Kapitola 10

Derivace hustot a integrální věty

Nyní navážeme na látku vyloženou v kapitole 5. Zde byly zavedeny integrovatelné hustoty, hustotní duál a definovali jsme integrování tenzorových hustot a forem. V následujících kapitolách jsme zavedli další geometrické struktury jako je metricka a kovariantní derivace. Máme tak připravené prostředky pro definici diferenciálních operátorů působících na různé typy tenzorových hustot a pro formulaci integrálních vět – zobecnění Gausovy a Stokesovy věty.

10.1 Diferenciální operátory divergence a rotace

V euklidovském třídimenionálním prostoru jsou velmi užitečné vektorové diferenciálních operátory **grad**, **div** a **rot**. Tyto operátory hrají klíčovou roli ve formulaci integrálních vět. Pomocí hustotního duálu můžeme definovat analogie těchto vektorových operátorů působících na vhodné tenzorové hustoty a antisymetrické formy. Ukazuje se, že takto definované operátory divergence **div** a rotace $\tilde{\mathbf{rot}}$ nepotřebují dodatečnou geometrickou strukturu. Jak operátor **div**, tak $\tilde{\mathbf{rot}}$ jsou totiž modifikací vnější derivace pomocí operace hustotního duálu. Divergence **div** není nic jiného než operace duální k vnější derivaci a rotace $\tilde{\mathbf{rot}}$ je dána hustotním duálem vnější derivace.

Definice D10.1 (Divergence a rotace)

Pro tenzorovou hustotu $\boldsymbol{\alpha} \in \operatorname{Sect} \boldsymbol{\Lambda}^{\star p+1} M$ stupně $p+1$ definujeme *divergenci* $\mathbf{div}\, \boldsymbol{\alpha} \in \operatorname{Sect} \boldsymbol{\Lambda}^{\star p} M$ následovně:

$$\mathbf{div}\, \boldsymbol{\alpha} = {}^\star \mathbf{d} {}^\star \boldsymbol{\alpha} \,. \qquad \text{(divergence)}$$

Podobně definujeme *rotaci* $\tilde{\mathbf{rot}}\, \boldsymbol{\omega} \in \operatorname{Sect} \boldsymbol{\Lambda}^{\star d-p} M$ antisymetrické formy $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}^{p-1} M$ vztahem

$$\tilde{\mathbf{rot}}\, \boldsymbol{\omega} = {}^\star \mathbf{d} \boldsymbol{\omega} \,. \qquad \text{(rotace)}$$

∘

Poznámka

Operátor divergence se v literatuře zavádí s různou znaménkovou konvencí. Zde zvolená konvence vede k jednoduchému tvaru Gaussovy věty. V aplikacích zaměřených na antisymetrické formy (a k nim duální tenzorové hustoty) se častěji zavádí operátor $\boldsymbol{\delta}$ lišící se při akci na tenzorovou hustotu stupně $p+1$ znaménkem $\boldsymbol{\delta\alpha} = (-1)^{p+1}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\alpha}$. Jelikož symbol $\boldsymbol{\delta}$ máme již značně přetížený, zavedeme alternativní značení $\mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\delta\alpha}$. Pomocí abstraktních indexů budeme tento operátor psát $\mathbf{d}_{n}\boldsymbol{\alpha}^{n a_1 \dots a_p}$. Označení divergence formální kontrakcí $\mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\alpha}$ je motivováno výrazem pro divergenci pomocí kovariantní derivace – viz větu V10.9 níže.

POZNÁMKA
Operátor rotace $\tilde{\mathbf{rot}}$ se pro formy vyššího stupně v obecné dimenzi většinou nezavádí. Zde uvedená definice zobecňuje standardní operátor rotace z třídimenzionálního euklidovského prostoru tak, aby pro něj platilo zobecnění Stokesovy věty, viz věta V10.15. Vlnka použitá v označení tohoto operátoru zdůrazňuje, že výsledkem je tenzorová hustota. V definici D10.2 totiž ještě zavedeme rotaci $\mathbf{rot}$ jejíž výsledek je antisymetrická forma.

