7.4 Složky kovariantní derivace

V předchozích odstavcích jsme se seznámili s příklady kovariantních derivací. Nyní se zaměříme na to, jak popsat obecnou kovariantní derivaci.

Nejdříve zformulujeme lemma osvětlující vztah dvou různých kovariantních derivací:

Lemma V7.4

Rozdíl dvou kovariantních derivací $\boldsymbol{\nabla}$ a $\tilde{\boldsymbol{\nabla}}$

$$\boldsymbol{\Gamma} = \tilde{\boldsymbol{\nabla}} - \boldsymbol{\nabla}$$

je pseudoderivace typu $(0,1)$ ve smyslu definice D2.4. □

Důkaz:

Linearita $\boldsymbol{\Gamma}$, platnost pravidla pro derivování součinu a komutativita s kontrakcí jsou důsledkem jejich platnosti pro obě kovariantní derivace. Akce na funkce plyne z faktu, že obě kovariantní derivace působí na funkce jako obyčejný gradient. ■

Poznámka

Pokud budeme chtít explicitně naznačit, že rozdíl $\boldsymbol{\Gamma}$ přidává jeden kovariantní index (jedná se o pseudoderivaci typu $(0,1)$), budeme psát $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{a}} = \tilde{\boldsymbol{\nabla}}_{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}$.

Nyní můžeme použít naše znalosti o pseudoderivaci z věty V2.4: (i) jedná se o operaci reprezentovatelnou tenzorem a (ii) její akce na obecných tenzorech je dána jednoznačně akcí na vektorech.

Věta V7.5 (Rozdíl kovariantních derivací)

Mějme dvě kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$ a $\tilde{\boldsymbol{\nabla}}$. Jejich rozdíl $\boldsymbol{\Gamma}$ je jednoznačně určen svojí akcí na vektorových polích, kde lze reprezentovat pomocí tenzoru $\boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{bc}}$ typu $(1,2)$:

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{b}} = \tilde{\boldsymbol{\nabla}}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{\Gamma}^{\;\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{an}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} \,.$$

Akce rozdílu $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{tens}[\boldsymbol{\Gamma}]$ na obecné tenzorové pole $\boldsymbol{A}$ pak explicitně je

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\dots}_{\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2\dots} = \boldsymbol{\Gamma}^{\;\boldsymbol{b}_1}_{\boldsymbol{an}} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}\boldsymbol{b}_2\dots}_{\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2\dots} + \boldsymbol{\Gamma}^{\;\boldsymbol{b}_2}_{\boldsymbol{an}} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{n}\dots}_{\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2\dots} + \cdots \\ - \boldsymbol{\Gamma}^{\;\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{ac}_1} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\dots}_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{c}_2\dots} - \boldsymbol{\Gamma}^{\;\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{ac}_2} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\dots}_{\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{n}\dots} - \cdots \,.\end{aligned}$$

□

Definice D7.11 (Rozdílový tenzor)

Tenzor $\boldsymbol{\Gamma}$ z předchozí věty budeme nazývat *rozdílový tenzor* mezi dvěmi kovariantními derivacemi. ◦

Touto větou jsme získali nástroj k zadávání obecné kovariantní derivace. Vidíme totiž, že každá kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$ se liší od zvolené *souřadnicové derivace* $\boldsymbol{\partial}$ lineární (ultralokální) operací danou tenzorem $\boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{bc}}$. Tento tenzor (případně jeho složky) můžeme chápat jako 'souřadnice' $\boldsymbol{\nabla}$ vzhledem $\boldsymbol{\partial}$. Věta V7.5 pak určuje, jak $\boldsymbol{\nabla}$ působí na obecné tenzorové pole.

Definice D7.12 (Složky kovariantní derivace [konexe])

Složky kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$ (též *koeficienty konexe* či *Christoffelovy symboly*) vzhledem k souřadnicím $\{x^j\}$ nazýváme souřadnice $\Gamma^{\;j}_{kl}$ rozdílového tenzoru $\boldsymbol{\Gamma}$ mezi $\boldsymbol{\nabla}$ a souřadnicovou kovariantní derivací $\boldsymbol{\partial}$ asociovanou se systémem $\{x^j\}$. Platí tedy

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\partial} + \boldsymbol{\Gamma} \,, \quad \text{kde} \quad \boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{tens}\big[\boldsymbol{\Gamma}\big] \,, \quad \boldsymbol{\Gamma} = \Gamma^{\;j}_{kl}\, \mathbf{d}x^k\, \mathbf{d}x^l \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^l} \,.$$

◦

M7.4 Transformace složek konexe

Poznamenejme, že souřadnicový systém $\{x^j\}$ vstupuje do definice složek kovariantní derivace dvěma způsoby. Za prvé, $\Gamma^{\;j}_{kl}$ jsou složky tenzoru $\boldsymbol{\Gamma}$ vzhledem ke zvolenému systému. Za druhé, $\boldsymbol{\Gamma}$ udává rozdíl mezi $\boldsymbol{\nabla}$ a souřadnicovou derivací $\boldsymbol{\partial}$ spojenou se systémem $\{x^j\}$. Komponenty $\Gamma^{\;j}_{kl}$ jsou sice složky tenzoru $\boldsymbol{\Gamma}$ a jako takové se transformují při změně souřadnic od $\{x^j\}$ k $\{x'^{j'}\}$:

$$\Gamma^{\;a'}_{b'c'} = \Gamma^{\;j}_{kl}\, x'^{a'}_{\;,j}\, x^k_{\;,b'}\, x^l_{\;,c'} \,. \qquad (*)$$

Při transformaci komponent kovariantní derivace však musíme navíc změnit 'počátek', vůči kterému kovariantní derivaci odečítáme, tj. musíme místo souřadnicové derivace $\boldsymbol{\partial}$ asociované s $\{x^j\}$ použít souřadnicovou derivaci $\boldsymbol{\partial}'$ asociovanou s $\{x'^{j'}\}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} &= \boldsymbol{\partial} + \boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\partial}' + \boldsymbol{\Gamma}' \,, \\ \boldsymbol{\Gamma}' &= \mathbf{tens}\Big[\Gamma'^{\;j'}_{k'l'}\, \mathbf{d}x'^{k'}\, \mathbf{d}x'^{l'} \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x'^{l'}}\Big] \,.\end{aligned}$$

Pseudoderivace $\boldsymbol{\Gamma}$ a $\boldsymbol{\Gamma}'$ se od sebe liší rozdílem $\mathbf{tens}[\gamma] = \boldsymbol{\partial}' - \boldsymbol{\partial}$, pro tenzory generující tyto pseudoderivace tedy dostáváme $\boldsymbol{\Gamma}' = \boldsymbol{\Gamma} - \gamma$. Vyjdříme-li tento vztah v souřadnicích, dostaneme s užitím lemmatu V7.6 transformační vztah pro složky kovariantní derivace

$$\begin{aligned}\Gamma'^{\;j'}_{k'l'} &= \Gamma^{\;n}_{mn}\, x'^{j'}_{\;,n}\, x^m_{\;,k'}\, x^n_{\;,l'} - x'^{j'}_{\;,mn}\, x^m_{\;,k'}\, x^n_{\;,l'} \\ &= \Gamma^{\;n}_{mn}\, x'^{j'}_{\;,n}\, x^m_{\;,k'}\, x^n_{\;,l'} + x'^{j'}_{\;,n}\, x^n_{\;,k'l'} \,.\end{aligned}$$

Složky $\Gamma^{\;a'}_{b'c'}$ v (*) tedy značí čárkované souřadnice nečárkovaného rozdílového tenzoru $\boldsymbol{\Gamma}$, $\Gamma'^{\;j'}_{k'l'}$ v předchozí rovnici značí čárkované souřadnice čárkovaného rozdílového tenzoru $\boldsymbol{\Gamma}'$.

Nejprve nalezneme složky souřadnicové kovariantní derivace.

Lemma V7.6

Mějme dva systémy souřadnic $\{x^j\}$, $\{x'^{j'}\}$ a s nimi asociované derivace $\boldsymbol{\partial}$ a $\boldsymbol{\partial}'$. Označme γ^j_{kl} složky kovariantní derivace $\boldsymbol{\partial}'$ vzhledem k $\{x^j\}$ a $\gamma'^{j'}_{k'l'}$ složky $\boldsymbol{\partial}$ vzhledem k $\{x'^{j'}\}$. Tyto složky lze vyjádřit pomocí derivací transformačních vztahů mezi oběma systémy souřadnic

$$\gamma^j_{kl} = x'^{i'}_{,kl}\, x^j_{,i'} = -x^j_{,m'n'}\, x'^{m'}_{,k}\, x'^{n'}_{,l}\ ,$$
$$\gamma'^{j'}_{k'l'} = x^i_{,k'l'}\, x'^{j'}_{,i} = -x'^{j'}_{,mn}\, x^m_{,k'}\, x^n_{,l'}\ .$$

Pro tenzory $\boldsymbol{\gamma}$ a $\boldsymbol{\gamma}'$ vytvořené z těchto komponent platí

$$\boldsymbol{\gamma} = -\boldsymbol{\gamma}'\ . \qquad \square$$

DŮKAZ:
Derivováním vztahu $\mathbf{d}x'^{j'} = x'^{j'}_{,i}\,\mathbf{d}x^i$, využitím definice D7.9 a vztahu $\boldsymbol{\partial}' = \boldsymbol{\partial} + \mathbf{tens}[\boldsymbol{\gamma}]$ dostaneme

$$\begin{aligned} 0 = \boldsymbol{\partial}'_{\boldsymbol{a}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{b}} x'^{j'} &= \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{a}}\big(x'^{j'}_{,l}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{b}} x^l\big) - x'^{j'}_{,i}\, \boldsymbol{\gamma}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{ab}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} x^i \\ &= \Big(x'^{j'}_{,kl} - x'^{j'}_{,i}\, \gamma^i_{kl}\Big)\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} x^k\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{b}} x^l\ , \end{aligned}$$

což dokazuje první rovnost pro γ^j_{kl}. Druhou rovnost dostaneme obdobně derivováním vztahu $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial} x'^{j'} = x^i_{,j'}\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial} x^i$. Výrazy pro $\gamma'^{j'}_{k'l'}$ jsou analogické. Poslední vztah plyne přímočaře z

$$\mathbf{tens}[\gamma] = \boldsymbol{\partial}' - \boldsymbol{\partial}\ ,\quad \mathbf{tens}[\gamma'] = \boldsymbol{\partial} - \boldsymbol{\partial}'\ . \qquad \blacksquare$$

Složky kovariantní derivace mají jasný geometrický význam – udávají derivace souřadnicových vektorů a 1-forem. Přímou aplikací $\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\partial} + \boldsymbol{\Gamma}$ totiž dostáváme

Věta V7.7 (Kovariantní derivace vektorové a formové báze)

Nechť $\boldsymbol{\nabla}$ je kovariantní derivace určená vzhledem k souřadnicím $\{x^j\}$ složkami Γ^j_{kl}. Pak platí

$$\boldsymbol{\nabla}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^j} = \Gamma^l_{kj}\ \mathbf{d}x^k\, \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^l}\ ,$$
$$\boldsymbol{\nabla}\,\mathbf{d}x^j = -\Gamma^j_{kl}\ \mathbf{d}x^k\, \mathbf{d}x^l\ . \qquad \square$$

Pomocí složek kovariantní derivace také můžeme vyjádřit explicitně souřadnice derivace obecného tenzorového pole. Přímá aplikace věty V7.5 na případ derivace $\boldsymbol{\nabla}$ a souřadnicové derivace $\boldsymbol{\partial}$ spolu s užitím definice D7.12 vede k tomu, že souřadnice kovariantního diferenciálu $\boldsymbol{\nabla A}$ tenzorového pole $\boldsymbol{A}$ jsou

$$A^{k\ldots}_{l\ldots;a} = A^{k\ldots}_{l\ldots,a} + \Gamma^k_{an} A^{a\ldots}_{k\ldots} + \ldots - \Gamma^n_{al} A^{k\ldots}_{n\ldots} - \ldots\ . \tag{7.3}$$

M7.5 Složky n-ádové kovariantní derivace
n-ádová derivace hraje důležitou roli hlavně v kontextu ortonormálních bází na metrické varietě (viz kapitoly 6 a 9). V typické situaci se používá n-áda asociovaná s nějakým systémem souřadnic $\{x^j\}$, jejíž vektory $\boldsymbol{e}_j$ se od souřadnicových vektorů $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial} x^j$ liší pouze škálováním

$$\boldsymbol{e}_j = \frac{1}{h_{(j)}}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^j}\ ,\quad \boldsymbol{e}^j = h_{(j)}\,\mathbf{d}x^j \qquad (*)$$
(přes j se nesčítá) .

(V tomto kontextu se vyskytují výrazy, ve kterých se nesčítá přes opakující se index. Zejména index u koeficientu $h_{(j)}$ se nechová jako souřadnicový a nebude se přes něj sčítat. Na zbývající situace, kdy nebude použita sčítací konvence, budeme vždy upozorňovat.)
Spočtěme nyní složky γ^j_{kl} n-ádové kovariantní derivace $\boldsymbol{\eth}$ asociované s takto definovanou n-ádou. Derivováním vztahu (*), využitím D7.10 a vztahu $\boldsymbol{\eth} = \boldsymbol{\partial} + \mathbf{tens}[\boldsymbol{\gamma}]$ dostaneme

$$\begin{aligned} 0 = \boldsymbol{\eth}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{e}^j_{\boldsymbol{b}} &= \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{a}}\big(h_{(j)}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{b}} x^j\big) - h_{(j)}\boldsymbol{\gamma}^{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{ab}}\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{c}} x^j \\ &= h_{(j),n}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} x^n\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{b}} x^j - h_{(j)}\gamma^j_{kl}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} x^k\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{b}} x^l \end{aligned}$$
(přes j se nesčítá) .

Odtud

$$\gamma^j_{kl} = \begin{cases} \frac{1}{h_{(j)}} h_{(j),k} & \text{pro } j = l\ , \\ 0 & \text{pro } j \neq l\ . \end{cases}$$

7.5 Torze

Na příkladu n-ádové kovarianí derivace jsme viděli, že antisymetrická část druhé kovariantní derivace funkce nemusí být obecně nulová. Ukazuje se však, že nemůže být zcela libovolná – musí být proporcionální gradientu funkce. Než nalezneme tuto závislost explicitně, dokažme nejdříve následující lemma:

Lemma V7.8

Nechť $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ jsou hladká vektorová pole a $\boldsymbol{\nabla}$ kovariantní derivace. Pak výraz

$$\boldsymbol{a}^n \boldsymbol{\nabla}_n \boldsymbol{b}^m - \boldsymbol{b}^n \boldsymbol{\nabla}_n \boldsymbol{a}^m - [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]^m$$

závisí na $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ lineárně a ultralokálně (lineárně vůči násobení funkcí). □

DŮKAZ:
Linearita vůči sčítání je zřejmá. Zbývá tedy dokázat ultralokalitu, tj. linearitu vůči násobení funkcí f:

$$\begin{aligned}
&(f\boldsymbol{a}^n)\boldsymbol{\nabla}_n \boldsymbol{b}^m - \boldsymbol{b}^n \boldsymbol{\nabla}_n (f\boldsymbol{a}^m) - [f\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]^m \\
&\quad = f\boldsymbol{a}^n \boldsymbol{\nabla}_n \boldsymbol{b}^m - f\boldsymbol{b}^n \boldsymbol{\nabla}_n \boldsymbol{a}^m - (\boldsymbol{b}^n \mathbf{d}_n f)\, \boldsymbol{a}^m - f[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]^m + \boldsymbol{b}[f]\, \boldsymbol{a}^m \\
&\quad = f\,\big(\boldsymbol{a}^n \boldsymbol{\nabla}_n \boldsymbol{b}^m - \boldsymbol{b}^n \boldsymbol{\nabla}_n \boldsymbol{a}^m - [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]^m\big)
\end{aligned}$$ ■

Z věty V2.3 vyplývá, že výraz z lemmatu V7.8 lze reprezentovat pomocí tenzoru. Tento tenzor se nazývá torzí:

Definice D7.13 (Torze)

Ke kovariantní derivaci $\boldsymbol{\nabla}$ můžeme přiřadit tenzorové pole $\boldsymbol{T}$ typu $(1, 2)$ vztahem

$$\boldsymbol{T}^{\;c}_{mn} \boldsymbol{a}^m \boldsymbol{b}^n = \boldsymbol{a}^n \boldsymbol{\nabla}_n \boldsymbol{b}^c - \boldsymbol{b}^n \boldsymbol{\nabla}_n \boldsymbol{a}^c - [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]^c$$

platným pro libovolná hladká vektorová pole $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. Tento tenzor nazýváme *torzí kovariantní derivace* $\boldsymbol{\nabla}$ a píšeme

$$\boldsymbol{T} = \mathbf{Tor}[\boldsymbol{\nabla}]\ .$$

Zavedeme též bilineární vektor-značné zobrazení na tečných vektorech

$$\boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{T}^n_{kl} \boldsymbol{a}^k \boldsymbol{b}^l$$ ○

ekvivalentní tenzoru torze.

Nyní se můžeme vrátit ke zkoumání druhé kovariantní derivace funkce.

Věta V7.9 (Komutátor funkce)

Nechť $\boldsymbol{\nabla}$ je kovariantní derivace s torzí $\boldsymbol{T}$. Pak pro libovolnou hladkou funkci f platí

$$\boldsymbol{\nabla}_m \boldsymbol{\nabla}_n f - \boldsymbol{\nabla}_n \boldsymbol{\nabla}_m f = -\boldsymbol{T}^{\;c}_{mn}\ \mathbf{d}_c f\ .$$ □

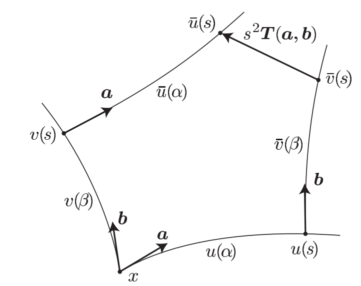
DŮKAZ:
Výrazem z definice torze zapůsobíme na gradient funkce f

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{T}^{\;c}_{mn} \boldsymbol{a}^m \boldsymbol{b}^n\ \mathbf{d}_c f = \\
&\quad = \big(\boldsymbol{a}^m \boldsymbol{\nabla}_m \boldsymbol{b}^n\big)\ \mathbf{d}_n f - \big(\boldsymbol{b}^m \boldsymbol{\nabla}_m \boldsymbol{a}^n\big)\ \mathbf{d}_n f \\
&\qquad - \boldsymbol{a}^m\ \mathbf{d}_m \big(\boldsymbol{b}^n\ \mathbf{d}_n f\big) + \boldsymbol{b}^m\ \mathbf{d}_m \big(\boldsymbol{a}^n\ \mathbf{d}_n f\big) \\
&\quad = \boldsymbol{a}^m \boldsymbol{b}^n \boldsymbol{\nabla}_m \boldsymbol{\nabla}_n f - \boldsymbol{b}^m \boldsymbol{a}^n \boldsymbol{\nabla}_m \boldsymbol{\nabla}_n f\ ,
\end{aligned}$$

kde jsem užili definice Lieovy závorky D2.3 a faktu, že gradient funkce lze zapsat jako kovariantní derivace. Přejmenováním indexů a zkrácením libovolně zvolených vektorových polí $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ dostaneme tvrzení věty. ■

V lemmatu V7.3 jsme si již ukázali, že souřadnicová derivace má nulovou torzi:

M7.6 Geometrický význam torze



Tenzor torze má názorný geometrický význam – charakterizuje, nakolik se neuzavírá ‘rovnoběžník’ složený z čtyř po dvou stejných ‘úseček’. Konkrétně, mějme v bodě x vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. Ve směru těchto vektorů protáhneme ‘úsečky’ u a v (části geodetik $u(\alpha)$ a $v(\beta)$ s tečnými vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ parametrizované afinním parametrem – viz definici D7.15 níže). ‘Délky’ obou ‘úseček’ zvolíme úměrné ‘velikosti’ vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ s koeficientem s (tj. zvolíme úseky geodetik charakterizované stejným afinním parametrem s). Podél ‘úsečky’ u přeneseme rovnoběžně vektor $\boldsymbol{b}$ z bodu $u(0) = x$ do bodu $u(s)$. Odtud vedeme další přímou linii $\bar{v}$ ve směru přeneseného vektoru $\boldsymbol{b}$, opět o úsek úměrný vektoru $\boldsymbol{b}$ koeficientem s, až do bodu $\bar{v}(s)$ (vedeme další geodetiku $\bar{v}(\beta)$ tečnou k $\boldsymbol{b}$ až do bodu daného afinním parametrem $\beta = s$). Obdobně vedeme úsečku v z x do $v(s)$ a odtud úsečku $\bar{u}$ do $\bar{u}(s)$. Takto zkonstruovaný rovnoběžník se obecně neuzavírá, $\bar{v}(s) \neq \bar{u}(s)$. Rozdíl mezi body $\bar{v}(s)$ a $\bar{u}(s)$, tj. jistá ‘nekomutativita paralelního přenosu’, je dán právě tenzorem torze. Nepořádně zapsáno totiž platí

$$\bar{v}(s) - \bar{u}(s) \approx -s^2\, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\ .$$

Tento intuitivní vztah lze zpřesnit použitím libovolné skalární funkce f

$$f(\bar{v}(s)) - f(\bar{u}(s)) \approx -s^2\, \boldsymbol{T}^n(a, b)\ \mathbf{d}_n f(x)\ .$$

Tato geometrická interpretace torze je úzce spojena s podobnou diskusí týkající se Lieových závorek – viz marginálie M3.1. Ukázali jsme, že nekomutativita přenosu podél dvou vektorových polí $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ je dána jejich Lieovou závorkou $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Nyní pouze pracujeme se speciálními vektorovými poli, které získáme z vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{T}_x M$ jejich rovnoběžným roznesením podél geodetik $v(\beta)$ a následně $\bar{u}(\alpha)$ (pole $\boldsymbol{a}$), případně podél geodetik $u(\alpha)$ a $\bar{v}(\beta)$ (pole $\boldsymbol{b}$). Pro takto zkonstruovaná pole můžeme definovat jejich Lieovu závorku. Z definičního vztahu pro tenzor torze (definice D7.13) uvážením, že vektorové pole $\boldsymbol{a}$ je paralelně přenášené ve směru $\boldsymbol{b}$ a naopak, $\boldsymbol{b}^n \boldsymbol{\nabla}_n \boldsymbol{a}^m = \boldsymbol{a}^n \boldsymbol{\nabla}_n \boldsymbol{b}^m = 0$, dostaneme

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\ .$$

Nekomutativita přenosu podél geodetik ve směrech $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ je tak dána vektorem $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. (Poznamenejme ještě, že geodetiky užité výše jsou v následujícím vztahu ke křivkám definovaným v dodatku 3.A: $u(\alpha) = u_0(\alpha)$, $\bar{u}(\alpha) = u_s(\alpha)$, $v(\beta) = v_0(\beta)$, $\bar{v}(\beta) = v_s(\beta)$.)