Díky vlastnostem hustotního duálu a vnější derivace okamžitě dostáváme:

Lemma V10.1 (Vlastnosti divergence a rotace)
Pro libovolnou tenzorovou hustotu $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{Sect}\,\boldsymbol{\Lambda}^{\star p} M$ a antisymetrickou formu $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}^p M$ platí

$$\begin{aligned}\mathbf{div}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\alpha} &= 0\ ,\\ \mathbf{div}\,\tilde{\mathbf{rot}}\,\boldsymbol{\omega} &= 0\ .\end{aligned}$$ □

V kapitole 6 jsme pomocí metrické struktury zavedli Hodgeův duál (definice D6.14). Ten nám umožní definovat diferenciální operátory i na objektech, které nemají charakter hustot. Konkrétně můžeme zavést operátory $\mathbf{div}$ a $\mathbf{rot}$ působící na antisymetrických formách, dávající jako výsledky opět antisymetrické formy.

Definice D10.2 (Divergence a rotace antisymetrických forem)
Divergence a *rotace* na antisymetrických formách jsou definované vztahy:

$$\begin{aligned}\mathbf{div}\,\boldsymbol{\omega} &= (\operatorname{sign}\boldsymbol{g})(-1)^{p(d-p)}\,{}^{*}\mathbf{d}\,{}^{*}\boldsymbol{\omega}\ ,\\ &\qquad \text{pro}\quad \boldsymbol{\omega}\in\mathcal{A}^{p+1}M\ ,\quad \mathbf{div}\,\boldsymbol{\omega}\in\mathcal{A}^{p}M\ ,\\ \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega} &= (\operatorname{sign}\boldsymbol{g})(-1)^{p(d-p)}\,{}^{*}\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\ ,\\ &\qquad \text{pro}\quad \boldsymbol{\omega}\in\mathcal{A}^{d-p-1}M\ ,\quad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega}\in\mathcal{A}^{p}M\ .\end{aligned}$$

Zde d je dimenze variety. ◦

POZNÁMKA
Obdobně jako pro divergenci na tenzorových hustotách zavedeme na formách označení pro divergenci s alternativní znaménkovou konvencí

$$\mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\delta\omega} = (-1)^p\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\omega} \qquad \text{pro}\quad \boldsymbol{\omega}\in\mathcal{A}^{p+1}M\ .$$

Operátor $\boldsymbol{\delta}$ se nazývá *ko-derivace*.

Nepřehledné znaménko v těchto definicích se zjednoduší, pokud si uvědomíme, že inverze k Hodgeovu duálu * je právě $(\operatorname{sign}\boldsymbol{g})(-1)^{p(d-p)}\,{}^{*}$. Vztahy pro oba operátory můžeme pak přepsat v alternativní formě:

Lemma V10.2 (Divergence, rotace a Hodgeův duál)

$$\begin{aligned}{}^{*}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\omega} &= \mathbf{d}^{*}\boldsymbol{\omega}\ ,\\ {}^{*}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega} &= \mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\ .\end{aligned}$$ □

DŮKAZ:
Viz lemma V6.5 a definici D10.2. ∎

Právě zavedené operátory jsou analogické operátorům definovaným v definici D10.1 pomocí hustotního duálu. Platí totiž

M10.1 Vektorové operátory pro $d = 3$
V třídimenzionálním prostoru s riemanovskou metrikou se definují operátory divergence a rotace pro vektorová pole. Využitím identifikace vektorů a 1-forem můžeme tyto operátory zavést následovně:

$$\begin{aligned}\mathbf{div}\,\boldsymbol{a} &= {}^{\sharp}\,\mathbf{div}\,{}^{\flat}\boldsymbol{a} = {}^{\sharp *}\mathbf{d}^{*\flat}\boldsymbol{a}\ ,\\ \mathbf{rot}\,\boldsymbol{a} &= {}^{\sharp}\,\mathbf{rot}\,{}^{\flat}\boldsymbol{a} = {}^{\sharp *}\,\mathbf{d}^{\flat}\boldsymbol{a}\ .\end{aligned}$$

Pomocí hustotního duálu mají tyto operace tvar

$$\begin{aligned}\mathbf{div}\,\boldsymbol{a} &= \mathfrak{g}^{-1/2}\,\mathbf{div}\big(\mathfrak{g}^{1/2}\boldsymbol{a}\big) = \mathfrak{g}^{-1/2\star}\mathbf{d}^{\star}\big(\mathfrak{g}^{1/2}\boldsymbol{a}\big)\ ,\\ \mathbf{rot}\,\boldsymbol{a} &= \mathfrak{g}^{-1/2}\,\tilde{\mathbf{rot}}\,{}^{\flat}\boldsymbol{a} = \mathfrak{g}^{-1/2\star}\,\mathbf{d}^{\flat}\boldsymbol{a}\ .\end{aligned}$$

Dále se zavádí gradient skalární funkce

$$\mathbf{grad}\,f = {}^{\sharp}\mathbf{d}f$$

a Laplaceův operátor skalární funkce a vektorového pole

$$\begin{aligned}\triangle f &= -\,\mathbf{div}\,\mathbf{grad}\,f\ ,\\ \triangle\boldsymbol{a} &= -\,\mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{a} + \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{a}\ .\end{aligned}$$

Při použití konvence automatického snižování a zvyšování indexů jsou tyto operátory speciálním případem operátorů zavedeným v definicích D10.2 a D10.3.

Lemma V10.3 (Vztahy pro divergence a rotace)
Divergence a rotace antisymetrické formy $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}^p M$ lze vyjádřit pomocí divergence a rotace definovaných pomocí hustotního duálu

$$\begin{aligned}\mathbf{div}\,\boldsymbol{\omega} &= \mathfrak{g}^{-1/2\ \flat}\,\mathbf{div}\big(\mathfrak{g}^{1/2\ \sharp}\boldsymbol{\omega}\big) = \mathfrak{g}^{-1/2\ \flat\star}\mathbf{d}^{\star}\big(\mathfrak{g}^{1/2\ \sharp}\boldsymbol{\omega}\big)\ ,\\ \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega} &= \mathfrak{g}^{-1/2\ \flat}\,\tilde{\mathbf{rot}}\,\boldsymbol{\omega} = \mathfrak{g}^{-1/2\ \flat\star}\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\ .\end{aligned}$$ □

Důkaz:
Oba vztahy se dostanou pomocí lemmatu V6.5 a porovnáním definic D10.1 a D10.2. ■

Dále definujeme tzv. vnější Laplaceův operátor:

Definice D10.3 (Vnější Laplaceův operátor)
Mějme varietu M dimenze d s metrikou $\boldsymbol{g}$. *Vnější Laplaceův operátor* (nazývaný též *de Rhamův–Laplaceův operátor*) působící na antisymetrických formách stupně p definujeme

$$\triangle\boldsymbol{\omega} = -(\operatorname{sign}\boldsymbol{g})(-1)^{pd}\big({}^*\mathbf{d}\,{}^*\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} + (-1)^d\,\mathbf{d}\,{}^*\mathbf{d}\,{}^*\boldsymbol{\omega}\big)\ .$$ ○

Pomocí definice D10.2 můžeme přepsat vnější Laplaceův operátor v alternativních formách

$$\begin{aligned}\triangle\boldsymbol{\omega} &= (-1)^{p+1}\,\big(\mathbf{div}\,\mathbf{d}\,\boldsymbol{\omega} - \mathbf{d}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\omega}\big)\\ &= (-1)^p\,\mathbf{d}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\omega} + (\operatorname{sign}\boldsymbol{g})(-1)^{(p+1)d}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega}\\ &= -\,\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{d}\,\mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\omega} = [\,\mathbf{d} - \mathbf{d}\cdot\,]^2\,\boldsymbol{\omega}\\ &= \boldsymbol{\delta}\,\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{d}\,\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\omega} = [\,\mathbf{d} + \boldsymbol{\delta}\,]^2\,\boldsymbol{\omega}\ ,\end{aligned} \tag{10.1}$$

kde jsme využili $\mathbf{d}\,\mathbf{d} = \mathbf{d}\cdot\,\mathbf{d}\cdot = 0$.

Poznamenejme, že vnější Laplaceův operátor se v obecnosti liší od Laplaceova operátoru definovaného pomocí kovariantní derivace – viz větu V10.13 níže.