Lemma V7.10 (Torze souřadnicové kovariantní derivace)
Nechť $\boldsymbol{\partial}$ je souřadnicová kovariantní derivace. Pak

$$\mathbf{Tor}[\boldsymbol{\partial}] = 0 \ . \qquad \square$$

Pro n-ádovou kovariantní derivaci máme vztah

Lemma V7.11 (Torze n-ádové kovariantní derivace)
Nechť $\boldsymbol{\eth}$ je n-ádová kovariantní derivace asociovaná s n-ádou $\{\boldsymbol{e}_j\}$ a označme $\boldsymbol{t} = \mathbf{Tor}[\boldsymbol{\eth}]$. Pak

$$t_{\boldsymbol{mn}}^{\boldsymbol{a}}\ e_k^{\boldsymbol{m}} e_l^{\boldsymbol{n}} = -[\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l]^{\boldsymbol{a}} \ , \tag{i}$$

případně, v n-ádových složkách,

$$t_{kl}^{j} = -\big[\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l\big]^j \ .$$

Dále platí

$$t_{\boldsymbol{mn}}^{\boldsymbol{a}}\ e^j{}_{\boldsymbol{a}} = \mathbf{d}_{\boldsymbol{m}} e^j{}_{\boldsymbol{n}} \ . \tag{ii}$$

Pole $\{\boldsymbol{e}^j\}$ jsou 1-formy báze duální k vektorové n-ádě $\{\boldsymbol{e}_j\}$. $\square$

Důkaz:
První výraz plyne přímo z definice torze D7.13 dosazením $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_k$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_l$ a využitím $\boldsymbol{\eth}\boldsymbol{e}_j = 0$. Rovnost (ii) plyne z vyjádření vnější derivace pomoci derivace kovariantní (viz rovnici (8.4) níže) a užití $\boldsymbol{\eth}\boldsymbol{e}^j = 0$. ■

n-ádová kovariantní derivace $\boldsymbol{\eth}$ tak sice definuje globální rovnoběžnost způsobem popsaném v marginálii M7.3, nejedná se však o triviální plochou derivaci. Difeomorfismy indukované vektorovými poli $\boldsymbol{e}_j$ spolu obecně nekomutují (pro $[\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l] \neq 0$) a geodetiky ve smyslu $\boldsymbol{\eth}$ se proto neuzavírají do souřadnicových čar. Tato *nekomutativita* je zachycena právě v torzi $\boldsymbol{t}$.

Máme-li dvě kovariantní derivace, rozdíl jejich torzí je dán rozdílovým tenzorem:

Věta V7.12 (Vztah torzí dvou kovariantních derivací)
Mějme dvě kovariantní derivace $\tilde{\boldsymbol{\nabla}}$ a $\boldsymbol{\nabla}$. Rozdíl jejich torzí $\tilde{\boldsymbol{T}}$ a $\boldsymbol{T}$ je dán antisymetrickou částí jejich rozdílového tenzoru $\boldsymbol{\Gamma}$:

$$\tilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{ab}}^{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{ab}}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{ab}}^{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{ba}}^{\boldsymbol{n}} = 2\,\boldsymbol{\Gamma}_{[\boldsymbol{ab}]}^{\boldsymbol{n}} \ ,$$

kde $\mathbf{tens}[\boldsymbol{\Gamma}] = \tilde{\boldsymbol{\nabla}} - \boldsymbol{\nabla}$. $\square$

Důkaz:
Aplikujeme vztah $\tilde{\boldsymbol{\nabla}} = \boldsymbol{\nabla} + \mathbf{tens}[\boldsymbol{\Gamma}]$ ve výrazu pro komutátor funkce z věty V7.9:

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{mn}}^{\ \boldsymbol{c}}\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{c}} f &= -\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} f + \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{mn}}^{\ \boldsymbol{c}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{c}} f + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{m}} f - \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{nm}}^{\ \boldsymbol{c}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{c}} f \\ &= \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{mn}}^{\ \boldsymbol{c}}\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{c}} f + \Big(\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{mn}}^{\ \boldsymbol{c}} - \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{nm}}^{\ \boldsymbol{c}}\Big)\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{c}} f \ .\end{aligned}$$

Jelikož funkce f byla zvolena libovolně, můžeme $\mathbf{d}f$ 'zkrátit' a obdržíme požadovaný vztah. ■

Speciálně dostáváme

Lemma V7.13 (Rozdíl kovariantních derivací bez torze)
Tenzor $\boldsymbol{\Gamma}$ charakterizující rozdíl dvou kovariantních derivací bez torze je symetrický:

$$\mathbf{Tor}[\tilde{\boldsymbol{\nabla}}] = \mathbf{Tor}[\boldsymbol{\nabla}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{bc}}^{\ \boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{cb}}^{\ \boldsymbol{a}} \ ,$$

kde $\mathbf{tens}[\boldsymbol{\Gamma}] = \tilde{\boldsymbol{\nabla}} - \boldsymbol{\nabla}$. $\square$

Uvážíme-li, že torze souřadnicové derivace $\boldsymbol{\partial}$ je nulová, dostáváme jako přímočarý důsledek věty V7.12 též vyjádření tenzoru torze obecné derivace $\boldsymbol{\nabla}$ pomocí jejích složek vzhledem k souřadnicovému systému $\{x^j\}$.

Lemma V7.14 (Torze pomocí složek kovariantní derivace)
Nechť $\boldsymbol{\nabla}$ je kovariantní derivace určená vzhledem k souřadnicím $\{x^j\}$ složkami Γ^j_{kl}, respective příslušným rozdílovým tenzorem $\boldsymbol{\Gamma}$. Torze $\boldsymbol{T}$ je pak určena antisymetrickou částí rozdílového tenzoru $\boldsymbol{\Gamma}$

$$\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{bc}} = \boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{bc}} - \boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{cb}} = 2\,\boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{a}}_{[\boldsymbol{bc}]}\ . \qquad \square$$

Příklad P7.3 (Pokračování příkladu P7.2 – torze)
Nyní můžeme spočíst torzi diádové kovariantní derivace $\boldsymbol{\eth}$ spojené s polárními souřadnicemi definované v příkladu P7.2. Podle lemmatu V7.11, využitím $[\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi] = -\rho^{-1}\boldsymbol{e}_\varphi$, dostáváme

$$\boldsymbol{t} = \frac{1}{\rho}\, \boldsymbol{e}^\rho \wedge \boldsymbol{e}^\varphi\ \boldsymbol{e}_\varphi\ .$$

Neboli, jediné nenulové komponenty tenzoru torze jsou

$$t^{\varphi}_{\rho\varphi} = -t^{\varphi}_{\varphi\rho} = \frac{1}{\rho}\ .$$

7.6 Prostor kovariantních derivací

Nyní prozkoumáme, jakou strukturu má prostor všech kovariantních derivací.

Definice D7.14 (Prostor kovariantních derivací)
Prostor kovariantních derivací označíme $\mathfrak{G}M$. Prostor kovariantních derivací bez torze označíme $\mathfrak{G}_0 M$. $\circ$

Z věty V7.5 víme, že rozdíl mezi dvěmi kovariantními derivacemi je charakterizován rozdílovým tenzorem. Všechny možné rozdílové tenzory (tenzory typu $(1,2)$) tvoří vektorový prostor. Prostor všech kovariantních derivací $\mathfrak{G}M$ však vektorový prostor není. Mezi kovariantními derivacemi nelze vydělit nulový prvek – v prostoru kovariantních derivací nelze vybrat jednoznačně počátek.

Jelikož však umíme dvě kovariantní derivace odčítat a rozdíl leží ve vektorovém prostoru, prostor $\mathfrak{G}M$ má strukturu afinního prostoru. Zaměření tohoto afinního prostoru je isomorfní prostoru všech rozdílových tenzorů, tj. prostoru $\mathfrak{T}^1_2 M$.

V prostoru $\mathfrak{G}M$ si můžeme zvolit počátek a ostatní kovariantní derivace popisovat pomocí jejich 'průvodičů' vzhledem k tomuto počátku. Pokud za počátek zvolíme souřadnicovou kovariantní derivaci $\boldsymbol{\partial}$, 'průvodič' obecné kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$ není nic jiného než pseudoderivace $\boldsymbol{\Gamma}$ charakterizovaná složkami Γ^j_{kl}. Určení obecné kovariantní derivace pomocí jejích složek Γ^j_{kl} znamená tak zadání složek jejího 'průvodiče' vzhledem k 'počátku' $\boldsymbol{\partial}$.

Ačkoli nelze v prostoru kovariantních derivací $\mathfrak{G}M$ vybrat kanonicky počátek, existuje v něm význačný podprostor – prostor $\mathfrak{G}_0 M$ kovariantních derivací s nulovou torzí. Tento prostor má opět strukturu afinního prostoru. Podle lemmatu V7.13 je rozdílový tenzor dvou kovariantních derivací bez torze symetrický. Prostor $\mathfrak{T}^1_{(2)} M$ symetrických tenzorů typu $(1,2)$ je opět vektorový prostor a tvoří zaměření afinního prostoru $\mathfrak{G}_0 M$.

Na podprostor $\mathfrak{G}_0 M$ můžeme dokonce definovat projektor. 'Odchylka' kovariantní derivace od podprostoru $\mathfrak{G}_0 M$ je právě její torze. Pokud od kovariantní derivace její torzní část odečteme, dostaneme derivaci z podprostoru $\mathfrak{G}_0 M$.

Lemma V7.15 (Beztorzní část kovariantní derivace)

Nechť $\tilde{\boldsymbol{\nabla}}$ je kovariantní derivace s torzí $\tilde{\boldsymbol{T}}$. Kovariantní derivace

$$\boldsymbol{\nabla} = \tilde{\boldsymbol{\nabla}} - \mathbf{tens}\big[\tfrac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{T}}\big]$$

má nulovou torzi a nazveme ji *beztorzní část* derivace $\tilde{\boldsymbol{\nabla}}$.

Mají-li dvě kovariantní derivace stejnou beztorzní část, jejich rozdílový tenzor je antisymetrický. □

Obecnou kovariantní derivaci můžeme tedy kanonicky rozdělit na její beztorzní část (z afinního prostoru $\mathfrak{G}_0 M$) a torzi (z vektorového prostoru $\mathfrak{T}^1_{[2]} M$). Z tohoto hlediska je dostatečné zkoumat vlastnosti kovariantních derivací bez torze. Derivace s torzí se pak dostanou 'posunem' určeným obyčejným tenzorovým polem – torzí. Ve fyzikálních aplikacích se skutečně používají hlavně kovariantní derivace bez torze. Nicméně, jak jsme viděli v lemmatu V7.11, kovariantním derivacím s torzí se nevyhneme při užití n-ádových kovariantních derivací.

Podprostor kovariantních derivací se stejnou beztorzní částí lze chrakterizovat i přímo geometricky. Trochu předběhneme a prozradíme, že kovariantní derivace z tohoto prostoru definují stejné geodetiky – viz následující oddíl.

Třída beztorzních derivací je stále velmi široký prostor obsahující jak obecné, tak poměrně 'triviální' kovariantní derivace. Příkladem těch 'triviálních' jsou souřadnicové kovariantní derivace. Po zavedení pojmu křivosti níže budeme schopni vymezit tuto 'trivialitu' přesněji – bude se jednat o tzv. *ploché* kovariantní derivace, derivace, které mají nulový Riemannův tenzor křivosti. V prostoru beztorzních kovariantních derivací $\mathfrak{G}_0 M$ tak můžeme identifikovat podprostor $\mathfrak{G}_{\mathrm{F}} M$ plochých kovariantních derivací. Lokálně lze každá plochá kovariantní derivace identifikovat jako souřadnicová derivace vhodně zvoleného systému souřadnic. Konstrukce takového systému je založena na obecnější konstrukci tzv. *normálních souřadnic*.

7.7 Geodetiky a normální okolí

Kovariantní derivace a s ní spojený paralelní přenos nám umožňuje zobecnit pojem 'přímky', 'přímé čáry'. Křivku nazveme přímou, pokud její tečný vektor bude podél ní paralelní.

Definice D7.15 (Geodetika)

Parametrizovaná křivka $w(\tau)$ se nazývá *geodetika* s *afinním parametrem* τ (ve smyslu kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$), pokud platí

$$\frac{\boldsymbol{\nabla}}{d\tau}\frac{\boldsymbol{D}w}{d\tau} = 0\,,$$

tj. pokud je tečný vektor $\boldsymbol{D}w/d\tau$ podél křivky paralelně přenášen.∘

Je-li kovariantní derivace specifikována vzhledem k souřadnicovému systému x^j pomocí složek Γ^j_{kl}, případně pomocí rozdílového tenzoru $\boldsymbol{\Gamma}$, rovnice pro geodetiku lze zapsat

$$\frac{\boldsymbol{\partial}}{d\tau}\frac{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{n}}w}{d\tau} + \boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{kl}}\frac{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{k}}w}{d\tau}\frac{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{l}}w}{d\tau} = 0\,, \tag{7.4}$$

respektive, v souřadnicích $w^j(\tau) = x^j(w(\tau))$

$$\frac{d^2w^n}{d\tau^2} + \Gamma^n_{kl}\,\frac{dw^k}{d\tau}\,\frac{dw^l}{d\tau} = 0\ . \tag{7.5}$$

Dostáváme tak obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu s koeficienty danými složkami konexe. Standardní věty o existenci a jednoznačnosti řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic nám zaručují, že k daným počátečním podmínkám – počátečnímu bodu x a počátečnímu tečnému vektoru $\boldsymbol{a}$ – existuje jednoznačně maximálně prodloužená geodetika.

Definice D7.16

Geodetika se nazývá *úplná*, pokud je definována pro plnou škálu hodnot afinního parametru $\tau \in \mathbb{R}$. Varieta se nazývá *geodeticky úplná*, pokud každá geodetika lze prodloužit na úplnou geodetiku. ◦

Poznámka

Pojem geodetické úplnosti hraje důležitou roli v obecné teorii relativity, kde se pomocí existence geodetik neprodloužitelných na úplné detekuje přítomnost singularit.

Rozdílový tenzor je v (7.4) zúžen symetricky s tečným vektorem. Rovnice pro geodetiku tak není citlivá na antisymetrickou část rozdílového tenzoru. Ta je však podle věty V7.14 dána torzí. Jak jsme již zmínili výše, geodetiky proto závisí pouze na beztorzní části kovariantní derivace.

Při změně parametrizace geodetiky je potřeba rovnici geodetiky z definice D7.15 modifikovat.

Lemma V7.16 (Obecná parametrizace geodetiky)

Parametrizovaná křivka $w(\eta)$ je geodetika (ve smyslu kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$), splňuje-li

$$\frac{\boldsymbol{\nabla}}{d\eta}\frac{\boldsymbol{D}w}{d\eta} \propto \frac{\boldsymbol{D}w}{d\eta}\ .$$

Afinní parametr geodetiky je dán až na lineární transformaci. □

Důkaz:

Přímým dosazením $\tau = \tau(\eta)$ do D7.15 dostáváme

$$\Big(\frac{d\eta}{d\tau}\Big)^2\,\frac{\boldsymbol{\nabla}}{d\eta}\frac{\boldsymbol{D}w}{d\eta} + \frac{d^2\eta}{d\tau^2}\,\frac{\boldsymbol{D}w}{d\eta} = 0\ ,$$

což dává požadovanou proporcionalitu.

Vidíme též, že parametr geodetiky zůstává afinním parametrem, pokud je faktor $\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^{-2}\frac{d^2\eta}{d\tau^2}$ nulový. Závislost jednoho afinního parametru na jiném tak musí být lineární. ■

Geodetiky můžeme využít při reprezentaci bodů blízkých danému bodu x pomocí tečných vektorů – reprezentaci, která se často zapisuje heuristickým výrazem $x + \varepsilon\boldsymbol{a} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

Definice D7.17 (Geodetické zobrazení)

Geodetické zobrazení geod_x je zobrazení z tečného prostoru $\boldsymbol{T}_x M$ do okolí bodu x přiřazující vektoru $\boldsymbol{a}$ bod s afinním parametrem 1 geodetiky vedoucí z x ve směru $\boldsymbol{a}$:

$$\operatorname{geod}_x \boldsymbol{a} = w(1)\ , \quad \text{kde } w(\tau) \text{ je geodetika splňující}$$
$$w(0) = x\ , \quad \frac{\boldsymbol{D}w}{d\tau}(0) = \boldsymbol{a}\ .$$

Pro $z = \operatorname{geod}_x \boldsymbol{a}$ budeme též psát $\boldsymbol{a} = \operatorname{geod}_x^{-1} z$. ◦

Geodetické zobrazení geod_x není obecně definováno na celém tečném prostoru $\boldsymbol{T}_x M$, protože geodetiky obecně nelze prodloužit na geodetiky úplné. Nicméně vždy existuje okolí $N_0 \subset \boldsymbol{T}_x M$ nulového vektoru $\mathbf{0}$, na kterém je geodetické zobrazení geod_x difeomorfismus zobrazující N_0 jednoznačně a hladce na okolí $N_x \subset M$ bodu x.

Definice D7.18 (Normální okolí)

Okolí N_x bodu x, na kterém je zobrazení geod_x^{-1} difeomorfismus, se nazývá *normální okolí bodu* x.

Normální okolí N_x ze nazývá *konvexní*, pokud každé jeho dva body lze spojit právě jednou geodetikou celou patřící do N_x. ◦

Ke každému bodu existuje konvexní normální okolí.

V konvexním normálním okolí lze zvolit tzv. *normální souřadnice*

Definice D7.19

Nechť N_x je konvexní normální okolí bodu x. Mějme dále v bodě x zvolenou n-ádu vektorů $\{\boldsymbol{e}_j\}$. Na okolí N_x definujeme *normální souřadnice* $\{\bar{x}^j\}$ pomocí komponent vektoru asociovaného s bodem pomocí geodetického zobrazení:

$$\bar{x}^j(z) = z^j \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \mathrm{geod}_x\big(z^j \boldsymbol{e}_j\big)\ .$$

Bod x nazýváme počátek systému $\{\bar{x}^j\}$. Zřejmě $\bar{x}^j(x) = 0$. ◦

Normální souřadnice jsou nejbližší analogií lineárních souřadnic známým z afinního prostoru. Připomeňme, že na afinním prostoru máme globální rovnoběžnost určující plochou kovariantní derivaci. Složky této derivace vzhledem k lineárním souřadnicím jsou nulové. Rozvineme-li na obecné varietě v blízkosti bodu x složky obecné konexe vzhledem k normálním souřadnicím, zjistíme, že jsou v prvním řádu nulové a v dalším řádu dány křivostí variety. Trochu předběhneme a uvedeme zde tento rozvoj explicitně. Křivost v něm bude popsána pomocí tzv. Riemannova tenzoru – pojmem křivosti včetně Riemannova tenzoru se budeme zevrubně zabývat níže.

Věta V7.17 (Složky konexe v normálních souřadnicích)

Mějme v okolí bodu x_0 normální souřadnice $\{\bar{x}^j\}$ zkonstruované pomocí geodetik ve smyslu beztorzní kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$. Složky $\bar{\Gamma}^j_{kl}$ této kovariantní derivace vzhledem k systému $\{\bar{x}^j\}$ jsou v blízkosti x_0 dány rozvojem

$$\bar{\Gamma}^n_{kl}\big|_x = -\frac{1}{3}\left(\bar{R}_{jk}{}^n{}_l + \bar{R}_{jl}{}^n{}_k\right)\big|_{x_0}\, \bar{x}^j + \mathcal{O}\big((\bar{x}^i)^2\big)\ ,$$

kde $\bar{x}^j$ jsou souřadnice bodu x. Zde $\bar{R}_{kl}{}^n{}_j$ jsou složky *Riemannova tenzoru* (v systému $\{\bar{x}^j\}$), který charakterizuje křivost kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$ – viz definici D7.21 a po ní následující text.

Pro kovariantní derivaci s torzí má rozvoj složek tvar

$$\bar{\Gamma}^n_{kl}\big|_x = \frac{1}{2}\,\bar{T}^n_{kl}\big|_{x_0} + \Big(\frac{1}{2}\,\bar{T}^n_{kl,j} - \frac{2}{3}\,\bar{R}_{j(k}{}^n{}_{l)}\Big)\Big|_{x_0}\, \bar{x}^j + \mathcal{O}\big((\bar{x}^i)^2\big)\ ,$$

kde $\bar{T}^n_{kl}$ jsou složky torze v normálních souřadnicích. □

DŮKAZ:

Začneme důkazem vztahu pro *beztorzní* derivaci. Rozvoj složek konexe má obecně tvar

$$\bar{\Gamma}^n_{kl}\big|_x = \bar{\Gamma}^n_{kl}\big|_{x_0} + \bar{\Gamma}^n_{kl,j}\big|_{x_0}\, \bar{x}^j + \mathcal{O}\big((\bar{x}^i)^2\big)\ . \tag{o}$$

přičemž díky předpokladu o nulové torzi jsou všechny členy symetrické v indexech k a l. Křivka $w(\varepsilon) = \mathrm{geod}_{x_0}(\varepsilon \boldsymbol{a})$ je geodetika jdoucí z x_0 ve směru $\boldsymbol{a}$. Její souřadnice jsou $\bar{x}^j(w(\varepsilon)) = \varepsilon a^j$, kde $\boldsymbol{a} = a^j \boldsymbol{e}_j$. Tečný vektor $\frac{\boldsymbol{D}w}{d\varepsilon}(\varepsilon)$ má podél celé geodetiky konstantní souřadnice a^j. Rovnice geodetiky má tak tvar

$$a^k\, a^l\, \bar{\Gamma}^n_{kl}\big|_{w(\varepsilon)} = 0\ .$$

V bodě x_0 (tj. $\varepsilon = 0$, $\bar{x}^j = 0$) tedy máme $a^k\, a^l\, \bar{\Gamma}^n_{kl}\big|_{x_0} = 0$, přičemž vektor $\boldsymbol{a}$ zde můžeme zvolit libovolně. Jelikož jsou však složky $\bar{\Gamma}^n_{kl}\big|_{x_0}$ v k a l symetrické, dostáváme

$$\bar{\Gamma}^n_{kl}\big|_{x_0} = 0\ . \tag{i}$$

V dalším řádu v ε dostáváme podmínku $a^k\, a^l\, a^j\, \bar{\Gamma}^n_{kl,j}\big|_{x_0} = 0$ platící opět pro libovolné $\boldsymbol{a}$. Z toho plyne, že symetrická část koeficientů $\bar{\Gamma}^n_{kl,j}\big|_{x_0}$ vymizí:

$$\bar{\Gamma}^n_{(kl,j)}\big|_{x_0} = 0\ . \tag{*}$$

Část koeficientu $\bar{\Gamma}^n_{kl,j}\big|_{x_0}$ antisymetrická v posledních dvou indexech je dána Riemannovým tenzorem. Vskutku, z věty V7.27 níže užitím rovnice (i) dostaneme

$$\big(\bar{\Gamma}^n_{jl,k} - \bar{\Gamma}^n_{jk,l}\big)\big|_{x_0} = \bar{R}_{kl}{}^n{}_j\big|_{x_0} \tag{**}$$

Přímým vyjádřením symetrizace a antisymetrizace lehce nahlédneme, že pro libovolný tenzor s třemi kovariantními indexy symetrický v prvním páru indexů platí

$$\bar{\Gamma}^n_{kl,j} = \bar{\Gamma}^n_{(kl,j)} + \frac{2}{3}\Big(\bar{\Gamma}^n_{k[l,j]} + \bar{\Gamma}^n_{l[k,j]}\Big)\ .$$

Užitím (*) a (**) dostáváme koeficient dalšího řádu rozvoje (o)

$$\bar{\Gamma}^n_{kl,j}\big|_{x_0} = -\frac{1}{3}\,\Big(\bar{R}_{jk}{}^n{}_l + \bar{R}_{jl}{}^n{}_k\Big)\big|_{x_0}\ . \tag{ii}$$

Dosazením (i) a (ii) do (o) dostaneme dokazované tvrzení.