10.2 Kovariantní derivace integrovatelných hustot

V kapitole 7 jsme zavedli kovariantní derivaci, pomocí které můžeme zkoumat změny obecných tenzorových polí. Obdobně můžeme zavést kovariantní derivaci na integrovatelných hustotách. V analogii s definicí D7.4 (viz též větu V7.1) definujeme

Definice D10.4 (Kovariantní diferenciál na hustotách)
Kovariantní diferenciál $\boldsymbol{\nabla}\mathfrak{a}$ integrovatelné hustoty $\mathfrak{a} \in \tilde{\mathfrak{F}}^w M$ váhy w je tenzorová hustota z $\tilde{\mathfrak{T}}^{w\,0}_{\ \ 1} M$ splňující

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\big(\mathfrak{a} + r\mathfrak{b}\big) &= \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\mathfrak{a} + r\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\mathfrak{b}\ , && \text{(linearita)}\\ \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\,\big(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\big) &= \big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\mathfrak{a}\big)\,\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\,\big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\mathfrak{b}\big)\ , && \text{(Leibniz)}\\ \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}} f &= \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} f\ , && \text{(působení na funkce)}\end{aligned}$$

kde f je funkce, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ integrovatelné hustoty obecných vah a $r \in \mathbb{R}$. Kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\mathfrak{a}$ ve směru $\boldsymbol{v}$ je pak dána zúžením vektorového pole $\boldsymbol{v}$ s kovariantním diferenciálem $\boldsymbol{\nabla}\mathfrak{a}$

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\mathfrak{a} = v^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\mathfrak{a}\ .$$ ○

Lemma V10.4 (Derivace mocniny)
Kovariantní diferencál mocniny hustoty $\mathfrak{a}$ je

$$\boldsymbol{\nabla}\mathfrak{a}^w = w\,\mathfrak{a}^{w-1}\,\boldsymbol{\nabla}\mathfrak{a}\ . \qquad \square$$

DŮKAZ:
Dokáže se obdobným způsobem jako vzorec pro derivaci mocniny funkce užitím Leibnizova pravidla a faktu, že na funkcích se kovariantní derivace chová jako gradient. ∎

CVIČENÍ C10.1
Ukažte! ✓

Kovariantní derivace na integrovatelných hustotách není dána jednoznačně. Prostor všech kovariantních derivací na hustotách lze vyšetřovat stejnými prostředky jaké jsme použili v kapitole 7 při zkoumání prostoru kovariantních derivací na tečných tenzorových prostorech. Rozdíl dvou kovariantních derivací je pseudoderivace typu $(0,1)$ působící na integrovatelných hustotách (viz definici D2.4 přímočaře rozšířenou na prostor integrovatelných hustot). Analogicky větě V2.4 lze akce pseudoreivace na hustotě váhy w vyjádřit pomocí akce psuderivace na hustotě váhy 1:

Lemma V10.5 (Působení pseudoderivace na hustotách)
Nechť M je pseudoderivace typu (p,q) působící na integrovatelných hustotách. Její působení na hustotách váhy 1 lze reprezentovat tenzorovým polem $\boldsymbol{M} \in \mathfrak{T}^p_q M$:

$$\mathsf{M}\mathfrak{a} = \boldsymbol{M}\,\mathfrak{a} \quad , \quad \mathfrak{a} \in \tilde{\mathfrak{F}} M\ .$$

Akce pseudoderivace na hustotu $\mathfrak{h}$ váhy w pak je

$$\mathsf{M}\mathfrak{h} = w\,\boldsymbol{M}\,\mathfrak{h} \quad , \quad \mathfrak{h} \in \tilde{\mathfrak{F}}^w M\ . \qquad \square$$

DŮKAZ:
První vztah dostaneme, uvážíme-li, že akce pseudoderivace je ultralokální. Pseudoderivace $\mathsf{M}\mathfrak{a}$ musí tedy jít napsat jako tenzorová operace a díky tomu, že prostor integrovatelných hustot (v jednom bodě) je jednodimenzionální, dostaneme faktorizaci $\boldsymbol{M}\,\mathfrak{a}$.
Druhý vztah je analogický vzorci pro derivace mocniny, který lze odvodit pomocí Leibnizova pravidla a faktu, že pseudoderivace anihiluje hustoty váhy 0 (tj. funkce). ∎

Dvě kovariantní derivace na integrovatelných hustotách se tedy liší pseudoderivací typu $(0,1)$, která lze charakterizovat 1-formou $\boldsymbol{\gamma}$. Konkrétně, pro hustotu $\mathfrak{a}$ váhy w máme

$$\tilde{\boldsymbol{\nabla}}\mathfrak{a} = \boldsymbol{\nabla}\mathfrak{a} + w\,\boldsymbol{\gamma}\,\mathfrak{a}\ . \tag{10.2}$$

Je-li zadána kovariantní derivace jak na tenzorových polích, tak na integrovatelných hustotách, můžeme definovat kovariantní derivaci působící na tenzorových hustotách $\tilde{\mathfrak{T}}^{w\,k}_{\ \ l} M$, tj. na řezech prostorů $\boldsymbol{T}^k_l M \otimes \boldsymbol{H}^w M$. Stačí požadovat, aby výsledná kovariantní derivace (či diferencál) splňovala standardní vlastnosti kovariantních derivací. Pomocí linearity a Leibnizova pravidla pak můžeme akci kovariantní derivace na tenzorových hustotách redukovat na derivaci na prostých tenzorech a prostých hustotách.

V kapitole 5 jsme však ukázali, že prostor hustot $\boldsymbol{H}U$ je na každé orientovatelné oblasti U variety M isomorfní s prostorem totálně antisymetrických forem $\boldsymbol{\Lambda}^d U$. Díky tomu můžeme indukovat kovariantní derivaci na hustotách z kovariantní derivace na tečných tenzorech — stačí požadovat, aby její akce byla ekvivalentní odpovídající akci na totálně antisymetrických formách.

Isomorfismus zprostředkující přechod od hustot k formám je určen tenzorem orientace $\tilde{\varepsilon}$ zavedeným v definici D5.18. Akci kovariantní derivace na hustoty můžeme tedy zavést požadavkem, aby tenzor orientace byl kovariantně konstantní:

Definice D10.5 (Rozšíření kovariantní derivace na hustoty)

Mějme na varietě M kovariantní derivaci $\boldsymbol{\nabla}$. Její rozšíření na integrovatelné hustoty obecné váhy musí splňovat

$$\boldsymbol{\nabla}\tilde{\varepsilon} = 0\ ,$$

kde $\tilde{\varepsilon}$ je tenzor orientace. ∘

Poznámka

Jelikož podmínka $\boldsymbol{\nabla}\tilde{\varepsilon} = 0$ nezávisí na změně znaménka tenzoru orientace, definice není závislá na volbě orientace. Není potřebná ani orientovatelnost variety, jelikož je dostatečné vyžadovat platnost podmínky pouze lokálně, na orientovatelných oblastech.

Obdobně rozšíříme i akci pseudoderivace

Definice D10.6 (Rozšíření pseudoderivace na hustoty)

Mějme na varietě M pseudoderivaci derivaci M. Její rozšíření na integrovatelné hustoty obecné váhy musí splňovat

$$\mathsf{M}\tilde{\varepsilon} = 0\ ,$$

kde $\tilde{\varepsilon}$ je tenzor orientace. ∘

Věta V10.6 (Akce rozšířené pseudoderivace na hustotách)

Mějme pseudoderivaci M, jejíž akce na vektorech je dána tenzorem $\boldsymbol{M} \in \mathfrak{T}^1_1 M$, tj. $\mathsf{M} = \mathbf{tens}[\boldsymbol{M}]$. Pak rozšíření pseudoderivace na hustoty váhy w splňuje

$$\mathsf{M}\mathfrak{a} = -w\, \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{n}}\ \mathfrak{a}\ .$$ □

Důkaz:

Podmínka $\mathsf{M}\tilde{\varepsilon} = 0$ je ekvivalentní podmínce $\mathsf{M}\tilde{\varepsilon}^{-1} = 0$. Vskutku, $\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}^{-1} = d!^{[d]}\boldsymbol{\delta}$, čili $\mathsf{M}\big(\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}^{-1}\big) = 0$ a pomocí Leibnizova pravidla dostaneme $\mathsf{M}\tilde{\varepsilon}^{-1} = 0$.