V případě kovariantní derivace s torzí definice geodetiky a konstrukce normálních souřadnic na torzi nezávisí. Stejné odvození tedy dává beztorzní symetrickou část složek kovariantní derivace. Antisymetrická část složek konexe je naopak určena právě torzí – viz lemma V7.14. Máme tedy

$$\bar{\Gamma}^n_{kl} = \bar{\Gamma}^n_{(kl)} + \frac{1}{2}\,\bar{T}^n_{kl}\ .$$

Rozvinutím v souřadnicích $\bar{x}^j$ a užitím předchozího výsledku pro symetrickou část dostaneme dokazované tvrzení. ∎

7.8 Vztah mezi kovariantní a Lieovou derivací

Pomocí kovariantní derivace můžeme vyjádřit Lieovu derivaci zavedenou v kapitole 3. Lieova derivace je definována podél vektorového pole $\boldsymbol{a}$ (definujícího jednoparametrickou grupu difeomorfismů). V případě její akce na vektorových polích je vztah k (libovolně zvolené) kovariantní derivaci $\boldsymbol{\nabla}$ založen na definici torze D7.13 a vyjádření Lieovy derivace pomocí Lieovy závorky (věta V3.7)

Lemma V7.18
Nechť $\boldsymbol{\nabla}$ je kovariantní derivace s torzí $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ jsou vektorová pole. Pak

$$\pounds_{\boldsymbol{a}} b^n = \left[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\right]^n = a^k \,\nabla_k b^n - \left(\nabla_l a^n + a^k \,T_{kl}^{\ n}\right) b^l \ . \qquad \square$$

Akci Lieovy derivace na obecné tenzorové pole pak dostaneme na základě pozorování, že rozdíl mezi $\pounds_{\boldsymbol{a}}$ a $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}$ je pseudoderivace.

Věta V7.19 (Lieova derivace pomocí kovariantní derivace)
Nechť $\boldsymbol{\nabla}$ je kovariantní derivace s torzí $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{a}$ vektorové pole. Pak $\pounds_{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}$ je pseudoderivace a můžeme psát

$$\pounds_{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} + \mathsf{L}_{\boldsymbol{a}} \ , \quad \text{kde} \quad \mathsf{L}_{\boldsymbol{a}} = \mathbf{tens}\left[-\nabla_l a^k - a^n \,T_{nl}^{\ k}\right] \ . \qquad \square$$

DŮKAZ:
Linearita vůči součtu a působení na součin tenzorů rozdílu $\mathsf{L}_{\boldsymbol{a}} = \pounds_{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}$ plyne z vlastností Lieovy a kovariantní derivace. Ultralokalita plyne z faktu, že jak Lieova, tak kovariantní derivace působí na funkce jako obyčejná derivace ve směru. Rozdíl $\mathsf{L}_{\boldsymbol{a}}$ je tak pseudoderivace a jeho působení je dáno podle věty V2.4 jeho akcí na vektorech, která je dána lemmatem V7.18. ∎

Speciálně, pro vektor $\boldsymbol{b}$, 1-formu $\boldsymbol{\omega}$ a metriku $\boldsymbol{g}$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\pounds_{\boldsymbol{a}}\, b^n &= a^k \,\nabla_k b^n - \left(\nabla_l a^n + a^k \,T_{kl}^{\ n}\right) b^l \ ,\\
\pounds_{\boldsymbol{a}}\, \omega_n &= a^k \,\nabla_k \omega_n + \left(\nabla_n a^l + a^k \,T_{kn}^{\ l}\right) \omega_l\\
\pounds_{\boldsymbol{a}}\, g_{mn} &= a^k \,\nabla_k g_{mn} + \left(\nabla_m a^l\right) g_{ln} + \left(\nabla_n a^l\right) g_{ml}\\
&\qquad + a^k \,T_{km}^{\ l}\, g_{ln} + a^k \,T_{kn}^{\ l}\, g_{ml} \ .
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Všimněme si, že ač kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}$ závisí na směru $\boldsymbol{a}$ ultralokálně, Lieova derivace $\pounds_{\boldsymbol{a}}$ již na $\boldsymbol{a}$ ultralokálně nezávisí. Rozdíl mezi $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}$ a $\pounds_{\boldsymbol{a}}$ totiž obsahuje *derivaci* $\boldsymbol{\nabla a}$, která je citlivá na chování vektorového pole $\boldsymbol{a}$ v okolí bodu, ve kterém derivace počítáme.

V kapitole 3 jsme viděli, že vztah pro Lieovu derivaci se výrazně zjednodušuje, pokud derivujeme podél souřadnicového pole – řekněme podle $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial} x^1$ systému souřadnic $\{x^j\}$. Rovnici (3.6) můžeme znovu odvodit pomocí souřadnicové kovariantní derivace $\boldsymbol{\partial}$ asociované se systémem $\{x^j\}$. Využitím věty V7.19 a vlastností $\boldsymbol{\partial}$ okamžitě dostáváme

$$\pounds_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\partial}_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \boldsymbol{A} \ , \tag{7.7}$$

případně v souřadnicích

$$\left(\pounds_{\frac{\partial}{\partial x^1}} A\right)^{m\ldots}_{n\ldots} = A^{m\ldots}_{n\ldots\,,1} \ . \tag{7.8}$$

POZNÁMKA
Připomeňme, že $\left(\pounds_{\partial/\partial x^1} A\right)^{m\ldots}_{n\ldots}$ v poslední rovnici značí souřadnice Lieovy derivace tenzoru, ne Lieovu derivaci souřadnic tenzoru – i když to v tomto případě vede ke stejnému výsledku.

7.9 Vztah mezi kovariantní a vnější derivací

V kapitole 4 o antisymetrických formách jsme se zmínili, že vnější derivace je antisymetrizací kovariantní derivace. Nyní již kovariantní derivaci máme k dispozici a můžeme toto tvrzení zformulovat přesně.

Věta V7.20 (Vnější derivace pomocí kovariantní derivace)
Nechť $\boldsymbol{\nabla}$ je libovolná kovariantní derivace bez torze, $\mathbf{Tor}[\boldsymbol{\nabla}] = 0$.
Pak vnější derivace p-formy $\boldsymbol{\omega}$ lze vyjádřit

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{\omega} \ ,$$

případně, užitím tenzorových indexů,

$$\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_0} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}_0} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p} = (p+1)\, \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}_0} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p]}$$

Formálně můžeme též psát $\mathbf{d} = \boldsymbol{\nabla} \wedge$. □

(Viz důkaz za rovnicí (7.12).) Zde jsme použili označení motivované definicí vnějšího součinu:

Definice D7.20 (Antisymetrizovaná kovariantní derivace)
Nechť $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}^p M$. Pak budeme užívat označení

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}_0} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p} = (p+1)\, \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}_0} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p]} \ . \qquad \circ$$

Konkrétně, pro 0-formu (funkci) f, 1-formu $\boldsymbol{\gamma}$ a 2-formu $\boldsymbol{\sigma}$ dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} f &= \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} f \ , \\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{b}} &= 2\boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{b}]} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{a}} \ , \\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{bc}} &= 3\boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{bc}]} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{bc}} + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{ca}} + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{ab}} \ . \end{aligned} \tag{7.9}$$

Vidíme, že antisymetrická část beztorzní kovariantní derivace p-formy nezávisí na kovariantní derivaci – je proporcionální vnější derivaci. Vnější derivaci můžeme vyjádřit pomocí libovolné kovariantní derivace. Užitečné je například zvolit souřadnicovou kovariantní derivaci $\boldsymbol{\partial}$ asociovanou se systémem $\{x^j\}$. Pro souřadnice vnější derivace $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}$ pak dostáváme

$$\mathrm{d}_{a_0} \omega_{a_1 \dots a_p} = (p+1)\, \omega_{[a_1 \dots a_p, a_0]} \ . \tag{7.10}$$

Speciálně

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_a f &= f_{,a} \ , \\ \mathrm{d}_a \gamma_b &= 2\gamma_{[b,a]} = \gamma_{b,a} - \gamma_{a,b} \ , \\ \mathrm{d}_a \sigma_{bc} &= 3\sigma_{[bc,a]} = \sigma_{bc,a} + \sigma_{ca,b} + \sigma_{ab,c} \ . \end{aligned} \tag{7.11}$$

Vztah vnější derivace ke kovariantní derivaci s torzí je složitější. K výrazům ze (7.9) přibudou navíc členy obsahující tenzor torze. Pro 1-formu a 2-formu lze vnější derivace vyjádřit následovně:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} f &= \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} f \ , \\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{b}} &= \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{ab}} \boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{n}} \ , \\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{bc}} &= \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{bc}} + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{ca}} + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{ab}} \\ &\qquad + \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{bc}} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{na}} + \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{ca}} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{nb}} + \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{ab}} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{nc}} \ . \end{aligned} \tag{7.12}$$

Obecný výraz pro formy vyššího stupně viz marginálie M7.7.

DŮKAZ:
Dokážeme si tvrzení pro 1-formu $\boldsymbol{\gamma}$, důkaz pro formy vyššího stupně je analogický. Vnější derivaci $\mathbf{d}\boldsymbol{\gamma}$ zúžíme s dvěma libovolnými vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, použijeme vztah z příkladu P4.3, a v něm nahradíme gradienty skalárů kovariantními derivacemi:

$$\boldsymbol{a}^m \boldsymbol{b}^n\, \mathbf{d}_m \boldsymbol{\gamma}_n = \boldsymbol{a}^m \boldsymbol{\nabla}_m \big(\boldsymbol{b}^n \boldsymbol{\gamma}_n\big) - \boldsymbol{b}^n \boldsymbol{\nabla}_n \big(\boldsymbol{a}^m \boldsymbol{\gamma}_m\big) - [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]^c\, \boldsymbol{\gamma}_c \ .$$

M7.7 Vztah $\mathbf{d}$ a $\boldsymbol{\nabla}$ s torzí
Pro kovariantní derivaci $\boldsymbol{\nabla}$ s nenulovou torzí $\boldsymbol{T}$ je potřeba větu V7.20 modifikovat. Ve výrazu pro vnější derivaci přibudou členy obsahující torzi:

$$\begin{aligned} &\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_0} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p} = \\ &= \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}_0} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p} + \boldsymbol{T}^{n}_{\boldsymbol{a}_0 \boldsymbol{a}_1} \wedge \boldsymbol{\omega}_{n \boldsymbol{a}_2 \dots \boldsymbol{a}_p} \\ &= (p+1)\, \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}_0} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p]} \\ &\qquad + \tbinom{p+1}{2} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{[\boldsymbol{a}_0 \boldsymbol{a}_1} \boldsymbol{\omega}_{|\boldsymbol{n}| \boldsymbol{a}_2 \dots \boldsymbol{a}_p]} \ . \end{aligned}$$

Význam 'zvýraznění' indexu $\boldsymbol{n}$ bude objasněn v příští kapitole v definici D8.1 – zde nám postačí vědět, že se jedná o ekvivalentní zápis posledního výrazu užívajícího pouze 'obyčejné' tenzorové operace. Formálně bychom mohli též psát snadněji zapamatovatelný výraz bez indexů: $\mathbf{d} = \boldsymbol{\nabla} \wedge + \boldsymbol{T} \mathbin{\dot\wedge}$.
Rozepíšeme-li antisymetrizaci explicitně (viz marginálie M4.2), dostaneme

$$\begin{aligned} &\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_0} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p} = \\ &= \sum_{0 \le k \le p} (-1)^k \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}_k} \boldsymbol{\omega}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo } \boldsymbol{a}_k}} \\ &\quad + \sum_{0 \le k < l \le p} (-1)^{k+l+1} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{a}_k \boldsymbol{a}_l} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n} \underbrace{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo } \boldsymbol{a}_k,\, \boldsymbol{a}_l}} \ . \end{aligned}$$

Speciálně, pro $p = 0, 1, 2$ dostáváme rovnici (7.12). Důkaz probíhá analogicky důkazu pro $p = 1$ uvedenému za rovnicí (7.12), pouze místo vztahu z příkladu P4.3 je potřeba použít obecný vztah z marginálie M4.5.

Užitím pravidla pro derivování součinu dostaneme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^m \boldsymbol{b}^n\, \mathbf{d}_m \gamma_n &= \boldsymbol{a}^m \boldsymbol{b}^n \boldsymbol{\nabla}_m \gamma_n - \boldsymbol{a}^n \boldsymbol{b}^m \boldsymbol{\nabla}_m \gamma_n \\ &\quad + \boldsymbol{a}^m \left(\boldsymbol{\nabla}_m \boldsymbol{b}^n\right) \gamma_n - \boldsymbol{b}^n \left(\boldsymbol{\nabla}_n \boldsymbol{a}^m\right) \gamma_n - [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]^c \gamma_c \,.\end{aligned}$$

Srovnáním s definicí torze D7.13 nalezneme

$$\boldsymbol{a}^m \boldsymbol{b}^n\, \mathbf{d}_m \gamma_n = \boldsymbol{a}^m \boldsymbol{b}^n \Big(\boldsymbol{\nabla}_m \gamma_n - \boldsymbol{\nabla}_n \gamma_m + \boldsymbol{T}^{c}_{mn}\, \gamma_c \Big) \,,$$

což je požadovaný výraz. ■

7.10 Křivost

Nyní zavedeme nejdůležitější charakteristiku kovariantní derivace – její *křivost*. Křivost kovariantní derivace charakterizuje její nekomutativitu. Charakterizuje, jak moc se příslušný paralelní přenos odlišuje od globální rovnoběžnosti.

Nejdříve definujeme Riemannův tenzor křivosti

Definice D7.21 (Riemannův tenzor křivosti)

Riemannův tenzor křivosti $\boldsymbol{R}_{ab}{}^{c}{}_{d}$ kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$ je tenzor typu $(1,3)$ splňující pro libovolná vektorová pole $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ vztah

$$\boldsymbol{R}_{kl}{}^{n}{}_{m}\, \boldsymbol{a}^k \boldsymbol{b}^l\, \boldsymbol{c}^m = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{c}^n\big) - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}}\big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{c}^n\big) - \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}\, \boldsymbol{c}^n \,.$$

Zavedeme též bilineární tenzor-značné zobrazení na tečných vektorech typu $(1,1)$

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^{n}{}_{m} = \boldsymbol{a}^k \boldsymbol{b}^l\, \boldsymbol{R}_{kl}{}^{n}{}_{m} \,,$$

které je ekvivalentní Riemannovu tenzoru.

Konečně, budeme-li chtít zdůraznit asociaci Riemannova tenzoru s kovariantní derivací, budeme psát $\boldsymbol{R} = \mathbf{Riem}[\boldsymbol{\nabla}]$. ○

Výraz na pravé straně definičního vztahu pro Riemannův tenzor obsahuje druhé kovariantní derivace a není a priori jasné, že jej lze reprezentovat tenzorově. Aby byla definice konzistentní, musí tento výraz záviset na vektorových polích ultralokálně. Vskutku platí

Lemma V7.21

Výraz

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{c}^n\big) - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}}\big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{c}^n\big) - \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}\, \boldsymbol{c}^n \,.$$

závisí na $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ ultralokálně a lineárně. □

DŮKAZ:

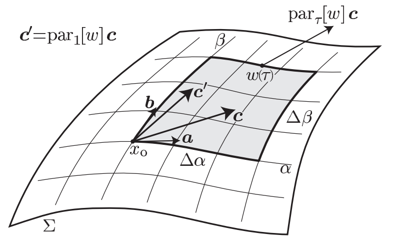
Linearita vůči sčítání plyne z linearity kovariantní derivace a Lieovy závorky. Zbývá dokázat, že výraz je též lineární vůči násobení funkcí. Začněme ultralokalitou v argumentu $\boldsymbol{a}$ (obdobně pro $\boldsymbol{b}$):

$$\begin{aligned} & f\boldsymbol{a}^k \boldsymbol{\nabla}_k\big(\boldsymbol{b}^l \boldsymbol{\nabla}_l \boldsymbol{c}^n\big) - \boldsymbol{b}^k \boldsymbol{\nabla}_k\big(f\boldsymbol{a}^l \boldsymbol{\nabla}_l \boldsymbol{c}^n\big) - [f\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]^m \boldsymbol{\nabla}_m \boldsymbol{c}^n \\ &\quad = f\boldsymbol{a}^k \boldsymbol{\nabla}_k\big(\boldsymbol{b}^l \boldsymbol{\nabla}_l \boldsymbol{c}^n\big) - f\boldsymbol{b}^k \boldsymbol{\nabla}_k\big(\boldsymbol{a}^l \boldsymbol{\nabla}_l \boldsymbol{c}^n\big) - \big(\boldsymbol{b}^k \boldsymbol{\nabla}_k f\big)\, \boldsymbol{a}^l \boldsymbol{\nabla}_l \boldsymbol{c}^n \\ &\qquad - f[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]^m \boldsymbol{\nabla}_m \boldsymbol{c}^n - \big(\boldsymbol{b}^k\, \mathbf{d}_k f\big)\, \boldsymbol{a}^m \boldsymbol{\nabla}_m \boldsymbol{c}^n \\ &\quad = f\Big(\boldsymbol{a}^k \boldsymbol{\nabla}_k\big(\boldsymbol{b}^l \boldsymbol{\nabla}_l \boldsymbol{c}^n\big) - \boldsymbol{b}^k \boldsymbol{\nabla}_k\big(\boldsymbol{a}^l \boldsymbol{\nabla}_l \boldsymbol{c}^n\big) - [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]^m \boldsymbol{\nabla}_m \boldsymbol{c}^n\Big) \,. \end{aligned}$$

Pro argument $\boldsymbol{c}$ je rozderivování součinů delší, ale s použitím definice Lieovy závorky D2.3 vede opět k ultralokalitě. ■

M7.8 Geometrický význam křivosti

Riemannův tenzor má názorný geometrický význam. Jedná se o 'plošnou hustotu netriviálnosti' paralelního přenosu podél uzavřené křivky. Přeneseme-li v křivém prostoru paralelně vektor podél uzavřené smyčky zpět do počátečního bodu, nedostaneme obecně stejný vektor. Odchylka od původního vektoru je pro malou smyčku úměrná 'ploše' smyčky s koeficientem daným právě Riemannovým tenzorem.



Konkrétně, mějme dvoudimenzionální plochu Σ parametrizovanou souřadnicemi α, β s počátkem v bodě x_o (tj. $\alpha(x_o) = \beta(x_o) = 0$). Souřadnicové vektory v bodě x_o označme $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. V této ploše zvolme podél souřadnicových čar malou 'obdélníkovou' křivku $w(\tau)$ o rozměrech $\Delta\alpha$ a $\Delta\beta$. Vektor $\boldsymbol{c}' = \mathrm{par}_1[w]\, \boldsymbol{c}$ paralelně přenesený podél této smyčky se bude obecně lišit od původního vektoru $\boldsymbol{c}$ a pro malou smyčku tato odchylka bude řádu $\Delta\alpha\Delta\beta$:

$$\mathrm{par}_1[w]\, \boldsymbol{c}^k - \boldsymbol{c}^k \approx \Delta\alpha\, \Delta\beta\, \boldsymbol{R}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^{k}{}_{l}\, \boldsymbol{c}^l \,.$$

Riemannův tenzor je zde vyčíslen v bodě x_o. Poznamenejme, že vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ v uvedeném vztahu určují pouze plochu, ve které smyčka leží, a 'jednotky', ve kterých se měří rozměry smyčky. Není důležité, aby smyčka začínala a končila ve směru těchto vektorů. Vskutku, v dodatku 7.A dokážeme obecnější verzi tvrzení: Zvolíme-li v ploše Σ libovolnou malou křivku $w_s(\tau)$ lineárního rozměru řádu $\mathcal{O}(s)$ ohraničující plošku o obsahu $S \sim \mathcal{O}(s^2)$ (měřeno v souřadnicích α, β), vektor paralelně přenesený podél w_s je dán vztahem

$$\mathrm{par}_1[w_s]\, \boldsymbol{c}^k = \boldsymbol{c}^k - S\, \boldsymbol{R}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^{k}{}_{l}\, \boldsymbol{c}^l + \mathcal{O}(s^3) \,.$$

Definice Riemannova tenzoru D7.21 se odkazuje pouze na akci kovariantní derivace na tečném bundlu, tj. pouze na vektorových polích. Nepotřebuje rozšíření derivace na celou tenzorovou algebru. My však vždy toto rozšíření předpokládáme a můžeme proto v definici D7.21 provést rozderivování součinů typu $\boldsymbol{b}^l \boldsymbol{\nabla}_l \boldsymbol{c}^n$. Užitím definice torze D7.13 okamžitě dostáváme

Lemma V7.22 (Komutátor působící na vektorové pole)
Nechť $\boldsymbol{R} = \mathbf{Riem}[\boldsymbol{\nabla}]$ a $\boldsymbol{c} \in \mathfrak{T}M$. Pak

$$\boldsymbol{\nabla}_k \boldsymbol{\nabla}_l\, \boldsymbol{c}^n - \boldsymbol{\nabla}_l \boldsymbol{\nabla}_k\, \boldsymbol{c}^n + \boldsymbol{T}^m_{kl} \boldsymbol{\nabla}_m\, \boldsymbol{c}^n = \boldsymbol{R}_{kl}{}^n{}_m\, \boldsymbol{c}^m\ . \qquad \square$$

Vidíme, že Riemannův tenzor charakterizuje nesymetrii kovariantní derivace působící na vektorová pole. Jedná se o analogii vztahu z věty V7.9 pro komutátor kovariantní derivace působící na funkce. Nabízí se samozřejmě otázka, zda komutátor kovariantní derivace působící na složitějších tenzorové veličiny vede k dalším veličinám charakterizujícím kovariantní derivace. Odpověď je záporná, komutátor libovolné tenzorové veličiny je již jednoznačně dán Riemannovým tenzorem a torzí.

Definice D7.22 (Operátor křivosti)
Komutátor kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$ ve směrech $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ (s opravou na nekomutativitu vektorových polí $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$),

$$\mathsf{R}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}\ ,$$

působící na obecné tenzorové pole, nazýváme *operátor křivosti*.
Stejně jako při působení na vektorová pole (definice D7.21, lemma V7.21) můžeme závislost na vektorech $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ reprezentovat tenzorově. K tomu účelu zavedeme tenzor-značný (typu $(0,2)$) operátor křivosti R_{kl}:

$$\mathsf{R}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^k \boldsymbol{b}^l\, \mathsf{R}_{kl}\ . \qquad \circ$$

Poznámka
Zdůrazněme, že oba operátory křivosti jsou vskutku *operátory*, působící doprava na tenzorové algebře – např.

$$\begin{aligned}\mathsf{R}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{A}^{m\cdots}_{n\cdots} &= \boldsymbol{a}^k \boldsymbol{b}^l\, \mathsf{R}_{kl}\, \boldsymbol{A}^{m\cdots}_{n\cdots}\\ &= \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{A}^{m\cdots}_{n\cdots}) - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{A}^{m\cdots}_{n\cdots}) - \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}\, \boldsymbol{A}^{m\cdots}_{n\cdots}\ .\end{aligned}$$

Analogicky lemmatu V7.22 můžeme operátor křivosti napsat explicitně.

Věta V7.23 (Antisymetrická část druhé kovariantní derivace)
Operátor křivosti R_{kl} kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$ lze vyjádřit

$$\mathsf{R}_{kl} = \boldsymbol{\nabla}_k \boldsymbol{\nabla}_l - \boldsymbol{\nabla}_l \boldsymbol{\nabla}_k + \boldsymbol{T}^n_{kl} \boldsymbol{\nabla}_n\ . \qquad \square$$

Věta V7.24 (Působení operátoru křivosti)
Operátor křivosti $\mathsf{R}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ derivace $\boldsymbol{\nabla}$ je pseudoderivace typu $(0,0)$ charakterizovaná tenzorem $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Respektive, operátor křivosti R_{kl} je pseudoderivace typu $(0,2)$ charakterizovaná přímo Riemannovým tenzorem $\boldsymbol{R}$:

$$\begin{aligned}\mathsf{R}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &= \mathbf{tens}[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^n{}_m]\ ,\\ \mathsf{R}_{kl} &= \mathbf{tens}[\boldsymbol{R}_{kl}{}^n{}_m]\ . \qquad \square\end{aligned}$$

DŮKAZ:
Musíme ověřit vlastnosti pseudoderivace z definice D2.4. Linearita komutátoru plyne z linearity kovariantní derivace. Podobně je zaručena komutativita s kontrakcí. Anihilace funkce (ultralokalita) plyne z věty V7.9. Zbývá ověřit, že platí pravidlo pro derivování součinu. Opakovaným použitím Leibnizova pravidla zjistíme, že členy s prvními derivacemi polí $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ se navzájem vyruší a dostaneme

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nabla}_a\boldsymbol{\nabla}_b\big(\boldsymbol{A}^{k\dots}_{l\dots}\boldsymbol{B}^{m\dots}_{n\dots}\big) - \boldsymbol{\nabla}_b\boldsymbol{\nabla}_a\big(\boldsymbol{A}^{k\dots}_{l\dots}\boldsymbol{B}^{m\dots}_{n\dots}\big) + \boldsymbol{T}^{\,c}_{ab}\boldsymbol{\nabla}_c\big(\boldsymbol{A}^{k\dots}_{l\dots}\boldsymbol{B}^{m\dots}_{n\dots}\big)\\
&\quad= \boldsymbol{A}^{k\dots}_{l\dots}\big(\boldsymbol{\nabla}_a\boldsymbol{\nabla}_b\boldsymbol{B}^{m\dots}_{n\dots} - \boldsymbol{\nabla}_b\boldsymbol{\nabla}_a\boldsymbol{B}^{m\dots}_{n\dots} + \boldsymbol{T}^{\,c}_{ab}\boldsymbol{\nabla}_c\boldsymbol{B}^{m\dots}_{n\dots}\big)\\
&\qquad+ \big(\boldsymbol{\nabla}_a\boldsymbol{\nabla}_b\boldsymbol{A}^{k\dots}_{l\dots} - \boldsymbol{\nabla}_b\boldsymbol{\nabla}_a\boldsymbol{A}^{k\dots}_{l\dots} + \boldsymbol{T}^{\,c}_{ab}\boldsymbol{\nabla}_c\boldsymbol{A}^{k\dots}_{l\dots}\big)\boldsymbol{B}^{m\dots}_{n\dots}\;.
\end{aligned}$$

Tím jsme ověřili, že komutátor (s opravou na torzi) je pseudoderivací a je tedy dán svojí akcí na vektorových polích. Ta je však podle definice D7.21, případně lemmatu V7.22, dána Riemannovým tenzorem. ∎

Pro vektorová pole, 1-formy, oprátory a tenzory typu $(0,2)$ tak pro $\mathbf{R}_{kl}$ explicitně dostáváme

$$\begin{aligned}
&\mathbf{R}_{kl}\,\boldsymbol{c}^n = \boldsymbol{R}_{kl}{}^n{}_m\,\boldsymbol{c}^m\;,\\
&\mathbf{R}_{kl}\,\boldsymbol{\omega}_n = -\boldsymbol{R}_{kl}{}^m{}_n\,\boldsymbol{\omega}_m\;,\\
&\mathbf{R}_{kl}\,\boldsymbol{A}^a{}_b = \boldsymbol{R}_{kl}{}^a{}_n\boldsymbol{A}^n{}_b - \boldsymbol{R}_{kl}{}^n{}_b\boldsymbol{A}^a{}_n\;,\\
&\mathbf{R}_{kl}\,\boldsymbol{g}_{ab} = -\boldsymbol{R}_{kl}{}^n{}_a\,\boldsymbol{g}_{nb} - \boldsymbol{R}_{kl}{}^n{}_b\,\boldsymbol{g}_{an}\,.
\end{aligned}\tag{7.13}$$

Souřadnicové a n-ádové kovariantní derivace jsou z hlediska křivosti triviální. Platí

Lemma V7.25 (Křivost souřadnicové a n-ádové derivace)
Nechť $\boldsymbol{\partial}$ je souřadnicová kovariantní derivace asociovaná se souřadným systémem $\{x^\mu\}$ a $\boldsymbol{\eth}$ n-ádovaná kovariantní souřadnice n-ády $\{\boldsymbol{e}_j\}$. Pak

$$\mathbf{Riem}[\boldsymbol{\partial}] = 0\;,\qquad \mathbf{Riem}[\boldsymbol{\eth}] = 0\;.$$ □

DŮKAZ:
Operátor křivosti derivace $\boldsymbol{\eth}$ působící na vektorové pole $\boldsymbol{a}$ dává $\mathbf{R}\,\boldsymbol{a} = a^n\,\mathbf{R}\,\boldsymbol{e}_n$. Ovšem $\boldsymbol{\eth}\boldsymbol{e}_j = 0$, tedy i $\mathbf{R}\,\boldsymbol{e}_j = 0$ a tedy $\mathbf{R}\,\boldsymbol{a} = 0$. Z věty V7.24 pak dostáváme $\mathbf{Riem}[\boldsymbol{\eth}] = 0$. $\boldsymbol{\partial}$ je speciální případ n-ádové derivace. ∎

Ani definice Riemannova tenzoru křivosti D7.21, ani věta V7.24 o komutátoru kovariantní derivace nedávají explicitní předpis pro výpočet Riemannova tenzoru. Jak jsme diskutovali v předchozím textu, kovariantní derivaci typicky zadáváme pomocí jejích složek vůči nějakému souřadnému systému (viz definice D7.12). Rádi bychom vyjádřili Riemannův tenzor pomocí těchto složek. Složky kovariantní derivace jsme zavedli jako souřadnice rozdílového tenzoru mezi $\boldsymbol{\nabla}$ a souřadnicovou derivací $\boldsymbol{\partial}$. Proto bude užitečné začít obecným vztahem mezi Riemannovými tenzory dvou kovariantních derivací.

Věta V7.26 (Vztah Riemannových tenzorů)
Nechť $\boldsymbol{\nabla}$ a $\tilde{\boldsymbol{\nabla}}$ jsou dvě kovariantní derivace (s torzí $\boldsymbol{T}$, respektive $\tilde{\boldsymbol{T}}$) lišící se rozdílovým tenzorem $\boldsymbol{\Gamma}$ (tj. $\tilde{\boldsymbol{\nabla}} - \boldsymbol{\nabla} = \mathbf{tens}[\boldsymbol{\Gamma}]$). Pak pro příslušné Riemannovy tenzory $\boldsymbol{R}$ a $\tilde{\boldsymbol{R}}$ platí

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{R}}_{ab}{}^k{}_l &= \boldsymbol{R}_{ab}{}^k{}_l + \boldsymbol{\nabla}_a\boldsymbol{\Gamma}^k_{bl} - \boldsymbol{\nabla}_b\boldsymbol{\Gamma}^k_{al}\\
&\quad + \boldsymbol{T}^n_{ab}\,\boldsymbol{\Gamma}^k_{nl} + \boldsymbol{\Gamma}^k_{an}\,\boldsymbol{\Gamma}^n_{bl} - \boldsymbol{\Gamma}^k_{bn}\,\boldsymbol{\Gamma}^n_{al}\;.
\end{aligned}$$ □

DŮKAZ:
Pomocí lemmatu V7.22 zapíšeme výraz $\tilde{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{ab}}{}^{\boldsymbol{k}}{}_{\boldsymbol{l}}\,\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{l}}$. Derivaci $\tilde{\boldsymbol{\nabla}}$ pak nahradíme derivací $\boldsymbol{\nabla}$ pomocí věty V7.12 a torzi pomocí věty V7.5. Použitím pravidla pro derivování součinu a přímočarými úpravami se vyruší členy obsahující $\boldsymbol{\nabla c}$ a zbydou členy z pravé strany věty V7.26, vynásobené vektorem $\boldsymbol{c}$. ■

Zvolíme-li za jednu z derivací souřadnicovou kovariantní derivaci asociovanou se systémem $\{x^j\}$, rozdílový tenzor dává složky druhé kovariantní derivace. Uvážíme-li navíc, že $\mathbf{Riem}[\boldsymbol{\partial}] = 0$ a $\mathbf{Tor}[\boldsymbol{\partial}] = 0$, dostaneme hledaný předpis pro složky Riemannova tenzoru

Lemma V7.27 (Složky Riemannova tenzoru)
Komponenty Riemannova tenzoru $\boldsymbol{R}$ kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$ s torzí $\boldsymbol{T}$ vzhledem k souřadnému systému $\{x^j\}$ vyjádřené pomocí složek kovariantní derivace Γ^k_{ab} jsou:

$$R_{ab}{}^k{}_l = \Gamma^k_{bl,a} - \Gamma^k_{al,b} + \Gamma^k_{an}\,\Gamma^n_{bl} - \Gamma^k_{bn}\,\Gamma^n_{al}\ .$$

Alternativně, můžeme zapsat Riemannův tenzor pomocí rozdílového tenzoru $\boldsymbol{\Gamma}$

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{ab}}{}^{\boldsymbol{k}}{}_{\boldsymbol{l}} = 2\left(\boldsymbol{\partial}_{[\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{b}]\boldsymbol{l}} + \boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{k}}_{[\boldsymbol{a}|\boldsymbol{n}|}\,\boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{b}]\boldsymbol{l}}\right)\ .$$ □

POZNÁMKA
Zdůrazněme, že tento výraz pro Riemannův tenzor platí i pro kovariantní derivace s nenulovou torzí. To se projeví v tom, že složky Γ^k_{ab} budou obecně nesymetrické v dolních dvou indexech.

POZNÁMKA
Výraz pro Riemanův tenzor má jednoduchý tvar v řeči tzv. *vnější kovariantní derivace*, kterou zavedeme v příští kapitole – viz věta V8.3.

7.11 Vlastnosti tenzoru křivosti

Z definice Riemannova tenzoru je zřejmé, že je antisymetrický v prvních dvou indexech

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{ab}}{}^{\boldsymbol{k}}{}_{\boldsymbol{l}} = -\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{ba}}{}^{\boldsymbol{k}}{}_{\boldsymbol{l}}\ . \tag{7.14}$$

Riemannův tenzor má však další symetrie, a to zejména v případě beztorzní kovariantní derivace.

Nejdůležitější jsou tzv. Bianchiho identity. První z nich se týká antisymetrické části Riemannova tenzoru $\boldsymbol{R}$, druhá antisymetrické části derivace $\boldsymbol{\nabla R}$.

Věta V7.28 (Bianchiho identity)
Nechť $\boldsymbol{\nabla}$ je kovariantní derivace s tenzorem křivosti $\boldsymbol{R}$ a torzí $\boldsymbol{T}$. Pak

$$\boldsymbol{R}_{[\boldsymbol{ab}}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{c}]} = \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}}\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{bc}]} - \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}}_{[\boldsymbol{ab}}\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{c}]\boldsymbol{k}}\ , \tag{Bianchi 1}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}}\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{bc}]}{}^{\boldsymbol{k}}{}_{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{[\boldsymbol{ab}}\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{c}]\boldsymbol{n}}{}^{\boldsymbol{k}}{}_{\boldsymbol{l}}\ . \tag{Bianchi 2}$$

Konkrétně, pro kovariantní derivaci bez torze, $\boldsymbol{T} = 0$, dostáváme

$$\boldsymbol{R}_{[\boldsymbol{ab}}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{c}]} = 0\ , \tag{Bianchi 1}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}}\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{bc}]}{}^{\boldsymbol{k}}{}_{\boldsymbol{l}} = 0\ , \tag{Bianchi 2}$$

tj., Riemanův tenzor a jeho derivace jsou v dolních třech indexech antisymetrické. □

Důkaz: (První Binachiho identita)
Máme dokázat

$$\boldsymbol{R}_{[ab}{}^{n}{}_{c]} = \boldsymbol{\nabla}_{[a}\boldsymbol{T}^{n}_{bc]} - \boldsymbol{T}^{k}_{[ab}\boldsymbol{T}^{n}_{c]k}\ .$$

Začneme antisymetrizací akce operátoru křivosti na 1-formu $\boldsymbol{\omega}$. Podle (7.13) máme

$$-\mathsf{R}_{[ab}\boldsymbol{\omega}_{c]} = \boldsymbol{R}_{[ab}{}^{n}{}_{c]}\,\boldsymbol{\omega}_{n}\ .$$

Podle věty V7.23 však platí

$$\begin{aligned}
-\,\mathsf{R}_{[ab}\boldsymbol{\omega}_{c]} &= -\boldsymbol{\nabla}_{[a}\boldsymbol{\nabla}_{b}\,\boldsymbol{\omega}_{c]} + \boldsymbol{\nabla}_{[b}\boldsymbol{\nabla}_{a}\,\boldsymbol{\omega}_{c]} - \boldsymbol{T}^{m}_{[ab}\boldsymbol{\nabla}_{|m|}\,\boldsymbol{\omega}_{c]}\\
&= -\frac{1}{3}\Big(\boldsymbol{\nabla}_{a}\big(\boldsymbol{\nabla}_{b}\,\boldsymbol{\omega}_{c} - \boldsymbol{\nabla}_{c}\,\boldsymbol{\omega}_{b}\big) + \boldsymbol{T}^{m}_{bc}\boldsymbol{\nabla}_{m}\,\boldsymbol{\omega}_{a}\\
&\qquad\qquad + \text{cyklické záměny indexů } a,\ b,\ c\Big)\\
&= -\frac{1}{3}\Big(\boldsymbol{\nabla}_{a}\big(\mathbf{d}_{b}\,\boldsymbol{\omega}_{c}\big) - \big(\boldsymbol{\nabla}_{a}\boldsymbol{T}^{n}_{bc}\big)\,\boldsymbol{\omega}_{n} - \boldsymbol{T}^{m}_{bc}\boldsymbol{\nabla}_{a}\,\boldsymbol{\omega}_{m} + \boldsymbol{T}^{m}_{bc}\boldsymbol{\nabla}_{m}\,\boldsymbol{\omega}_{a}\\
&\qquad\qquad + \text{cyklické záměny indexů } a,\ b,\ c\Big)\\
&= -\frac{1}{3}\Big(\boldsymbol{\nabla}_{a}\big(\mathbf{d}_{b}\,\boldsymbol{\omega}_{c}\big) - \big(\boldsymbol{\nabla}_{a}\boldsymbol{T}^{n}_{bc}\big)\,\boldsymbol{\omega}_{n} - \boldsymbol{T}^{n}_{bc}\,\mathbf{d}_{a}\boldsymbol{\omega}_{n} + \boldsymbol{T}^{m}_{bc}\,\boldsymbol{T}^{n}_{am}\,\boldsymbol{\omega}_{n}\\
&\qquad\qquad + \text{cyklické záměny indexů } a,\ b,\ c\Big)\\
&= -\Big(\boldsymbol{\nabla}_{[a}\big(\mathbf{d}_{b}\,\boldsymbol{\omega}_{c]}\big) + \boldsymbol{T}^{n}_{[bc}\,\mathbf{d}_{|n|}\boldsymbol{\omega}_{a]}\Big)\\
&\qquad\qquad + \big(\boldsymbol{\nabla}_{[a}\boldsymbol{T}^{n}_{bc]}\big)\,\boldsymbol{\omega}_{n} - \boldsymbol{T}^{m}_{[bc}\,\boldsymbol{T}^{n}_{a]m}\,\boldsymbol{\omega}_{n}\\
&= -\,\mathbf{d}_{a}\mathbf{d}_{b}\boldsymbol{\omega}_{c} + \big(\boldsymbol{\nabla}_{[a}\boldsymbol{T}^{n}_{bc]} - \boldsymbol{T}^{m}_{[ab}\,\boldsymbol{T}^{n}_{c]m}\big)\,\boldsymbol{\omega}_{n}\ .
\end{aligned}$$

Zde jsme opakovaně použili vztahy (7.12). Uvážíme-li, že $\mathbf{d}\,\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = 0$ a že forma $\boldsymbol{\omega}$ byla zvolena libovolně, je první Binachiho identita dokázána. ∎

Důkaz: (Druhá Binachiho identita)
Chceme dokázat

$$\boldsymbol{\nabla}_{[a}\boldsymbol{R}_{bc]}{}^{k}{}_{l} = \boldsymbol{T}^{n}_{[ab}\boldsymbol{R}_{c]n}{}^{k}{}_{l}\ .$$

Užitím pravidla pro derivování součinu a vyjádření operátoru křivosti pomocí Riemannova tenzoru (7.13) dostáváme

$$\begin{aligned}
&\big(\boldsymbol{\nabla}_{a}\boldsymbol{R}_{bc}{}^{m}{}_{n}\big)\,\boldsymbol{a}^{n}\\
&\quad= \boldsymbol{\nabla}_{a}\big(\boldsymbol{R}_{bc}{}^{m}{}_{n}\,\boldsymbol{a}^{n}\big) - \boldsymbol{R}_{bc}{}^{m}{}_{n}\,\boldsymbol{\nabla}_{a}\boldsymbol{a}^{n}\\
&\quad= \boldsymbol{\nabla}_{a}\big(\mathsf{R}_{bc}\,\boldsymbol{a}^{m}\big) - \mathsf{R}_{bc}\,\boldsymbol{\nabla}_{a}\boldsymbol{a}^{m} - \boldsymbol{R}_{bc}{}^{n}{}_{a}\,\boldsymbol{\nabla}_{n}\boldsymbol{a}^{m}
\end{aligned}$$

Rozepíšeme-li nyní operátor křivosti podle věty V7.23, obdržíme

$$\begin{aligned}
&\big(\boldsymbol{\nabla}_{a}\boldsymbol{R}_{bc}{}^{m}{}_{n}\big)\,\boldsymbol{a}^{n}\\
&\quad= \boldsymbol{\nabla}_{a}\boldsymbol{\nabla}_{b}\boldsymbol{\nabla}_{c}\,\boldsymbol{a}^{m} - \boldsymbol{\nabla}_{a}\boldsymbol{\nabla}_{c}\boldsymbol{\nabla}_{b}\,\boldsymbol{a}^{m} + \boldsymbol{\nabla}_{a}\big(\boldsymbol{T}^{n}_{bc}\boldsymbol{\nabla}_{n}\,\boldsymbol{a}^{m}\big)\\
&\qquad - \boldsymbol{\nabla}_{b}\boldsymbol{\nabla}_{c}\boldsymbol{\nabla}_{a}\,\boldsymbol{a}^{m} + \boldsymbol{\nabla}_{c}\boldsymbol{\nabla}_{b}\boldsymbol{\nabla}_{a}\,\boldsymbol{a}^{m} - \boldsymbol{T}^{n}_{bc}\boldsymbol{\nabla}_{n}\boldsymbol{\nabla}_{a}\,\boldsymbol{a}^{m}\\
&\qquad - \boldsymbol{R}_{bc}{}^{n}{}_{a}\,\boldsymbol{\nabla}_{n}\boldsymbol{a}^{m}
\end{aligned}$$

Pokud tento výraz antisymetrizujeme v indexech a, b, c, členy $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{a}$ se vyruší. Dále užitím první Bianchiho identity eliminujeme člen s derivací torze a dostaneme:

$$\begin{aligned}
&\big(\boldsymbol{\nabla}_{[a}\boldsymbol{R}_{bc]}{}^{m}{}_{n}\big)\,\boldsymbol{a}^{n}\\
&\quad= \big(\boldsymbol{\nabla}_{[a}\boldsymbol{T}^{n}_{bc]}\big)\,\boldsymbol{\nabla}_{n}\,\boldsymbol{a}^{m} - \boldsymbol{R}_{[ab}{}^{n}{}_{c]}\,\boldsymbol{\nabla}_{n}\boldsymbol{a}^{m}\\
&\qquad\qquad + \boldsymbol{T}^{n}_{[ab}\boldsymbol{\nabla}_{c]}\boldsymbol{\nabla}_{n}\,\boldsymbol{a}^{m} - \boldsymbol{T}^{n}_{[ab}\boldsymbol{\nabla}_{|n|}\boldsymbol{\nabla}_{c]}\,\boldsymbol{a}^{m}\\
&\quad= \boldsymbol{T}^{n}_{[ab}\boldsymbol{\nabla}_{c]}\boldsymbol{\nabla}_{n}\,\boldsymbol{a}^{m} - \boldsymbol{T}^{n}_{[ab}\boldsymbol{\nabla}_{|n|}\boldsymbol{\nabla}_{c]}\,\boldsymbol{a}^{m} + \boldsymbol{T}^{n}_{[ab}\,\boldsymbol{T}^{k}_{c]n}\boldsymbol{\nabla}_{k}\,\boldsymbol{a}^{m}
\end{aligned}$$

Zpětným vyjádřením operátoru křivosti pomocí Riemannova tenzoru (např. Lemma V7.22) dostaneme dokazované tvrzení

$$\big(\boldsymbol{\nabla}_{[a}\boldsymbol{R}_{bc]}{}^{m}{}_{n}\big)\,\boldsymbol{a}^{n} = \boldsymbol{T}^{n}_{[ab}\,\boldsymbol{R}_{c]n}{}^{m}{}_{n}\,\boldsymbol{a}^{n}$$ ∎

Poznámka
Obě Bianchiho identity odpovídají v podstatě triviálním tvrzením (viz věta V8.4) zapsaným v řeči vnější kovariantní derivace, kterou zavedeme v příští kapitole. Zde se k Bianchiho identitám znovu vrátíme a za pomoci bohatšího aparátu je dokážeme mnohem rychleji.

V některých aplikacích hrají roli ty části Riemannova tenzoru, které lze dostat jeho zúžením. Jelikož se jedná o tenzor typu $(1,3)$, můžeme provést tři různá zúžení, díky antisymetrii (7.14) ale pouze dvě z nich jsou nezávislá. Definujeme

Definice D7.23 (Ricciho tenzor a stopa Riemannova tenzoru)
Nechť $\boldsymbol{R}_{ab}{}^{k}{}_{l}$ je Riemannův tenzor kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$. Pak *Ricciho tenzor křivosti* nazýváme tenzor **Ric** typu $(0,2)$

$$\mathbf{Ric}_{\boldsymbol{ab}} = \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{na}}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{b}} \,,$$

a budeme psát $\mathbf{Ric} = \mathbf{Ricci}[\boldsymbol{\nabla}]$.
Pod *stopou Riemannova tenzoru* budeme rozumět antisymetrický tenzor **TrR** typu $(0,2)$

$$\mathbf{TrR}_{\boldsymbol{ab}} = \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{ab}}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{n}} \,. \qquad \circ$$

Poznámka
Tenzor **TrR** je typicky nulový a proto se v literatuře obvykle nedefinuje. My se k otázce nulovosti stopy Riemannova tenzoru vrátíme v kontextu derivací zachovávajících objemový element – viz větu V10.12 a marginálii M10.3 v kapitole 10.

Nyní můžeme zformulovat důsledky Bianchiho identit pro zúžení Riemanova tenzoru

Věta V7.29 (Zúžené Bianchiho identity)
Pro kovariantní derivaci $\boldsymbol{\nabla}$ s Ricciho tenzorem **Ric**, stopou Riemanova tenzoru **TrR** a torzí $\boldsymbol{T}$ platí

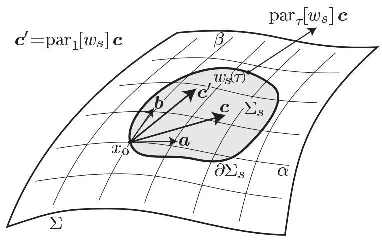
$$\begin{aligned} &2\mathbf{Ric}_{[\boldsymbol{ab}]} + \mathbf{TrR}_{\boldsymbol{ab}} = \mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{bn}} + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{ab}} \,, \\ &\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \mathbf{TrR}_{\boldsymbol{bc}} = 0 \,, \quad \text{tj.} \quad \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}} \mathbf{TrR}_{\boldsymbol{bc}]} - \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{[\boldsymbol{ab}} \mathbf{TrR}_{\boldsymbol{c}]\boldsymbol{n}} = 0 \,. \end{aligned}$$

Pro kovariantní derivaci bez torze dostáváme

$$\begin{aligned} &2\mathbf{Ric}_{[\boldsymbol{ab}]} = -\mathbf{TrR}_{\boldsymbol{ab}} \,, \\ &\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \mathbf{TrR}_{\boldsymbol{bc}} = 0 \,, \quad \text{tj.} \quad \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}} \mathbf{TrR}_{\boldsymbol{bc}]} = 0 \,. \end{aligned} \qquad \square$$

Vidíme tedy, že stopa Riemannova tenzoru je uzavřená a lze ji alespoň lokálně napsat jako gradient nějaké 1-formy. V kapitole 10 si explicitně tuto 1-formu zkonstruujeme, viz věty V10.12 a V10.11. Ukáže se, že pokud příslušná kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$ zachovává nějaký objemový element, bude tato 1-forma uzavřená a **TrR** vymizí – viz marginálii M10.3. Je-li $\boldsymbol{\nabla}$ navíc bez torze, vidíme že Ricciho tenzor je pak symetrický.

7.A Geometrický význam křivosti



V marginálii M7.8 jsem uvedli, že odchylka vektoru paralelně přeneseného podél malé smyčky od původního vektoru je úměrná ploše smyčky s koeficientem daným Riemannovým tenzorem. V tomto dodatku toto tvrzení upřesníme a dokážeme.

Stejně jako v marginálii M7.8 zvolíme dvoudimenzionální plochu Σ parametrizovanou souřadnicemi α, β s počátkem v bodě x_o (tj. $\alpha(x_o) = \beta(x_o) = 0$). Označíme $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial}\alpha|_{x_o}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial}\beta|_{x_o}$. Nyní v této ploše chceme zvolit křivku 'lineárního rozměru řádu $\mathcal{O}(s)$'. Konkrétně, zvolíme sekvenci (očíslovanou parametrem s) křivek $w_s(\tau)$ s křivkovým parametrem $\tau \in \langle 0, 1\rangle$, které všechny začínají a končí v bodě x_o (tj. $w_s(0) = w_s(1) = x_o$). Tyto smyčky nazveme ***řádu*** $\mathcal{O}(s)$, pokud pro $s \to 0$ platí

$$\alpha(w_s) \sim \beta(w_s) \sim \mathcal{O}(s)\ , \quad \frac{d}{d\tau}\alpha(w_s) \sim \frac{d}{d\tau}\beta(w_s) \sim \mathcal{O}(s)\ . \tag{7.15}$$

Potom vektor $\boldsymbol{c}$ paralelně přenesený podél smyčky $w_s(\tau)$ z bodu x_o zpět do x_o je do řádu s^2 dán vztahem

$$\mathrm{par}_1[w_s]\, \boldsymbol{c^k} = \boldsymbol{c^k} - S\, \boldsymbol{R}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{k}}{}_{\boldsymbol{l}}\, \boldsymbol{c^l} + \mathcal{O}(s^3)\ . \tag{7.16}$$

Zde je Riemannův tenzor vyčíslen v bodě x_o a S je obsah plošky $\Sigma_s \subset \Sigma$ ohraničené smyčkou w_s měřený v souřadnicích α, β:

$$S = \int_{\Sigma_s} d\alpha\, d\beta \ \sim\ \mathcal{O}(s^2)\ . \tag{7.17}$$

Pro 'obdélníkovou' křivku podél souřadnicových čar o rozměrech $\Delta\alpha$ a $\Delta\beta$ použitou v marginálii M7.8 samozřejmě dostaneme $S = \Delta\alpha\, \Delta\beta$.

Důkaz:
V okolí bodu x_o zvolíme souřadnice x^j přizpůsobené ploše Σ:

$$x^1 = \alpha\ , \quad x^2 = \beta\ , \quad x^j(\Sigma) = 0 \quad \text{pro } j = 3, 4, \dots \quad . \tag{7.18}$$

Souřadnice křivky $w_s(\tau)$ označíme $w_s^j(\tau)$ a souřadnice jejího tečného vektoru $\dot w_s^j(\tau)$. Zřejmě pouze komponenty $j = 1, 2$ jsou nenulové, a předpoklad, že křivka je řádu $\mathcal{O}(s)$, říká, že $w_s^j \sim \dot w_s^j \sim \mathcal{O}(s)$.

Pro zkrácení zápisu si operátor paralelního přenosu podél křivky w_s z bodu x_o do bodu $w_s(\tau)$ označíme $\boldsymbol{\Pi}_s(\tau)$:

$$\boldsymbol{\Pi}_s(\tau) = \mathrm{par}_\tau[w_s]\ . \tag{7.19}$$

Jedná se bi-tenzor – objekt z prostoru $\boldsymbol{T}^*_{x_o} M \otimes \boldsymbol{T}_{w_s(\tau)} M$. Vzhledem k souřadnému systému x^j bude reprezentován souřadnicemi $\Pi_s{}^k_l$ (pokud to nebude potřeba, nebudeme závislost na parametru τ explicitně psát). Počáteční podmínka dává $\boldsymbol{\Pi}_s(0) = \boldsymbol{\delta}$ a nás zejména zajímá koncová hodnota $\boldsymbol{\Pi}_s(1)$ odpovídající přenosu podél celé smyčky.

Podmínka paralelního přenosu říká $\frac{\boldsymbol{\nabla}}{d\tau}\boldsymbol{\Pi}_s = 0$. Pokud je kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$ vzhledem k systému x^j dána komponentami Γ^k_{jl}, dostáváme

$$\frac{d}{d\tau}\Pi_s{}^k_l + \dot w_s^n\, \Gamma^k_{nj}\big|_{w_s}\, \Pi_s{}^j_l = 0\ . \tag{7.20}$$

(Kovariantní derivování se zde týká pouze indexu k příslušejícímu vektoru v bodě $w_s(\tau)$. Index l odpovídá kovektoru v bodě x_o, který zůstává při derivování fixní.)

Nyní rozvineme složky kovariantní derivace v blízkosti bodu x_o

$$\Gamma^n_{kl} = \Gamma^n_{kl}\big|_{x_o} + \Gamma^n_{kl,j}\big|_{x_o} x^j + \mathcal{O}((x^j)^2) \; . \tag{7.21}$$

Druhý člen v rovnici (7.20) je řádu $\mathcal{O}(s)$ a proto bude výhodné hledat řešení ${\Pi_s}^k_l$ jako rozvoj v parametru s:

$$ {\Pi_s}^k_l = {\Pi_{(0)}}^k_l + s\,{\Pi_{(1)}}^k_l + s^2\,{\Pi_{(2)}}^k_l + \mathcal{O}(s^3) \; . \tag{7.22}$$

Dosazením (7.21) a (7.22) do (7.20) v řádu $\mathcal{O}(s^0)$ obdržíme

$$\frac{d}{d\tau}{\Pi_{(0)}}^k_l = 0 \quad \Rightarrow \quad {\Pi_{(0)}}^k_l = \delta^k_l \; , \tag{7.23}$$

kde jsme uvážili počáteční podmínky ${\Pi_s}^k_l(0) = \delta^k_l$. Po dosazení zpět do (7.20) v řádu $\mathcal{O}(s)$ dostaneme

$$s\,\frac{d}{d\tau}{\Pi_{(1)}}^k_l = -\dot{w}^n_s\,\Gamma^k_{nl}\big|_{x_o} \quad \Rightarrow \quad s\,{\Pi_{(1)}}^k_l = -w^n_s\,\Gamma^k_{nl}\big|_{x_o} \; , \tag{7.24}$$

kde jsme užili triviálnost počátečních podmínek ve vyšších řádech, ${\Pi_{(j)}}^k_l(0) = 0$, $j = 1, 2, \ldots$. V dalším řádu rovnice (7.20) dává

$$s^2\,\frac{d}{d\tau}{\Pi_{(2)}}^k_l = -\dot{w}^m_s\,w^n_s\left(\Gamma^k_{ml,n}\big|_{x_o} - \Gamma^k_{mi}\big|_{x_o}\Gamma^i_{nl}\big|_{x_o}\right) . \tag{7.25}$$

Integrace podél celé smyčky vede na křivkový integrál, pro který lze použít vícedimenzionální analogii Stokesovy věty (viz větu V10.15 v kapitole 10):

$$\begin{aligned} s^2\,{\Pi_{(2)}}^k_l\big|_{\tau=1} &= -\int_0^1 \dot{w}^m_s w^n_s \big(\Gamma^k_{ml,n} - \Gamma^k_{mi}\Gamma^i_{nl}\big)\big|_{x_o}\,d\tau \\ &= -\big(\Gamma^k_{ml,n} - \Gamma^k_{mi}\Gamma^i_{nl}\big)\big|_{x_o}\int_{\partial\Sigma_s} x^n\;\mathbf{d}x^m\big|_{\partial\Sigma_s} \\ &= -\big(\Gamma^k_{[m|l|,n]} + \Gamma^k_{[n|i|}\Gamma^i_{m]l}\big)\big|_{x_o}\int_{\Sigma_s}\mathbf{d}x^n\wedge\mathbf{d}x^m\big|_{\Sigma_s} \end{aligned} \tag{7.26}$$

Podle lemmatu V7.27 je však výraz před integrálem dán složkami Riemannova tenzoru $-\frac{1}{2}{R_{nm}}^k{}_l$. Podintegrální výraz $\mathbf{d}x^n \wedge \mathbf{d}x^m\big|_{\Sigma_s}$ (případně $\mathbf{d}x^n\big|_{\partial\Sigma_s}$ v křivkovém integrálu) je restrikce 2-formy $\mathbf{d}x^n \wedge \mathbf{d}x^m$ na plochu Σ_s (respektive 1-formy $\mathbf{d}x^n$ na křivku $\partial\Sigma_s$). Restrikci 2-formy lze provést pomocí projektoru

$$\mathcal{A}\Big(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\alpha}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\beta}\Big)\;\mathbf{d}\alpha\wedge\mathbf{d}\beta \; , \tag{7.27}$$

přičemž v blízkosti x_o můžeme v nejvyšším řádu aproximovat $\frac{\boldsymbol{\partial}^n}{\boldsymbol{\partial}\alpha} \approx a^n$ a $\frac{\boldsymbol{\partial}^m}{\boldsymbol{\partial}\beta} \approx b^m$. Tzn.

$$\mathbf{d}x^n \wedge \mathbf{d}x^m\big|_{\Sigma_s} \approx 2a^{[n}b^{m]}\,\mathbf{d}\alpha\wedge\mathbf{d}\beta \; . \tag{7.28}$$

Dostáváme tak

$$s^2\,{\Pi_{(2)}}^k_l\big|_{\tau=1} = -{R_{nm}}^k{}_l\big|_{x_o} a^n b^m \int_{\Sigma_s}\mathbf{d}\alpha\wedge\mathbf{d}\beta \tag{7.29}$$

Dosazením vztahů pro ${\Pi_{(0)}}^k_l$, ${\Pi_{(1)}}^k_l$ a ${\Pi_{(2)}}^k_l$ do rozvoje (7.22) (přičemž díky $w_s(1) = x_o$ je $s\,{\Pi_{(1)}}^k_l\big|_{\tau=1} = 0$), dostáváme

$${\Pi_s}^k_l\big|_{\tau=1} = \delta^k_l - S\,a^m b^n\,{R_{mn}}^k{}_l\big|_{x_o} + \mathcal{O}(s^3) \; , \tag{7.30}$$

kde $S = \int_{\Sigma_s} d\alpha\, d\beta$. Přejdeme-li od souřadnic zpět k tenzorovým veličinám, můžeme psát

$$\boldsymbol{\Pi}_s(1) = \boldsymbol{\delta} - S\,\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + \mathcal{O}(s^3) \; , \tag{7.31}$$

Tím jsme tvrzení (7.16) dokázali. ■

Kapitola 8

Kovariantní vnější derivace

V této sekci zobecníme vnější kalkulus z kapitoly 4 – operaci vnějšího součinu a vnější derivace – na obecnější tenzorové objekty. Tento materiál je poměrně pokročilý a je možné ho vynechat. V dalším textu se sice na zde zavedené operace budeme odvolávat, vždy ale jen jako na alternativní způsob zápisu vět a výrazů, které primárně zapíšeme jinak.

Užití kovariantní vnější derivace může zkrátit leckteré výrazy v riemanovské geometrii, její hlavní uplatnění je však až v kontextu vektorových bundlů. V tomto kontextu je zavedení kovariantní vnější derivace velmi přirozené a přímočaré. Zavedení kovariantní vnější derivace na tečných prostorech je pouze aplikace obecného konceptu ve speciální situaci, kdy vektorovým bundlem je tenzorový prostor $\boldsymbol{T}^k_l M$. V tento okamžik však nemáme ještě vybudovánu teorii fibrovaných prostorů a proto se zaměříme pouze na tečné kovariantní vnější derivace.

8.1 Tenzor-značné antisymetrické formy

Naším cílem je rozšířit vnější kalkulus definovaný pro antisymetrické formy, tj. pro antisymetrické tenzory typu $\boldsymbol{\Lambda}^p M = \boldsymbol{T}^0_{[p]} M$, na tenzory, které vedle antisymetrických indexů mají ještě další tenzorovou strukturu. Budeme tedy mluvit o tenzor-značných antisymetrických formách typu (k, l) stupně p – tenzorech z prostoru $\boldsymbol{\Lambda}^p \otimes \boldsymbol{T}^k_l M$, tj. tenzorech typu $(k, l+p)$, které mají p antisymetrických kovariantních indexů. Jinak řečeno, budeme užívat antisymetrické p-formy, které mají navíc k kontravariantních a l kovariantních indexů. Pro tyto tenzor-značné p-formy zavedeme vnější součin a vnější derivaci účinkující na antisymetrické indexy a 'ignorující' dodatečnou tenzorovou strukturu.

Navržená koncepce je jasná, nese s sebou však problémy s označením. Používané objekty mohou být poměrně složité a může dojít k nejasnostem, které tenzorové indexy odpovídaji antisymetrické formě a které dodatečné tenzorové struktuře. Například tenzor $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}$ může být chápán jako p-forma z $\boldsymbol{\Lambda}^p M$ či $(0,1)$ značná $(p-1)$-forma z prostoru $\boldsymbol{\Lambda}^{p-1} \otimes \boldsymbol{T}^0_1 M$. Abychom byli schopni tyto interpretace odlišit, zavedeme označení:

Definice D8.1 (Tenzor-značné antisymetrické formy)

Antisymetrickou tenzor-značnou formou typu (k,l) *stupně* p nazýváme tenzor z prostoru $\boldsymbol{T}^k_{l+p}M$, který je antisymetrický v p kovariantních indexech. Tyto indexy budeme nazývat *formové*. Rozdělení na p formových indexů a zbývající k a l indexů budeme indikovat následovně:

$$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\dots\boldsymbol{n}_p}{}^{a_1\dots a_k}{}_{a_1\dots a_l}\ .$$

Alternativně, pokud nebude hrozit nedorozumění a struktura dodatečných indexů bude jasná z kontextu, budeme dodatečné indexy zcela vynechávat:

$$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\dots\boldsymbol{n}_p}\ . \qquad\circ$$

Poznámka

Jak již bylo řečeno, jeden a týž tenzor může být chápán různě. Například tenzor $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{abc}} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}}_{[\boldsymbol{abc}]}$ lze chápat jako vektor-značnou 3-formu $\boldsymbol{A}^{n}_{\boldsymbol{abc}}$ nebo jako tenzor-značnou 2-formu typu $(1,1)$ – nabízejí se hned tři možnosti $\boldsymbol{A}^{n}_{\boldsymbol{ab}c}$ nebo $\boldsymbol{A}^{n}_{\boldsymbol{a}b\boldsymbol{c}}$ nebo $\boldsymbol{A}^{n}_{a\boldsymbol{bc}}$. Další možnost je 1-forma typu $(1,2)$ (např. $\boldsymbol{A}^{n}_{\boldsymbol{a}bc}$) a konečně $\boldsymbol{A}^{n}_{abc}$ – 0-forma typu $(1,3)$.

Tenzor-značné formy typu (k,l) můžeme chápat jako antisymetrické formy, jejichž souřadnice jsou tenzory typu (k,l). Obdobně k rovnice (4.6) můžeme psát

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}{}^{b\dots}{}_{c\dots} &= \boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p}{}^{b\dots}{}_{c\dots}\ \boldsymbol{e}^{n_1}_{\boldsymbol{a}_1}\cdots\boldsymbol{e}^{n_p}_{\boldsymbol{a}_p}\\ &= \sum_{1\le n_1<\dots<n_p\le d} \boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p}{}^{b\dots}{}_{c\dots}\ \boldsymbol{e}^{n_1}_{\boldsymbol{a}_1}\wedge\dots\wedge\boldsymbol{e}^{n_p}_{\boldsymbol{a}_p}\ ,\end{aligned}\tag{8.1}$$

kde $\{\boldsymbol{e}^j\}$ je báze v kotečném prostoru $\boldsymbol{T}^0_1M$.

Rozlišení na formové a dodatečné tenzorové indexy nemění význam samotného tenzoru. Jedná se pořád o tentýž tenzor. Rozlišení na dva typy indexů však může ovlivnit operace, které s daným tenzorem budeme provádět. Na tenzor-značné formy nyní totiž zobecníme běžné operace s antisymetrickými tenzory s tím, že tyto operace budou 'ignorovat' dodatečné indexy – budou pracovat pouze s indexy formovými. Rozlišením indexů na dvě skupiny můžeme tedy ovlivnit, jak se tenzor 'účastní' různých operací.

První takovou operací je vnější součin. Vnější součin se na tenzor-značných antisymetrických formách definuje přesně stejně jako v kapitole 4 s tím, že tento součin bude ignorovat dodatečnou tenzorovou strukturu.

Definice D8.2 (Vnější násobení)

Nechť $\boldsymbol{\omega}^j\in\boldsymbol{\Lambda}^{p_j}\otimes\boldsymbol{T}^{k_j}_{l_j}M$, $j=1,\dots,n$, jsou tenzor-značné antisymetrické formy stupňů p_j typu (k_j,l_j). Vnější součin $\boldsymbol{\omega}^1\wedge\boldsymbol{\omega}^2\wedge\dots\wedge\boldsymbol{\omega}^n$ těchto forem je tenzor-značná antisymetrická forma $\boldsymbol{\omega}$ stupně $p=p_1+\dots+p_n$ typu $(k,l)=(k_1+\dots+k_n, l_1+\dots+l_n)$ daná antisymetrizací tenzorového součinu forem $\boldsymbol{\omega}^j$ ve formových indexech.

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}^1\wedge\dots\wedge\boldsymbol{\omega}^n=\frac{p\,!}{p_1!\cdots p_n!}\ \mathcal{A}(\boldsymbol{\omega}^1\cdots\boldsymbol{\omega}^n)\ .$$

Přesněji, pomocí indexů má definice tvar

$$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}{}^{b_1\dots b_l}{}_{c_1\dots c_k}=\frac{p\,!}{p_1!\cdots p_n!}\ \boldsymbol{\omega}^1{}_{[\boldsymbol{a}_1\dots}{}^{b_1\dots}{}_{|c_1\dots|}\cdots\boldsymbol{\omega}^n{}_{\dots\boldsymbol{a}_p]}{}^{\dots b_l}{}_{\dots c_k}\ . \qquad\circ$$

8.2 Kovariantní vnější derivace

Vnější kalkulus pro antisymetrické formy má velký význam zejména proto, že vnější derivaci $\mathbf{d}$ můžeme zavést i bez znalosti kovariantní derivace či jiné dodatečné struktury. Toto již není pravda pro vnější kalkulus s tenzor-značnými antisymetrickými formami. V tomto případě lze zavést vnější derivaci pouze s pomocí silnější struktury, která určí, jak zacházet s dodatečnými tenzorovými indexy. Touto silnější strukturou je kovariantní derivace. Zavedeme tedy tzv. *kovariantní vnější derivaci*, která na formových indexech funguje jako obyčejná vnější derivace a na dodatečných indexech jako derivace kovariantní.

Definice D8.3 (Kovariantní vnější derivace)

Kovariantní vnější derivace ${}^{\nabla}\mathbf{d}$ (asociovaná s kovariantní derivací $\boldsymbol{\nabla}$) je zobrazení z prostoru antisymetrických tenzor-značných p-forem do prostoru tenzor-značných $(p+1)$-forem stejného typu splňující následující vlastnosti:

$$
\begin{aligned}
&{}^{\nabla}\mathbf{d} \,:\, \mathrm{Sect}\big(\boldsymbol{\Lambda}^p \otimes \boldsymbol{T}^k_l M\big) \to \mathrm{Sect}\big(\boldsymbol{\Lambda}^{p+1} \otimes \boldsymbol{T}^k_l M\big)\,, && \\
&{}^{\nabla}\mathbf{d}(\boldsymbol{\alpha} + r\,\boldsymbol{\beta}) = {}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha} + r\,{}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{\beta}\,, \qquad r \in \mathbb{R}\,, && \text{(i)}\\
&{}^{\nabla}\mathbf{d}(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) = {}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta} + (-1)^p\, \boldsymbol{\alpha} \wedge {}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{\beta}\,, && \text{(ii)}\\
&{}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} \qquad \text{pro} \quad \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{A}^p M\,, \quad \text{tj. } k,l = 0\,, && \text{(iii)}\\
&{}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A} \qquad \text{pro} \quad \boldsymbol{A} \in \mathfrak{T}^k_l M\,, \quad \text{tj. } p = 0\,. && \text{(iv)}
\end{aligned}
$$

pro $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}^p M$ a $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{A}^q M$.

Při použití tenzorových indexů budeme výsledek vnějšího derivování zapisovat ${}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_0} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_p}{}^{b_1 \ldots b_k}_{c_1 \ldots c_l}$. Jeho složky budeme označovat ${}^{\nabla}\mathrm{d}_{a_0} \omega_{a_1 \ldots a_p}{}^{b_1 \ldots b_k}_{c_1 \ldots c_l}$. ∘

Tato definice určuje již vnější derivaci jednoznačně. Vskutku, užijeme-li rozpis do souřadnic (8.1), definice D8.3 dává

$$
\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = \sum_{n_1 < \cdots < n_p} \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega}_{n_1 \ldots n_p} \wedge \mathbf{d}x^{n_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{n_p}\,, \tag{8.2}
$$

případně s tenzorovými indexy

$$
\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_0} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_p}{}^{b \ldots}_{c \ldots} = \sum_{n_1 < \cdots < n_p} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}_0} \boldsymbol{\omega}_{n_1 \ldots n_p}{}^{b \ldots}_{c \ldots} \wedge \mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_1} x^{n_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_p} x^{n_p}. \tag{8.3}
$$

Zde ${}_{n_1,\ldots,n_p}$ jsou souřadnicové indexy. Objekty $\boldsymbol{\omega}_{n_1 \ldots n_p}{}^{b \ldots}_{c \ldots}$ však nejsou skalární funkce (jak tomu je u komponent antisymetrické formy), ale tensory typu (k,l) – zbývají jim neformové abstraktní indexy ${}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\ldots}$.

Analogicky výrazům z předchozí kapitoly můžeme vyjádřit kovariantní vnější derivaci čistě pomocí příslušné kovariantní derivace. Tentokrát uvedeme vztah v plné obecnosti – pro kovariantní derivaci s obecně nenulovou torzí (srovnej s marginálií M7.7).

Věta V8.1 (${}^{\nabla}\mathbf{d}$ pomocí $\boldsymbol{\nabla}$)

Nechť $\boldsymbol{\nabla}$ je libovolná kovariantní derivace s torzí $\boldsymbol{T}$. Pak kovariantní vnější derivace p-formy $\boldsymbol{\omega}$ typu (k,l) lze vyjádřit pomocí $\boldsymbol{\nabla}$ následovně:

$$
\begin{aligned}
{}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_0} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_p}{}^{b \ldots}_{c \ldots} &= \\
&= \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}_0} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_p}{}^{b \ldots}_{c \ldots} + \boldsymbol{T}^{n}_{\boldsymbol{a}_0 \boldsymbol{a}_1} \wedge \boldsymbol{\omega}_{n \boldsymbol{a}_3 \ldots \boldsymbol{a}_p}{}^{b \ldots}_{c \ldots} \\
&= (p+1)\, \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}_0} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_p]}{}^{\boldsymbol{b} \ldots}_{\boldsymbol{c} \ldots} + \tbinom{p+1}{2} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{[\boldsymbol{a}_0 \boldsymbol{a}_1} \boldsymbol{\omega}_{|\boldsymbol{n}| \boldsymbol{a}_3 \ldots \boldsymbol{a}_p]}{}^{\boldsymbol{b} \ldots}_{\boldsymbol{c} \ldots}
\end{aligned}
$$

M8.1 Vnější kalkulus na n-ádových složkách
Vnější kalkulus zobecněný na tenzor-značné formy se často používá v n-ádovém formalismu. V případě, že máme na varietě v každém bodě zvolenou n-ádu $\{\boldsymbol{e}_j\}$ a k ní duální bázi $\{\boldsymbol{e}^j\}$, můžeme zobecnit vnější kalkulus na tenzor-značné formy jednodušším způsobem. Dodatečných tenzorových indexů se zbavíme tak, že je vyjádříme vzhledem ke zvolené n-ádě, tj. že budeme počítat s n-ádovými složkami. Místo p-formy $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_p}{}^{b \ldots}_{c \ldots}$ typu (k,l) pak budeme mít soubor antisymetrických p-forem $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_p}{}^{b \ldots}_{c \ldots}$ číslovaných indexy $b, c = 1, \ldots, n$. Jelikož se jedná již o obyčejné antisymetrické formy, můžeme na ně aplikovat běžné operace vnějšího kalkulu. Samozřejmě, při změně n-ády se tetrádové složky mění a budou se měnit i naše antisymetrické formy $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_p}{}^{b \ldots}_{c \ldots}$.
Takto zobecněný vnější kalkulus na tenzor-značné formy však je jen speciální případ našeho obecného přístupu. Je zřejmé, že u vnějšího součinu je cesta přes zavedení n-ádových složek jen jiný způsob jak říci, že vnější součin ‘ignoruje’ dodatečné tenzorové indexy. Problematická operace je vnější derivace. V našem formalismu odpovídá vnější derivování tetrádových složek speciální volbě kovariantní vnější derivace. Stačí zvolit kovariantní vnější derivaci ${}^{\eth}\mathbf{d}$ asociovanou s n-ádovou vnější derivací $\boldsymbol{\eth}$. Jelikož $\boldsymbol{\eth}$ anihiluje n-ádové vektory, působí ${}^{\eth}\mathbf{d}$ právě jen na n-ádové složky. Neboli, vnější derivace n-ádových složek je rovna n-ádovým složkám kovariantní vnější derivace $\boldsymbol{\eth}$:

$$
\begin{aligned}
&{}^{\eth}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_0} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_p}{}^{\boldsymbol{b} \ldots}_{\boldsymbol{c} \ldots} \\
&\qquad = \big(\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_0} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_p}{}^{r \ldots}_{s \ldots}\big)\, \boldsymbol{e}_r^{\boldsymbol{b}} \cdots \boldsymbol{e}^s_{\boldsymbol{c}} \cdots\,.
\end{aligned}
$$

(Složky $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_p}{}^{r \ldots}_{s \ldots}$ jsou zde samozřejmě vyjádřeny vzhledem k bázi $\boldsymbol{e}_j$.)
Speciálně, jelikož n-ádová složka v horním indexu jednotkového tenzoru je přímo 1-forma báze, $\boldsymbol{\delta}^j_{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{e}^j{}_{\boldsymbol{a}}$, vztah pro torzi z lemmatu V8.2 vede na vztah (ii) lemmatu V7.11

$$
\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{ab}} = {}^{\eth}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\delta}^{n}_{\boldsymbol{b}} = \big(\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{e}^j{}_{\boldsymbol{b}}\big)\, \boldsymbol{e}_j^{\boldsymbol{n}}\,.
$$

$$= \sum_{0\le k\le p} (-1)^k \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}_k} \boldsymbol{\omega}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo } \boldsymbol{a}_k}}{}^{\boldsymbol{b}\dots}_{\boldsymbol{c}\dots}$$

$$+ \sum_{0\le k<l\le p} (-1)^{k+l+1} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{a}_l} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}\underbrace{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo } \boldsymbol{a}_k,\,\boldsymbol{a}_l}}{}^{\boldsymbol{b}\dots}_{\boldsymbol{c}\dots}\ .$$

□

Speciálně, pro $p = 0, 1, 2$ dostáváme vztahy analogické rovnici (7.12).

$$\begin{aligned}
{}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{A}^{r\dots}_{s\dots} &= \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{r}\dots}_{\boldsymbol{s}\dots}\ ,\\
{}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \gamma_{\boldsymbol{b}}{}^{r\dots}_{s\dots} &= \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} \gamma_{\boldsymbol{b}\boldsymbol{s}\dots}^{\boldsymbol{r}\dots} - \boldsymbol{\nabla}_{b} \gamma_{\boldsymbol{a}\boldsymbol{s}\dots}^{\boldsymbol{r}\dots} + \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}\, \gamma_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{s}\dots}^{\boldsymbol{r}\dots}\ ,\\
{}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}}{}^{r\dots}_{s\dots} &= \boldsymbol{\nabla}_{a}\, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{s}\dots}^{\boldsymbol{r}\dots} + \boldsymbol{\nabla}_{b}\, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{c}\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{s}\dots}^{\boldsymbol{r}\dots} + \boldsymbol{\nabla}_{c}\, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{s}\dots}^{\boldsymbol{r}\dots}\\
&\quad + \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}}\, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{s}\dots}^{\boldsymbol{r}\dots} + \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{c}\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{s}\dots}^{\boldsymbol{r}\dots} + \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{s}\dots}^{\boldsymbol{r}\dots}\ .
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Lehce nahlédneme, že pro kovariantní derivaci bez torze je kovariantní vnější derivace (až na numerický faktor) antisymetrizací kovariantní derivace ve formových indexech

$$\begin{aligned}
{}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} &= \boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{\omega}\ , \quad \text{tj.}\\
{}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_0} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}{}^{b\dots}_{c\dots} &= (p+1)\, \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}_0} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p]}{}^{\boldsymbol{b}\dots}_{\boldsymbol{c}\dots}\\
&= \sum_{0\le k\le p} (-1)^k\, \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}_k} \boldsymbol{\omega}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo } \boldsymbol{a}_k}}{}^{\boldsymbol{b}\dots}_{\boldsymbol{c}\dots}\ .
\end{aligned} \tag{8.5}$$

Pomocí kovariantní vnější derivace můžeme napsat explicitní vzorec pro torzi příslušné kovariantní derivace. Aplikací druhého vztahu z (8.4) na jednotkový tenzor chápaný jako 1-forma typu $(1, 0)$ dostaneme

Lemma V8.2 (Torze pomocí ${}^{\nabla}\mathbf{d}$)

$$\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}} = {}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\delta}^{n}_{\boldsymbol{b}}\ ,$$

kde $\boldsymbol{T}$ je torze kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$. □

8.3 Operátor křivosti a Bianchiho identity

Při porovnání definic obyčejné vnější derivace D4.3 a kovariantní vnější derivace D8.3 vidíme, že pro kovariantní vnější derivaci nemáme analogii vztahu $\mathbf{d}\,\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = 0$. Vskutku, druhá kovariantní vnější derivace není obecně nulová. Přesto však pro ní platí speciální vztah. Ukazuje se, že ${}^{\nabla}\mathbf{d}{}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{A}$ sice není nulové, ale chová se ultralokálně, tj. lze reprezentovat tenzorově.

M8.2 Křivost pomocí vnější derivace
Výraz z věty V7.26 lze zapsat pomocí vnější kovariantní derivace následovně:

$$\tilde{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}{}^{\boldsymbol{k}}{}_{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}{}^{\boldsymbol{k}}{}_{\boldsymbol{l}} + {}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\Gamma}^{k}_{\boldsymbol{b}\,l} + \boldsymbol{\Gamma}^{k}_{\boldsymbol{a}n} \wedge \boldsymbol{\Gamma}^{n}_{\boldsymbol{b}\,l}\ .$$

Zvolíme-li za jednu z derivací souřadnicovou derivaci $\boldsymbol{\partial}$, dostaneme (viz lemma V7.27)

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}{}^{\boldsymbol{k}}{}_{\boldsymbol{l}} = {}^{\partial}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\Gamma}^{k}_{\boldsymbol{b}\,l} + \boldsymbol{\Gamma}^{k}_{\boldsymbol{a}n} \wedge \boldsymbol{\Gamma}^{n}_{\boldsymbol{b}\,l}\ ,$$

kde rozdílový tenzor $\boldsymbol{\Gamma}^{k}_{\boldsymbol{a}n}$ hraje roli tenzorznačné 1-formy potenciálu. Zápis v tomto tvaru je obvyklý zejména v analogických výrazech pro křivost kovariantních derivací na vektorových bundlech.

Věta V8.3 (Druhá kovariantní vnější derivace)
Mějme kovariantní derivaci $\boldsymbol{\nabla}$ s Riemannovým tenzorem $\boldsymbol{R}$ a s ní asociovanou kovariantní vnější derivaci ${}^{\nabla}\mathbf{d}$. Pak působení druhé kovariantní derivace na tenzorové pole $\boldsymbol{A}$ chápané jako tenzor-značná 0-forma je dáno operátorem křivosti $\mathsf{R}_{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}$, tj. jde o pseudoderivaci charakterizovanou Riemannovým tenzorem:

$${}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} {}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{A}^{k\dots}_{l\dots} = \mathsf{R}_{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}\dots}_{\boldsymbol{l}\dots}\ .$$

Obecněji, působení na tenzor-značnou p-formu $\boldsymbol{\omega}$ lze zapsat

$${}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} {}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{c}\dots}{}^{k\dots}_{l\dots} = \mathsf{R}_{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{c}\dots}{}^{k\dots}_{l\dots}\ , \qquad \text{tj.} \qquad {}^{\nabla}\mathbf{d}{}^{\nabla}\mathbf{d} = \mathsf{R}\wedge\ .$$

Zde pod $\mathsf{R}_{ab} \wedge \omega_{c\ldots}{}^{k\ldots}_{l}$ chápeme operaci, která se chová jako vnější násobení ve formových indexech $a, b, c, \ldots$ a jako operátor křivosti v dodatečných tenzorových indexech $k, l, \ldots$. □

DŮKAZ:
Začněme druhou vnější derivací tenzorového pole A. Pomocí vztahů 8.4 můžeme postupně psát

$$\begin{aligned} {}^{\nabla}\!\mathrm{d}_a {}^{\nabla}\!\mathrm{d}_b A^{k\ldots}_{l\ldots} &= {}^{\nabla}\!\mathrm{d}_a \nabla_b A^{k\ldots}_{l\ldots} \\ &= \nabla_a \nabla_b A^{k\ldots}_{l\ldots} - \nabla_b \nabla_a A^{k\ldots}_{l\ldots} + T^n_{ab} \nabla_n A^{k\ldots}_{l\ldots} , \end{aligned} \tag{*}$$

což je podle věty V7.23 přesně akce operátoru křivosti $\mathsf{R}_{ab} A^{k\ldots}_{l\ldots}$.

Obecnou tenzor-značnou p-formu $\omega_{a\ldots}{}^{k}_{l}$ můžeme vždy napsat jako součet členů v součinovém tvaru $\alpha_{a\ldots} A^k_l$. Druhá vnější derivace takových členů lze upravit

$$\begin{aligned} {}^{\nabla}\!\mathrm{d}{}^{\nabla}\!\mathrm{d}(A\alpha) &= {}^{\nabla}\!\mathrm{d}\Big(A(\mathrm{d}\alpha) + ({}^{\nabla}\!\mathrm{d}A) \wedge \alpha\Big) \\ &= \nabla A \wedge \mathrm{d}\alpha + A\, \mathrm{dd}\alpha + ({}^{\nabla}\!\mathrm{d}{}^{\nabla}\!\mathrm{d}A) \wedge \alpha - \nabla A \wedge \mathrm{d}\alpha \\ &= ({}^{\nabla}\!\mathrm{d}{}^{\nabla}\!\mathrm{d}A) \wedge \alpha = \mathsf{R} \wedge A\alpha . \end{aligned} \tag{8.6}$$

Zde jsme užili všech vlastností kovariantní vnější derivace z definice D8.3, identity $\mathrm{d}\,\mathrm{d} = 0$ a právě dokázaného vztahu (*). Platnost ${}^{\nabla}\!\mathrm{d}{}^{\nabla}\!\mathrm{d}\omega = \mathsf{R} \wedge \omega$ pro obecnou formu ω pak plyne z linearity. ■

V řeči kovariantní vnější derivace mají pak Bianchiho identity tvar

Věta V8.4 (Bianchiho identity pomocí vnější derivace)

Bianchiho identity z věty V7.28 lze zapsat následovně:

$$\mathsf{R}_{ab} \wedge \delta^n_c = {}^{\nabla}\!\mathrm{d}_a T^n_{bc} , \tag{Bianchi 1}$$

$${}^{\nabla}\!\mathrm{d}_a \mathsf{R}_{bc} = 0 . \tag{Bianchi 2}$$

□

V první identitě operátor křivosti R (definice D7.22) působí pouze na index n. Toto působení je podle (7.13) dáno přímo Riemannovým tenzorem. Výraz na levé straně je tak v podstatě Riemannův tenzor s operací $\wedge$ mezi prvními dvěma a třetím spodním indexem. To však nelze rozumně zapsat pomocí znaménka $\wedge$ a pokud bychom chtěli přepsat levou stranu explicitně pomocí Riemannova tenzoru R, museli bychom si pomoci antisymetrizací podle definice D4.2:

$$\mathsf{R}_{ab} \wedge \delta^n_c = 3 R_{[ab}{}^n{}_{c]} . \tag{8.7}$$

V druhé Bianchiho identitě nesmíme zapomenout, že operátor křivosti R je pseudoderivace, která působí doprava na libovolné tenzorové pole (věta V7.23). Výrazu ${}^{\nabla}\!\mathrm{d}\mathsf{R}$ z Bianchiho identity je nutno rozumět tak, že vnější derivace v něm působí pouze na R, tj. pouze na Riemanův tenzor R, ze kterého lze R 'poskládat'. Mohli bychom psát ${}^{\nabla}\!\mathrm{d}\mathsf{R} = \mathbf{tens}[{}^{\nabla}\!\mathrm{d}R]$. Identita ${}^{\nabla}\!\mathrm{d}\mathsf{R} = 0$ je tedy ekvivalentní identitě přímo pro Riemanův tenzor

$${}^{\nabla}\!\mathrm{d}_a R_{bc}{}^k{}_l = 0 . \tag{8.8}$$

Vidíme, že díky druhé Bianchiho identitě se operátor křivosti R chová vůči kovariantnímu vnějšímu derivování jako konstanta:

$$\begin{aligned} {}^{\nabla}\!\mathrm{d}_a\big(\mathsf{R}_{bc} A^{k\ldots}_{l\ldots}\big) &= \mathsf{R}_{bc} \wedge {}^{\nabla}\!\mathrm{d}_a A^{k\ldots}_{l\ldots} , \\ {}^{\nabla}\!\mathrm{d}_a\big(\mathsf{R}_{bc} \wedge \omega_{c\ldots}{}^{k\ldots}_{l\ldots}\big) &= \mathsf{R}_{bc} \wedge {}^{\nabla}\!\mathrm{d}_a \omega_{c\ldots}{}^{k\ldots}_{l\ldots} . \end{aligned} \tag{8.9}$$

Upozorněme však znovu (viz větu V8.3), že zde R působí na ${}^{\nabla}\!\mathrm{d}A$ také jako pseudoderivace a to v neformových indexech; naopak, operace $\wedge$ bere v úvahu pouze formové indexy.

Důkaz: (věta V8.4)
První Binachiho identita vyplývá z rovnosti rozpisů druhé vnější derivace jednotkového tenzoru ${}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}}{}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{\delta}^{n}_{\boldsymbol{c}}$ pomocí lemmatu V8.2 a pomocí věty V8.3.

Druhá Binachiho identita plyne z 'asociativity' vnějšího derivování. Třetí derivace libovolné tenzor-značné formy $\boldsymbol{\omega}$ lze totiž rozepsat podle věty V8.3 při použití různého ozávorkování dvěma způsoby

$$ {}^{\nabla}\mathbf{d}\big({}^{\nabla}\mathbf{d}{}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\big) = {}^{\nabla}\mathbf{d}\big(\mathsf{R}\wedge\boldsymbol{\omega}\big) = \big({}^{\nabla}\mathbf{d}\mathsf{R}\big)\wedge\boldsymbol{\omega} + \mathsf{R}\wedge\big({}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\big) $$

a

$$ {}^{\nabla}\mathbf{d}{}^{\nabla}\mathbf{d}\big({}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\big) = \mathsf{R}\wedge\big({}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\big)\ . $$

Odtud okamžitě dostáváme ${}^{\nabla}\mathbf{d}\mathsf{R} = 0$. ■

Nyní ukážeme, že Bianchiho identity ve tvaru věty V8.4 jsou ekvivalentní jejich standardní tenzorové reprezentaci z věty V7.28.

Důkaz: (věta V7.28)
Rovnice (8.7) ukazuje, že levá strana obou prvních Bianchiho identit je až na triviální faktor stejná. Výraz ${}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{T}$ na pravé straně lze rozepsat pomocí věty V8.1

$$ {}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{bc}} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\wedge\boldsymbol{T}^{n}_{\boldsymbol{bc}} + \boldsymbol{T}^{k}_{\boldsymbol{ab}}\wedge\boldsymbol{T}^{n}_{k\boldsymbol{c}}\ . $$

Nahrazením vnějšího násobení antisymetrizací a užitím antisymetrie torze dostaneme pravou stranu první Bianchiho identity věty V7.28.

Již jsme řekli, že ${}^{\nabla}\mathbf{d}\mathsf{R} = 0$ je ekvivalentní výrazu (8.8). Pokud vyjádříme vnější derivaci pomocí kovariantní derivace (věta V8.1), dostaneme

$$ 0 = {}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{bc}}{}^{k}{}_{l} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\wedge\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{bc}}{}^{k}{}_{l} + \boldsymbol{T}^{n}_{\boldsymbol{ab}}\wedge\boldsymbol{R}_{n\boldsymbol{c}}{}^{k}{}_{l} $$

Opět nahrazením vnějšího násobení antisymetrizací násobení tenzorového a užitím antisymetrie Riemannova tenzoru v prvních dvou indexech dostaneme pravou stranu původního tvaru druhé Bianchiho identity. ■

Kapitola 9

Metrická kovariantní derivace

Kapitola 10

Derivace hustot a integrální věty

Nyní navážeme na látku vyloženou v kapitole 5. Zde byly zavedeny integrovatelné hustoty, hustotní duál a definovali jsme integrování tenzorových hustot a forem. V následujících kapitolách jsme zavedli další geometrické struktury jako je metricka a kovariantní derivace. Máme tak připravené prostředky pro definici diferenciálních operátorů působících na různé typy tenzorových hustot a pro formulaci integrálních vět – zobecnění Gausovy a Stokesovy věty.

10.1 Diferenciální operátory divergence a rotace

V euklidovském třídimenionálním prostoru jsou velmi užitečné vektorové diferenciálních operátory **grad**, **div** a **rot**. Tyto operátory hrají klíčovou roli ve formulaci integrálních vět. Pomocí hustotního duálu můžeme definovat analogie těchto vektorových operátorů působících na vhodné tenzorové hustoty a antisymetrické formy. Ukazuje se, že takto definované operátory divergence **div** a rotace **rõt** nepotřebují dodatečnou geometrickou strukturu. Jak operátor **div**, tak **rõt** jsou totiž modifikací vnější derivace pomocí operace hustotního duálu. Divergence **div** není nic jiného než operace duální k vnější derivaci a rotace **rõt** je dána hustotním duálem vnější derivace.

Definice D10.1 (Divergence a rotace)

Pro tenzorovou hustotu $\boldsymbol{\alpha} \in \operatorname{Sect} \boldsymbol{\Lambda}^{\star p+1} M$ stupně $p+1$ definujeme *divergenci* $\mathbf{div}\,\boldsymbol{\alpha} \in \operatorname{Sect} \boldsymbol{\Lambda}^{\star p} M$ následovně:

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{\alpha} = {}^{\star}\mathbf{d}^{\star}\boldsymbol{\alpha}\,. \qquad \text{(divergence)}$$

Podobně definujeme *rotaci* $\mathbf{r\tilde{o}t}\,\boldsymbol{\omega} \in \operatorname{Sect} \boldsymbol{\Lambda}^{\star d-p} M$ antisymetrické formy $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}^{p-1} M$ vztahem

$$\mathbf{r\tilde{o}t}\,\boldsymbol{\omega} = {}^{\star}\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\,. \qquad \text{(rotace)}$$

○

Poznámka

Operátor divergence se v literatuře zavádí s různou znaménkovou konvencí. Zde zvolená konvence vede k jednoduchému tvaru Gaussovy věty. V aplikacích zaměřených na antisymetrické formy (a k nim duální tenzorové hustoty) se častěji zavádí operátor $\boldsymbol{\delta}$ lišící se při akci na tenzorovou hustotu stupně $p+1$ znaménkem $\boldsymbol{\delta\alpha} = (-1)^{p+1}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\alpha}$. Jelikož symbol $\boldsymbol{\delta}$ máme již značně přetížený, zavedeme alternativní značení $\mathbf{d}{\cdot}\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\delta\alpha}$. Pomocí abstraktních indexů budeme tento operátor psát $\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{n}a_1\dots a_p}$. Označení divergence formální kontrakcí $\mathbf{d}{\cdot}\boldsymbol{\alpha}$ je motivováno výrazem pro divergenci pomocí kovariantní derivace – viz větu V10.9 níže.

Poznámka

Operátor rotace $\tilde{\mathbf{rot}}$ se pro formy vyššího stupně v obecné dimenzi většinou nezavádí. Zde uvedená definice zobecňuje standardní operátor rotace z třídimenzionálního euklidovského prostoru tak, aby pro něj platilo zobecnění Stokesovy věty, viz věta V10.15. Vlnka použitá v označení tohoto operátoru zdůrazňuje, že výsledkem je tenzorová hustota. V definici D10.2 totiž ještě zavedeme rotaci $\mathbf{rot}$ jejíž výsledek je antisymetrická forma.

Díky vlastnostem hustotního duálu a vnější derivace okamžitě dostáváme:

Lemma V10.1 (Vlastnosti divergence a rotace)

Pro libovolnou tenzorovou hustotu $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{Sect}\,\boldsymbol{\Lambda}^{\star p}M$ a antisymetrickou formu $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}^pM$ platí

$$\mathbf{div}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\alpha} = 0\,,$$
$$\mathbf{div}\,\tilde{\mathbf{rot}}\,\boldsymbol{\omega} = 0\,.$$

□

V kapitole 6 jsme pomocí metrické struktury zavedli Hodgeův duál (definice D6.14). Ten nám umožní definovat diferenciální operátory i na objektech, které nemají charakter hustot. Konkrétně můžeme zavést operátory **div** a **rot** působící na antisymetrických formách, dávající jako výsledky opět antisymetrické formy.

Definice D10.2 (Divergence a rotace antisymetrických forem)

Divergence a *rotace* na antisymetrických formách jsou definované vztahy:

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{\omega} = (\operatorname{sign}\boldsymbol{g})(-1)^{p(d-p)}\,{}^*\mathbf{d}\,{}^*\boldsymbol{\omega}\,,$$
$$\text{pro}\quad \boldsymbol{\omega}\in\mathcal{A}^{p+1}M\,,\quad \mathbf{div}\,\boldsymbol{\omega}\in\mathcal{A}^pM\,,$$
$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega} = (\operatorname{sign}\boldsymbol{g})(-1)^{p(d-p)}\,{}^*\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\,,$$
$$\text{pro}\quad \boldsymbol{\omega}\in\mathcal{A}^{d-p-1}M\,,\quad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega}\in\mathcal{A}^pM\,.$$

Zde d je dimenze variety. ◦

Poznámka

Obdobně jako pro divergenci na tenzorových hustotách zavedeme na formách označení pro divergenci s alternativní znaménkovou konvencí

$$\mathbf{d}{\cdot}\boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\delta\omega} = (-1)^p\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\omega} \qquad \text{pro}\quad \boldsymbol{\omega}\in\mathcal{A}^{p+1}M\,.$$

Operátor $\boldsymbol{\delta}$ se nazývá *ko-derivace*.

Nepřehledné znaménko v těchto definicích se zjednoduší, pokud si uvědomíme, že inverze k Hodgeovu duálu * je právě $(\operatorname{sign}\boldsymbol{g})(-1)^{p(d-p)}\,{}^*$. Vztahy pro oba operátory můžeme pak přepsat v alternativní formě:

Lemma V10.2 (Divergence, rotace a Hodgeův duál)

$${}^*\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}^*\boldsymbol{\omega}\,,$$
$${}^*\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\,.$$

□

Důkaz:

Viz lemma V6.5 a definici D10.2. ■

Právě zavedené operátory jsou analogické operátorům definovaným v definici D10.1 pomocí hustotního duálu. Platí totiž

M10.1 Vektorové operátory pro $d = 3$

V třídimenzionálním prostoru s riemanovskou metrikou se definují operátory divergence a rotace pro vektorová pole. Využitím identifikace vektorů a 1-forem můžeme tyto operátory zavést následovně:

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{a} = {}^\sharp\,\mathbf{div}\,{}^\flat\boldsymbol{a} = {}^{\sharp *}\mathbf{d}^{*\flat}\boldsymbol{a}\,,$$
$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{a} = {}^\sharp\,\mathbf{rot}\,{}^\flat\boldsymbol{a} = {}^{\sharp *}\,\mathbf{d}^\flat\boldsymbol{a}\,.$$

Pomocí hustotního duálu mají tyto operace tvar

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{a} = \mathfrak{g}^{-1/2}\,\mathbf{div}\big(\mathfrak{g}^{1/2}\boldsymbol{a}\big) = \mathfrak{g}^{-1/2\star}\mathbf{d}^\star\big(\mathfrak{g}^{1/2}\boldsymbol{a}\big)\,,$$
$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{a} = \mathfrak{g}^{-1/2}\,\tilde{\mathbf{rot}}\,{}^\flat\boldsymbol{a} = \mathfrak{g}^{-1/2\star}\,\mathbf{d}^\flat\boldsymbol{a}\,.$$

Dále se zavádí gradient skalární funkce

$$\mathbf{grad}\,f = {}^\sharp\mathbf{d}f$$

a Laplaceův operátor skalární funkce a vektorového pole

$$\triangle f = -\,\mathbf{div}\,\mathbf{grad}\,f\,,$$
$$\triangle\boldsymbol{a} = -\,\mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{a} + \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{a}\,.$$

Při použití konvence automatického snižování a zvyšování indexů jsou tyto operátory speciálním případem operátorů zavedeným v definicích D10.2 a D10.3.

Lemma V10.3 (Vztahy pro divergence a rotace)
Divergence a rotace antisymetrické formy $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}^p M$ lze vyjádřit pomocí divergence a rotace definovaných pomocí hustotního duálu

$$\begin{aligned}
\mathbf{div}\,\boldsymbol{\omega} &= \mathfrak{g}^{-1/2\ \flat}\,\mathbf{div}\big(\mathfrak{g}^{1/2\ \sharp}\boldsymbol{\omega}\big) = \mathfrak{g}^{-1/2\ \flat\star}\mathbf{d}^{\star}\big(\mathfrak{g}^{1/2\ \sharp}\boldsymbol{\omega}\big)\ ,\\
\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega} &= \mathfrak{g}^{-1/2\ \flat}\,\tilde{\mathbf{rot}}\,\boldsymbol{\omega} = \mathfrak{g}^{-1/2\ \flat\star}\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\ .
\end{aligned}$$ □

Důkaz:
Oba vztahy se dostanou pomocí lemmatu V6.5 a porovnáním definic D10.1 a D10.2. ■

Dále definujeme tzv. vnější Laplaceův operátor:

Definice D10.3 (Vnější Laplaceův operátor)
Mějme varietu M dimenze d s metrikou $\boldsymbol{g}$. *Vnější Laplaceův operátor* (nazývaný též *de Rhamův–Laplaceův operátor*) působící na antisymetrických formách stupně p definujeme

$$\triangle\boldsymbol{\omega} = -(\operatorname{sign}\boldsymbol{g})(-1)^{pd}\big({}^*\mathbf{d}\,{}^*\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} + (-1)^d\,\mathbf{d}\,{}^*\mathbf{d}\,{}^*\boldsymbol{\omega}\big)\ .$$ ∘

Pomocí definice D10.2 můžeme přepsat vnější Laplaceův operátor v alternativních formách

$$\begin{aligned}
\triangle\boldsymbol{\omega} &= (-1)^{p+1}\,\big(\mathbf{div}\,\mathbf{d}\,\boldsymbol{\omega} - \mathbf{d}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\omega}\big)\\
&= (-1)^p\,\mathbf{d}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\omega} + (\operatorname{sign}\boldsymbol{g})(-1)^{(p+1)d}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega}\\
&= -\,\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{d}\,\mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\omega} = [\,\mathbf{d} - \mathbf{d}\cdot\,]^2\,\boldsymbol{\omega}\\
&= \boldsymbol{\delta}\,\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{d}\,\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\omega} = [\,\mathbf{d} + \boldsymbol{\delta}\,]^2\,\boldsymbol{\omega}\ ,
\end{aligned} \tag{10.1}$$

kde jsme využili $\mathbf{d}\,\mathbf{d} = \mathbf{d}\cdot\,\mathbf{d}\cdot = 0$.

Poznamenejme, že vnější Laplaceův operátor se v obecnosti liší od Laplaceova operátoru definovaného pomocí kovariantní derivace – viz větu V10.13 níže.

10.2 Kovariantní derivace integrovatelných hustot

V kapitole 7 jsme zavedli kovariantní derivaci, pomocí které můžeme zkoumat změny obecných tenzorových polí. Obdobně můžeme zavést kovariantní derivaci na integrovatelných hustotách. V analogii s definicí D7.4 (viz též větu V7.1) definujeme

Definice D10.4 (Kovariantní diferenciál na hustotách)
Kovariantní diferenciál $\boldsymbol{\nabla}\mathfrak{a}$ integrovatelné hustoty $\mathfrak{a} \in \tilde{\mathfrak{F}}^w M$ váhy w je tenzorová hustota z $\tilde{\mathfrak{T}}^{w\,0}_{\ \ 1}M$ splňující

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\big(\mathfrak{a} + r\mathfrak{b}\big) &= \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\mathfrak{a} + r\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\mathfrak{b}\ , && \text{(linearita)}\\
\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\,\big(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\big) &= \big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\mathfrak{a}\big)\,\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\,\big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\mathfrak{b}\big)\ , && \text{(Leibniz)}\\
\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}} f &= \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} f\ , && \text{(působení na funkce)}
\end{aligned}$$

kde f je funkce, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ integrovatelné hustoty obecných vah a $r \in \mathbb{R}$. Kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\mathfrak{a}$ ve směru $\boldsymbol{v}$ je pak dána zúžením vektorového pole $\boldsymbol{v}$ s kovariantním diferenciálem $\boldsymbol{\nabla}\mathfrak{a}$

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\mathfrak{a} = \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\mathfrak{a}\ .$$ ∘

Lemma V10.4 (Derivace mocniny)

Kovariantní diferencál mocniny hustoty $\mathfrak{a}$ je

$$\boldsymbol{\nabla}\mathfrak{a}^w = w\,\mathfrak{a}^{w-1}\,\boldsymbol{\nabla}\mathfrak{a}\;. \qquad \square$$

DŮKAZ:

Dokáže se obdobným způsobem jako vzorec pro derivaci mocniny funkce užitím Leibnizova pravidla a faktu, že na funkcích se kovariantní derivace chová jako gradient. ■

CVIČENÍ C10.1

Ukažte! ✓

Kovariantní derivace na integrovatelných hustotách není dána jednoznačně. Prostor všech kovariantních derivací na hustotách lze vyšetřovat stejnými prostředky jaké jsme použili v kapitole 7 při zkoumání prostoru kovariantních derivací na tečných tenzorových prostorech. Rozdíl dvou kovariantních derivací je pseudoderivace typu $(0,1)$ působící na integrovatelných hustotách (viz definici D2.4 přímočaře rozšířenou na prostor integrovatelných hustot). Analogicky větě V2.4 lze akce pseudoreivace na hustotě váhy w vyjádřit pomocí akce psudoderivace na hustotě váhy 1:

Lemma V10.5 (Působení pseudoderivace na hustotách)

Nechť M je pseudoderivace typu (p,q) působící na integrovatelných hustotách. Její působení na hustotách váhy 1 lze reprezentovat tenzorovým polem $\boldsymbol{M}\in\mathfrak{T}^p_q M$:

$$\mathsf{M}\mathfrak{a} = \boldsymbol{M}\,\mathfrak{a} \quad , \quad \mathfrak{a}\in\tilde{\mathfrak{F}}M\;.$$

Akce pseudoderivace na hustotu $\mathfrak{h}$ váhy w pak je

$$\mathsf{M}\mathfrak{h} = w\,\boldsymbol{M}\,\mathfrak{h} \quad , \quad \mathfrak{h}\in\tilde{\mathfrak{F}}^w M\;. \qquad \square$$

DŮKAZ:

První vztah dostaneme, uvážíme-li, že akce pseudoderivace je ultralokální. Pseudoderivace $\mathsf{M}\mathfrak{a}$ musí tedy jít napsat jako tenzorová operace a díky tomu, že prostor integrovatelných hustot (v jednom bodě) je jednodimenzionální, dostaneme faktorizaci $\boldsymbol{M}\,\mathfrak{a}$.

Druhý vztah je analogický vzorci pro derivace mocniny, který lze odvodit pomocí Leibnizova pravidla a faktu, že pseudoderivace anihiluje hustoty váhy 0 (tj. funkce). ■

Dvě kovariantní derivace na integrovatelných hustotách se tedy liší pseudoderivací typu $(0,1)$, která lze charakterizovat 1-formou $\boldsymbol{\gamma}$. Konkrétně, pro hustotu $\mathfrak{a}$ váhy w máme

$$\tilde{\boldsymbol{\nabla}}\mathfrak{a} = \boldsymbol{\nabla}\mathfrak{a} + w\,\boldsymbol{\gamma}\,\mathfrak{a}\;. \tag{10.2}$$

Je-li zadána kovariantní derivace jak na tenzorových polích, tak na integrovatelných hustotách, můžeme definovat kovariantní derivaci působící na tenzorových hustotách $\tilde{\mathfrak{T}}^{w\,k}_{\;\,l}M$, tj. na řezech prostorů $\boldsymbol{T}^k_l M\otimes\boldsymbol{H}^w M$. Stačí požadovat, aby výsledná kovariantní derivace (či diferencál) splňovala standardní vlastnosti kovariantních derivací. Pomocí linearity a Leibnizova pravidla pak můžeme akci kovariantní derivace na tenzorových hustotách redukovat na derivaci na prostých tenzorech a prostých hustotách.

V kapitole 5 jsme však ukázali, že prostor hustot $\boldsymbol{H}U$ je na každé orientovatelné oblasti U variety M isomorfní s prostorem totálně antisymetrických forem $\boldsymbol{\Lambda}^d U$. Díky tomu můžeme indukovat kovariantní derivaci na hustotách z kovariantní derivace na tečných tenzorech — stačí požadovat, aby její akce byla ekvivalentní odpovídající akci na totálně antisymetrických formách.

Isomorfismus zprostředkující přechod od hustot k formám je určen tenzorem orientace $\tilde{\varepsilon}$ zavedeným v definici D5.18. Akci kovariantní derivace na hustoty můžeme tedy zavést požadavkem, aby tenzor orientace byl kovariantně konstantní:

Definice D10.5 (Rozšíření kovariantní derivace na hustoty)

Mějme na varietě M kovariantní derivaci $\boldsymbol{\nabla}$. Její rozšíření na integrovatelné hustoty obecné váhy musí splňovat

$$\boldsymbol{\nabla}\tilde{\varepsilon} = 0\ ,$$

kde $\tilde{\varepsilon}$ je tenzor orientace. ∘

POZNÁMKA

Jelikož podmínka $\boldsymbol{\nabla}\tilde{\varepsilon} = 0$ nezávisí na změně znaménka tenzoru orientace, definice není závislá na volbě orientace. Není potřebná ani orientovatelnost variety, jelikož je dostatečné vyžadovat platnost podmínky pouze lokálně, na orientovatelných oblastech.

Obdobně rozšíříme i akci pseudoderivace

Definice D10.6 (Rozšíření pseudoderivace na hustoty)

Mějme na varietě M pseudoderivaci derivaci M. Její rozšíření na integrovatelné hustoty obecné váhy musí splňovat

$$\mathsf{M}\tilde{\varepsilon} = 0\ ,$$

kde $\tilde{\varepsilon}$ je tenzor orientace. ∘

Věta V10.6 (Akce rozšířené pseudoderivace na hustotách)

Mějme pseudoderivaci M, jejíž akce na vektorech je dána tenzorem $\boldsymbol{M} \in \mathfrak{T}^1_1 M$, tj. $\mathsf{M} = \mathbf{tens}[\boldsymbol{M}]$. Pak rozšíření pseudoderivace na hustoty váhy w splňuje

$$\mathsf{M}\mathfrak{a} = -w\, \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{n}}\ \mathfrak{a}\ .$$ □

DŮKAZ:

Podmínka $\mathsf{M}\tilde{\varepsilon} = 0$ je ekvivalentní podmínce $\mathsf{M}\tilde{\varepsilon}^{-1} = 0$. Vskutku, $\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}^{-1} = d!^{[d]}\boldsymbol{\delta}$, čili $\mathsf{M}\big(\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}^{-1}\big) = 0$ a pomocí Leibnizova pravidla dostaneme $\mathsf{M}\tilde{\varepsilon}^{-1} = 0$.

Lokálně můžeme inverzní tenzor orientace $\tilde{\varepsilon}^{-1}$ reprezentovat pomocí libovolné positivně orientované formy $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}^d M$ jako $\tilde{\varepsilon}^{-1} = |\boldsymbol{\omega}|\ \boldsymbol{\omega}^{-1}$. Použitím Leibnizova pravidla dostáváme $0 = \boldsymbol{\omega}^{-1}\mathsf{M}|\boldsymbol{\omega}| + |\boldsymbol{\omega}|\,\mathsf{M}\,\boldsymbol{\omega}^{-1}$ a s pomocí lemmat V1.2 a V1.3 pak můžeme psát

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}|\boldsymbol{\omega}| &= -\frac{1}{d!}\,|\boldsymbol{\omega}|\ \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_d}\,\mathsf{M}\boldsymbol{\omega}^{-1\,\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_d}\\
&= -\frac{1}{d!}\,|\boldsymbol{\omega}|\ \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\ldots\boldsymbol{a}_d}\left(\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{a}_1}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{\omega}^{-1\,\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}_2\ldots\boldsymbol{a}_d} + \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{a}_2}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{\omega}^{-1\,\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{n}\ldots\boldsymbol{a}_d} + \ldots\right)\\
&= -\frac{d}{d!}\,|\boldsymbol{\omega}|\ \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\ldots\boldsymbol{a}_d}\,\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{a}_1}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{\omega}^{-1\,\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}_2\ldots\boldsymbol{a}_d} = -d\,|\boldsymbol{\omega}|\,\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{a}_1}_{\boldsymbol{n}}\ {}^{[d]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{n}\ \boldsymbol{a}_2\ldots\boldsymbol{a}_d}_{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\ldots\,\boldsymbol{a}_d}\\
&= -\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{n}}\ |\boldsymbol{\omega}|
\end{aligned}$$

Tím jsme dokázali tvrzení věty pro hustotu váhy 1 tvaru $|\boldsymbol{\omega}|$. Ovšem v tomto tvaru lze (lokálně) zapsat každá hustota váhy 1. Pro hustoty váhy w tvrzení věty plyne z lemmatu V10.5. ■

Dvě kovariantní derivace rozšířené z tečného prostoru na hustoty se pak liší o pseudoderivaci indukovanou pseudoderivací definovanou na tečném prostoru

Věta V10.7 (Vztah dvou kovariantních derivací na hustotách)
Mějme kovariantní derivace $\tilde{\boldsymbol{\nabla}}$ a $\boldsymbol{\nabla}$ lišící se pseudoderivací $\boldsymbol{\mathsf{\Gamma}}$ charakterizovanou rozdílovým tenzorem $\boldsymbol{\Gamma}$ Pak rozšíření na hustoty váhy w splňuje

$$\tilde{\boldsymbol{\nabla}}_{\boldsymbol{e}}\mathfrak{a} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{e}}\mathfrak{a} + \boldsymbol{\mathsf{\Gamma}}_{\boldsymbol{e}}\mathfrak{a} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{e}}\mathfrak{a} - w\,\boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{en}}\,\mathfrak{a}\ . \qquad \square$$

Důležitý příklad rozšíření kovariantní derivace na hustoty je případ souřadnicové kovariantní derivace $\boldsymbol{\partial}$ spojené se souřadnicemi x^j. Díky tomu, že $d^dx = \left|\mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^d\right|$, rozšíření souřadnicové kovariantní derivace bude splňovat

$$\boldsymbol{\partial}\, d^dx = 0\ , \tag{10.3}$$

čili, pro obecnou hustotu $\mathfrak{a}$ s komponentou $a = \mathfrak{a}[\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^i}]$ dostaneme

$$\boldsymbol{\partial}\mathfrak{a} = \mathbf{d}a\ d^dx\ . \tag{10.4}$$

Komponenty kovariantní derivace tenzorové hustoty pak lze vyjádřit pomocí parciálních derivací komponent a Christoffelových symbolů:

Věta V10.8 (Souřadnice kovariantní derivace tenzorových hustot)
Nechť je kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$ charakterizovaná vzhledem k souřadnicím x^j složkami $\Gamma^{\,j}_{kl}$. Pro obecné tenzorové pole $\boldsymbol{\alpha}$, které je zároveň hustotou váhy w, s komponentami $\alpha^{k_1k_2\dots}_{l_1l_2\dots}$, dostáváme

$$\begin{aligned}\alpha^{k_1k_2\dots}_{l_1l_2\dots;n} = \alpha^{k_1k_2\dots}_{l_1l_2\dots,n} - w\,\Gamma^{\,e}_{ne}\,\alpha^{k_1k_2\dots}_{l_1l_2\dots} \\ + \Gamma^{\,k_1}_{ne}\,\alpha^{ek_2\dots}_{l_1l_2\dots} + \Gamma^{\,k_2}_{ne}\,\alpha^{k_1e\dots}_{l_1l_2\dots} + \dots \\ - \Gamma^{\,e}_{nl_1}\,\alpha^{k_1k_2\dots}_{el_2\dots} - \Gamma^{\,e}_{nl_2}\,\alpha^{k_1k_2\dots}_{l_1e\dots} - \dots\ ,\end{aligned}$$

kde čárka značí parciální derivování podle x^j. $\square$

Divergence tenzorové hustoty zavedená v definici D10.1 lze jednoduše vyjádřit pomocí libovolné beztorzní kovariantní derivace

Věta V10.9 (Divergence pomocí kovariantní derivace)
Pro libovolnou kovarinatní derivaci $\boldsymbol{\nabla}$ bez torze platí

$$\big(\mathbf{div}\,\boldsymbol{\alpha}\big)^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p\boldsymbol{n}}\ ,$$

případně

$$\mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha}\ . \qquad \square$$

Poznámka

Tento vztah divergence ke kovariantní derivaci je motivací pro označení alternativního operátoru divergence $\mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\alpha}$ zavedeného v poznámce k definici D10.1. Nabízelo by se dokonce užít přímo označení $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha}$. Znak $\mathbf{d}$ ve výrazech $\mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha}$ (při užití indexů $(\,\mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p} = \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}$) však zdůrazňuje fakt, že divergence nezávisí na konkrétní volbě beztorzní kovariantní derivace. Navíc, pro kovariantní derivci s torzí je výraz pro divergenci trochu složitější, viz marginálii M10.2.

Důkaz:

Vyjdeme z definice D10.1 divergence, definice D5.19 hustotního duálu a vyjádření vnější derivace pomocí derivace kovariantní (věta V7.20):

$$\begin{aligned}\big(\mathbf{div}\,\boldsymbol{\alpha}\big)^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p} &= \big({}^\star\mathbf{d}{}^\star\boldsymbol{\alpha}\big)^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p} = \frac{1}{(d{-}p)!}\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_{p+1}}{}^\star\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{a}_{p+2}\dots\boldsymbol{a}_d}\\ &= \frac{d{-}p}{(d{-}p)!}\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d}\,\boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}_{p+1}}{}^\star\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{a}_{p+2}\dots\boldsymbol{a}_d]}\\ &= \frac{1}{(d{-}p{-}1)!(p{+}1)!}\,\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}_{p+1}}\big(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d}\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_{p+1}\boldsymbol{a}_{p+2}\dots\boldsymbol{a}_d}\,\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_{p+1}}\big)\\ &= \tbinom{d}{p+1}\,\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}_{p+1}}\Big({}^{[d]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_{p+1}\boldsymbol{c}_{p+2}\dots\boldsymbol{c}_d}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_{p+1}\boldsymbol{c}_{p+2}\dots\boldsymbol{c}_d}\,\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_{p+1}}\Big) = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p\boldsymbol{n}}\ .\end{aligned}$$

M10.2 Divergence a derivaci s torzí
Pro kovariantní derivaci s torzí se vztah k divergenci mírně komplikuje. Pro $p \geq 1$ platí

$$\begin{aligned}\big(\mathbf{div}\,\boldsymbol{\alpha}\big)^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p} &= \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p\boldsymbol{k}}\\ &\quad + \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{kn}}\,\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p\boldsymbol{k}}\\ &\quad - (-1)^p\frac{p}{2}\,\boldsymbol{T}^{[\boldsymbol{a}_1}_{\boldsymbol{kl}}\,\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{a}_2\dots\boldsymbol{a}_p]\boldsymbol{kl}}\ .\end{aligned}$$

Pro $p = 0$ poslední člen vymizí. Při alternativní volbě znamének lze s výhodou užít jiné pořadí indexů

$$\begin{aligned}\big(\,\mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\alpha}\big)^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p} &= \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{k}\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}\\ &\quad + \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{kn}}\,\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{k}\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p} - \frac{p}{2}\,\boldsymbol{T}^{[\boldsymbol{a}_1}_{\boldsymbol{kl}}\,\boldsymbol{\alpha}^{|\boldsymbol{kl}|\boldsymbol{a}_2\dots\boldsymbol{a}_p]}\ .\end{aligned}$$

Tyto vztahy odvodíme rozkladem kovariantní derivace na její beztorzní část a pseudoderivaci determinovanou torzí podle lemmatu V7.15 a užitím věty V10.9.

V závěru jsme použili vlastnosti tenzoru orientace (vztah (ii) věty V5.6) a antisymetrické jednotky (věta V1.2). ■

Užitím souřadnicové kovariantní derivace dostaneme vyjádření divergence a rotace pomocí souřadnic:

Lemma V10.10 (Divergence a rotace v souřadnicích)

Pro tenzorovou hustotu $\boldsymbol{\alpha}$ stupně $p+1$ platí

$$\big(\mathbf{div}\,\alpha\big)^{n_1\dots n_p} = \alpha^{n_1\dots n_p n}{}_{,n}\ , \tag{div}$$

tj. $\mathbf{div}\,\boldsymbol{\alpha} = \alpha^{n_1\dots n_p n}{}_{,n}\,\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^{n_1}}\cdots\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^{n_p}}\,d^d x$.

Pro rotaci antisymetrické formy $\boldsymbol{\omega}$ stupně $d-p-1$ dostaneme

$$(\tilde{\mathbf{rot}}\,\omega)^{n_1\dots n_p} = \sum_{n_{p+1}\neq n_1,\dots n_p} \sigma\ \omega_{n_{p+2}\dots n_d,n_{p+1}}\ , \tag{rot}$$

kde hodnoty indexů $n_{p+2},\,\dots,\,n_d$ jsou jednoznačně dány podmínkou, že jsou různé od hodnot indexů $n_1,\,\dots,\,n_{p+1}$ a jsou uspořádané podle velikosti, tj. $n_{p+2}<\dots<n_d$. Znaménko σ je znaménko permutace všech indexů $n_1,\,\dots,\,n_d$ vůči d-tici $1,\,2,\,\dots,\,d$. □

DŮKAZ:

První vztah je přímé užití souřadnicové kovarinatní derivace ve větě V10.9. Druhý vztah pak plyne ze souřadnicového vyjádření vnější derivace (viz lemma V4.1) a tenzoru orientace (vztah (iv) v lemmatu V5.6). ■

Dále se obraťme k druhým kovariantním derivacím hustot.

Věta V10.11 (Operátor křivosti na hustotách)

Komutátor druhé kovariantní derivace je dán operátorem křivosti

$$\boldsymbol{\nabla_k\nabla_l} - \boldsymbol{\nabla_l\nabla_k} + \boldsymbol{T^n_{kl}\nabla_n} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{kl}}\ ,$$

který na hustotách působí jako pseudoderivace – pro hustotu $\mathfrak{a}$ váhy w lze psát

$$\mathbf{R}_{\boldsymbol{kl}}\mathfrak{a} = -w\,\boldsymbol{r_{kl}}\,\mathfrak{a}\ .$$

Tenzor křivosti $\boldsymbol{r_{kl}}$ derivace $\boldsymbol{\nabla}$ na $\boldsymbol{H}M$ lze explicitně vyjádřit jako

$$\boldsymbol{r_{kl}} = -\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{k}}\big(\mathfrak{o}^{-1}\boldsymbol{\nabla_l}\mathfrak{o}\big)\ ,$$

kde $\mathfrak{o}$ je libovolná hustota váhy 1. □

DŮKAZ:

To že komutátor působí na hustotách jako pseudoderivace se dokazuje stejně jako obdobné tvrzení platné pro tečné tenzory (lemma V7.21). Akce operátoru křivosti na hustoty je pak dána větou V10.6, kde $\boldsymbol{r_{kl}}$ charakterizuje akci na hustotách váhy 1.

Vyjádření tenzoru $\boldsymbol{r_{kl}}$ dostaneme, rozepíšeme-li vnější derivaci pomocí kovariantní derivace (věta V7.20 či marginálie M7.7), použijeme Leibnizovo pravidlo a pravidlo pro derivování mocniny:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_{\boldsymbol{k}}\big(\mathfrak{o}^{-1}\boldsymbol{\nabla_l}\mathfrak{o}\big) &= \boldsymbol{\nabla_k}\big(\mathfrak{o}^{-1}\boldsymbol{\nabla_l}\mathfrak{o}\big) - \boldsymbol{\nabla_l}\big(\mathfrak{o}^{-1}\boldsymbol{\nabla_k}\mathfrak{o}\big) + \boldsymbol{T^n_{kl}}\,\mathfrak{o}^{-1}\boldsymbol{\nabla_n}\mathfrak{o}\\ &= \mathfrak{o}^{-1}\big(\boldsymbol{\nabla_k\nabla_l}\mathfrak{o} - \boldsymbol{\nabla_l\nabla_k}\mathfrak{o} + \boldsymbol{T^n_{kl}}\,\boldsymbol{\nabla_n}\mathfrak{o}\big)\\ &\qquad - \mathfrak{o}^{-2}\big((\boldsymbol{\nabla_k}\mathfrak{o})(\boldsymbol{\nabla_l}\mathfrak{o}) - (\boldsymbol{\nabla_l}\mathfrak{o})(\boldsymbol{\nabla_k}\mathfrak{o})\big)\\ &= \mathfrak{o}^{-1}\mathbf{R}_{\boldsymbol{kl}}\mathfrak{o} = -\boldsymbol{r_{kl}}\ .\end{aligned}$$ ■

Pokud je působení kovariantní derivace na hustotách dáno rozšířením derivace z tečného prostoru, dostaneme i rozšíření tenzoru křivosti.

M10.3 Derivace anihilující hustotu

Podle (10.3) souřadnicová kovariantní derivace anihiluje souřadnicový objemový element $d^d x$. Je přirozené se ptát, zda ke každé hustotě $\mathfrak{a}$ existuje kovariantní derivace, která ji anihiluje. Odpověď je kladná. Nechť $\boldsymbol{\partial}$ je libovolná souřadnicová derivace, pomocí které definujeme 1-formu $\boldsymbol{\lambda} = \mathfrak{a}^{-1}\boldsymbol{\partial}\mathfrak{a}$. Pak beztorzní kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$ lišící se od $\boldsymbol{\partial}$ rozdílovým tenzorem

$$\boldsymbol{\Gamma^n_{kl}} = \frac{1}{d+1}\left(\boldsymbol{\delta^n_k\lambda_l} + \boldsymbol{\delta^n_l\lambda_k}\right)\ ,$$

tj. $\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\partial} + \mathbf{tens}[\boldsymbol{\Gamma}]$, zachovává hustotu $\mathfrak{a}$:

$$\boldsymbol{\nabla}\mathfrak{a} = 0\ .$$

Díky $\mathbf{Tor}[\boldsymbol{\partial}] = 0$ a symetrii $\boldsymbol{\Gamma}$ okamžitě dostáváme torzi derivace $\boldsymbol{\nabla}$

$$\boldsymbol{T} = 0\ ,$$

aplikací vět V10.11 a V10.12 na hustotu $\mathfrak{a}$ pak podmínku na Riemannův tenzor

$$\boldsymbol{R_{kl}{}^n{}_n} = 0\ . \tag{*}$$

Můžeme si položit i opačnou otázku: kdy k dané beztorzní kovariantní derivaci existuje hustota, která je touto derivací anihilována? Odpověď je (alespoň lokálně, na topologicky jednoduchých oblastech) dána právě podmínkou (*). Již jsme ukázali, že se jedná o podmínku nutnou. Předpokládejme nyní, že je tato podmínka splněna. Podle věty V10.11 tak pro libovolnou hustotu $\mathfrak{o}$ váhy 1 máme

$$\mathbf{d}\big(\mathfrak{o}^{-1}\boldsymbol{\nabla}\mathfrak{o}\big) = 0\ .$$

Podle Poincareho lemmatu V4.5 musí (na topologicky jednoduché oblasti) existovat funkce, nazvěme ji $-\log f$, taková že

$$\mathfrak{o}^{-1}\boldsymbol{\nabla}\mathfrak{o} = -\,\mathbf{d}\log f = -f^{-1}\,\mathbf{d}f\ .$$

Dostáváme tak, že hustota $f\mathfrak{o}$ je derivací $\boldsymbol{\nabla}$ anihilována:

$$\boldsymbol{\nabla}(f\mathfrak{o}) = 0\ .$$

Věta V10.12 (Riemannův tenzor působící na hustotách)
Pro kovariantní derivaci indukovanou z tečného prostoru je operátor křivosti dán Riemannovým tenzorem, tj. na hustotách váhy w působí:

$$\mathsf{R}_{\boldsymbol{kl}}\,\mathfrak{o} = -w\,\mathbf{Tr}\mathbf{R}_{\boldsymbol{kl}}\,\mathfrak{o}\ .$$

Připomeňme, že $\mathbf{Tr}\mathbf{R}_{\boldsymbol{kl}} = \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{kl}}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{n}}$ □

POZNÁMKA
Obdobně jako pro operátor křivosti působící na tečném prostoru (viz definice D7.21 a D7.22 a větu V7.23) budeme užívat též operátor

$$\mathsf{R}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^{k}\boldsymbol{b}^{l}\mathsf{R}_{kl} = \boldsymbol{\nabla_a}\boldsymbol{\nabla_b} - \boldsymbol{\nabla_a}\boldsymbol{\nabla_b} - \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}\ ,$$

pro který platí

$$\mathsf{R}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\,\mathfrak{o} = \mathbf{tens}[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})]\,\mathfrak{o} = -w\,\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{n}}\,\mathfrak{o}\ .$$

DŮKAZ:
Vztahy mezi komutátory a operátory křivosti kopírují obdobné vztahy na tečném prostoru – viz definice D7.21, D7.22 a větu V7.23. Operátor křivosti na tečném prostoru je pseudoderivace dána Riemanovým tenzorem. Její rozšíření na hustoty je dáno větou V10.6. ■

Nakonec ukážeme vztah mezi Laplaceovým operátorem vytvořeným pomocí kovariantní derivace a vnějším Laplaceovým operátorem zavedeným v definici D10.3. Platí

Věta V10.13 (Weitzenböckova identita)
Mějme varietu s metrikou $\boldsymbol{g}$. Nechť $\boldsymbol{\nabla}^2 = \boldsymbol{g}^{\boldsymbol{ab}}\boldsymbol{\nabla_a}\boldsymbol{\nabla_b}$ je Laplaceův operátor definovaný pomocí metrické kovariantní derivace a $\triangle$ je vnější Laplaceův operátor z definice D10.3. Pro vnější formu $\boldsymbol{\omega}$ stupně p platí tzv. *Weitzenböckova identita*

$$\begin{aligned}\triangle\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_p} &= -\boldsymbol{\nabla}^2\,\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_p} + p\,\mathbf{Ric}_{\boldsymbol{n}[\boldsymbol{a}_1}\,\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{a}_2\ldots\boldsymbol{a}_p]}\\ &\quad - \frac{p\,(p-1)}{2}\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{mn}[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}\,\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{mn}}{}_{\boldsymbol{a}_3\ldots\boldsymbol{a}_p]}\ .\end{aligned}$$ □

DŮKAZ:
Podle (10.1) k určení $\triangle\boldsymbol{\omega}$ potřebujeme vyčíslit $\mathbf{div}\,\mathbf{d}\,\boldsymbol{\omega}$ a $\mathbf{d}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\omega}$. Použitím věty V10.9 a vyjádřením vnější derivace pomocí kovariantní (věta V7.20) a vlastnosti antisymetrizace dostaneme

$$\begin{aligned}\big(\mathbf{div}\,\mathbf{d}\,\boldsymbol{\omega}\big)_{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_p} &= \boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{n}}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_1}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_2\ldots\boldsymbol{a}_p\boldsymbol{n}}\\ &= (-1)^p\,\boldsymbol{\nabla}^2\,\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_p} - \sum_{k=1}^{p}(-1)^k\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}_k}\boldsymbol{\omega}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo }\boldsymbol{a}_k}\boldsymbol{n}}\ .\end{aligned}$$

Obdobně

$$\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_1}\big(\mathbf{div}\,\boldsymbol{\omega}\big)_{\boldsymbol{a}_2\ldots\boldsymbol{a}_p} = \mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_1}\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_2\ldots\boldsymbol{a}_p\boldsymbol{n}} = -\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}_k}\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\omega}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo }\boldsymbol{a}_k}\boldsymbol{n}}\ .$$

Vidíme, že pro $\triangle\boldsymbol{\omega} = (-1)^{p+1}(\mathbf{div}\,\mathbf{d}\,\boldsymbol{\omega} - \mathbf{d}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\omega})$ dostáváme $-\boldsymbol{\nabla}^2\,\boldsymbol{\omega}$ plus člen, který budeme dále upravovat:

$$\begin{aligned}&(-1)^p\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\boldsymbol{g}^{\boldsymbol{an}}\big[\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}_k} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}_k}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\big]\boldsymbol{\omega}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo }\boldsymbol{a}_k}\boldsymbol{n}}\\ &\quad= \sum_{k=1}^{p}(-1)^{p+k}\boldsymbol{g}^{\boldsymbol{an}}\,\mathsf{R}_{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}_k}\boldsymbol{\omega}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo }\boldsymbol{a}_k}\boldsymbol{n}}\ .\end{aligned}$$

Zde jsme zaměnili komutátor beztorzní kovariantní derivace operátorem křivosti. Akce operátoru křivosti na $\boldsymbol{\omega}$ je součtem zúžení Riemannova tenzoru s každým indexem formy $\boldsymbol{\omega}$. Rozdělíme sčítance na ty se zúženým indexem před a po 'chybějícím' indexu $\boldsymbol{a}_k$ a na sčítanec odpovídající indexu $\boldsymbol{n}$. Dostaneme

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{k-1}(-1)^{p+k}\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{a}_k}{}^{\boldsymbol{m}}{}_{\boldsymbol{a}_l}\,\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_{l-1}\boldsymbol{m}\underbrace{\dots\boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo }\boldsymbol{a}_k}\boldsymbol{n}}+\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=k+1}^{p}(-1)^{p+k}\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{a}_k}{}^{\boldsymbol{m}}{}_{\boldsymbol{a}_l}\,\boldsymbol{\omega}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\dots}_{\text{mimo }\boldsymbol{a}_k}\boldsymbol{m}\boldsymbol{a}_{l+1}\dots\boldsymbol{a}_p\boldsymbol{n}}\\
&\qquad+\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p+k}\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{a}_k}{}^{\boldsymbol{m}}{}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{\omega}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo }\boldsymbol{a}_k}\boldsymbol{m}}\\
&=\sum_{\substack{k,\,l\\1\le l<k\le p}}(-1)^{k+l+1}\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{m}}{}_{\boldsymbol{a}_l}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{a}_k}\,\boldsymbol{\omega}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo }\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_l}\boldsymbol{m}\boldsymbol{n}}+\sum_{\substack{k,\,l\\1\le k<l\le p}}(-1)^{k+l}\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{a}_k}{}^{\boldsymbol{m}}{}_{\boldsymbol{a}_l}\,\boldsymbol{\omega}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo }\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_l}\boldsymbol{m}\boldsymbol{n}}\\
&\qquad-\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p+k}\mathbf{Ric}^{\boldsymbol{m}}{}_{\boldsymbol{a}_k}\,\boldsymbol{\omega}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo }\boldsymbol{a}_k}\boldsymbol{m}}\;.
\end{aligned}$$

Zde jsme v první sumě využili symetrii Riemannova tenzoru vůči záměně prvního a druhého páru indexů a s pomocí antisymetrie $\boldsymbol{\omega}$ jsme prokomutovali index $\boldsymbol{m}$ na předposlední pozici. V posledním členu jsme vedle symetrií Riemannova tenzoru užili definic Ricciho tenzoru. Nyní v první sumě zaměníme indexy $\boldsymbol{m}$ a $\boldsymbol{n}$ a sčítací indexy k a l a tak s využitím antisymetrie $\boldsymbol{\omega}$ v indexech $\boldsymbol{m}$ a $\boldsymbol{n}$ zjistíme, že obě sumy jsou totožné. Dohromady dostáváme:

$$\begin{aligned}
&2\sum_{\substack{k,\,l\\1\le k<l\le p}}(-1)^{k+l+1}\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{m}}{}_{\boldsymbol{a}_k}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{a}_l}\,\boldsymbol{\omega}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo }\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_l}\boldsymbol{m}\boldsymbol{n}}+\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k}\,\mathbf{Ric}^{\boldsymbol{m}}{}_{\boldsymbol{a}_k}\,\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{m}\underbrace{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo }\boldsymbol{a}_k}}\\
&\quad=\frac{2\,p!}{2!(p-2)!}\,\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{m}}{}_{[\boldsymbol{a}_1}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{a}_2}\,\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_3\dots\boldsymbol{a}_p]\boldsymbol{m}\boldsymbol{n}}-\frac{p!}{1!(p-1)!}\,\mathbf{Ric}_{\boldsymbol{m}[\boldsymbol{a}_1}\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{m}}{}_{\boldsymbol{a}_2\dots\boldsymbol{a}_p]}\;,
\end{aligned}$$

přičemž jsme použili rozpis vnějšího násobení pomocí antisymetrizace (definice D4.2) a pomocí vztahů z marginálie M4.2. Zbývá nám tedy dokázat

$$2\,\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{m}}{}_{[\boldsymbol{a}_1}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{a}_2}\,\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_3\dots\boldsymbol{a}_p]\boldsymbol{m}\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{m}\boldsymbol{n}[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}\,\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{m}\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{a}_3\dots\boldsymbol{a}_p]}\;. \tag{*}$$

Tento vztah plyne ze symetrií Riemanova tenzoru a první Bianchiho identity (viz věta V7.28) zúžené ve dvou indexech s antisymetrickou tenzorem

$$\begin{aligned}
0&=\big(\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{mnab}}+\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{mabn}}+\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{mbna}}\big)\,\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{mn}}\\
&=\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{mnab}}\,\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{mn}}-\big(\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{manb}}-\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{namb}}\big)\,\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{mn}}\;.
\end{aligned}$$

Užitím antisymetrie v $\boldsymbol{mn}$ dostaneme tvrzení (*) a po dosazení i dokončení celého důkazu. ∎

10.3 Integrální věty

Tato podkapitola je neúplná – obsahuje pouze znění několika podob integrálních vět bez dalších komentářů. Podkapitola bude časem rozšířena.

Věta V10.14 (Gaussova–Stokesova věta pro formy)
$\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}^{d-1} M$

$$\int\limits_{\Omega \subset M} \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{\omega}\big|_{\partial\Omega} \,.$$

$\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}^{d-p} M$, N je podvarieta M dimenze $\dim N = d - p + 1$

$$\int\limits_{\Omega \subset N} \mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\big|_N = \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{\omega}\big|_{\partial\Omega} \,. \qquad \square$$

Věta V10.15 (Stokesova věta)
$\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}^{d-p} M$, N je podvarieta M dimenze $\dim N = d - p + 1$

$$\int\limits_{\Omega \subset N} \big(\tilde{\mathbf{rot}}\,\boldsymbol{\omega}\big)^{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_{p-1}} \tilde{\boldsymbol{dS}}_{N\,\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_{p-1}} = \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_{p+1} \dots \boldsymbol{a}_d}\, \boldsymbol{d\Sigma}_{\partial\Omega}^{\boldsymbol{a}_{p+1} \dots \boldsymbol{a}_d} \,. \qquad \square$$

Věta V10.16 (Gaussova věta)
$\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{Sect}\, \boldsymbol{\Lambda}_x^{\star p} M$, N je podvarieta M dimenze $\dim N = d - p + 1$

$$\int\limits_{\Omega \subset N} \big(\mathbf{div}\,\boldsymbol{\alpha}\big)^{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_{p-1}} \tilde{\boldsymbol{dS}}_{N\,\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_{p-1}} = \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p}\, \tilde{\boldsymbol{dS}}_{\partial\Omega\,\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p} \,. \qquad \square$$

Příklad P10.1 (Speciální případy)
Newtonův vzorec
$p = d$, γ ohraničená křivka v M, $\dim \gamma = 1$, $\dim \partial\gamma = 0$, $f \in \mathfrak{F} M$

$$\int\limits_{\gamma} \mathbf{d}f\big|_\gamma = \big[f\big]_{\partial\gamma} \tag{10.5}$$

Stokesova věta
$p = d - 1$, S ohraničená plocha v M, $\dim S = 2$, $\dim \partial S = 1$, $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}^1 M$

$$\int\limits_{S} (\tilde{\mathbf{rot}}\,\boldsymbol{\omega}) \cdot \tilde{\boldsymbol{dS}}_S = \int\limits_{\partial S} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{d\Sigma}_{\partial S} \tag{10.6a}$$

$$\int\limits_{S} \mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\big|_S = \int\limits_{\partial S} \boldsymbol{\omega}\big|_{\partial S} \tag{10.6b}$$

Gaussova věta
$p = 1$, Ω ohraničená oblast v M, $\dim \Omega = d$, $\dim \partial\Omega = d - 1$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{Sect}\, \boldsymbol{\Lambda}_x^{\star 1} M$

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{div}\,\boldsymbol{\alpha} = \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{\alpha} \cdot \tilde{\boldsymbol{dS}}_{\partial\Omega} \tag{10.7}$$