Lokálně můžeme inverzní tenzor orientace $\tilde{\varepsilon}^{-1}$ reprezentovat pomocí libovolné positivně orientované formy $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}^d M$ jako $\tilde{\varepsilon}^{-1} = |\boldsymbol{\omega}|\ \boldsymbol{\omega}^{-1}$. Použitím Leibnizova pravidla dostáváme $0 = \boldsymbol{\omega}^{-1}\mathsf{M}|\boldsymbol{\omega}| + |\boldsymbol{\omega}|\ \mathsf{M}\,\boldsymbol{\omega}^{-1}$ a s pomocí lemmat V1.2 a V1.3 pak můžeme psát

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}|\boldsymbol{\omega}| &= -\frac{1}{d!}\,|\boldsymbol{\omega}|\ \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d}\,\mathsf{M}\boldsymbol{\omega}^{-1\,\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d}\\
&= -\frac{1}{d!}\,|\boldsymbol{\omega}|\ \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\dots\boldsymbol{a}_d}\,\big(\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{a}_1}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{\omega}^{-1\,\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}_2\dots\boldsymbol{a}_d} + \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{a}_2}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{\omega}^{-1\,\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{n}\dots\boldsymbol{a}_d} + \dots\big)\\
&= -\frac{d}{d!}\,|\boldsymbol{\omega}|\ \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\dots\boldsymbol{a}_d}\,\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{a}_1}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{\omega}^{-1\,\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}_2\dots\boldsymbol{a}_d} = -d\,|\boldsymbol{\omega}|\,\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{a}_1}_{\boldsymbol{n}}\,{}^{[d]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{n}\ \boldsymbol{a}_2\dots\boldsymbol{a}_d}_{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\dots\,\boldsymbol{a}_d}\\
&= -\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{n}}\ |\boldsymbol{\omega}|
\end{aligned}$$

Tím jsme dokázali tvrzení věty pro hustotu váhy 1 tvaru $|\boldsymbol{\omega}|$. Ovšem v tomto tvaru lze (lokálně) zapsat každá hustota váhy 1. Pro hustoty váhy w tvrzení věty plyne z lemmatu V10.5. ■

Dvě kovariantní derivace rozšířené z tečného prostoru na hustoty se pak liší o pseudoderivaci indukovanou pseudoderivací definovanou na tečném prostoru

Věta V10.7 (Vztah dvou kovariantních derivací na hustotách)
Mějme kovariantní derivace $\tilde{\boldsymbol{\nabla}}$ a $\boldsymbol{\nabla}$ lišící se pseudoderivací $\boldsymbol{\Gamma}$ charakterizovanou rozdílovým tenzorem $\boldsymbol{\Gamma}$ Pak rozšíření na hustoty váhy w splňuje

$$\tilde{\boldsymbol{\nabla}}_{\boldsymbol{e}}\mathfrak{a} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{e}}\mathfrak{a} + \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{e}}\mathfrak{a} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{e}}\mathfrak{a} - w\,\boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{en}}\,\mathfrak{a}\ . \qquad \square$$

Důležitý příklad rozšíření kovariantní derivace na hustoty je případ souřadnicové kovariantní derivace $\boldsymbol{\partial}$ spojené se souřadnicemi x^j. Díky tomu, že $d^dx = \left|\mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^d\right|$, rozšíření souřadnicové kovariantní derivace bude splňovat

$$\boldsymbol{\partial}\, d^dx = 0\ , \tag{10.3}$$

čili, pro obecnou hustotu $\mathfrak{a}$ s komponentou $a = \mathfrak{a}[\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^i}]$ dostaneme

$$\boldsymbol{\partial}\mathfrak{a} = \mathbf{d}a\; d^dx\ . \tag{10.4}$$

Komponenty kovariantní derivace tenzorové hustoty pak lze vyjádřit pomocí parciálních derivací komponent a Christoffelových symbolů:

Věta V10.8 (Souřadnice kovariantní derivace tenzorových hustot)
Nechť je kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$ charakterizovaná vzhledem k souřadnicím x^j složkami Γ^j_{kl}. Pro obecné tenzorové pole $\boldsymbol{\alpha}$, které je zároveň hustotou váhy w, s komponentami $\alpha^{k_1k_2\dots}_{l_1l_2\dots}$, dostáváme

$$\begin{aligned}\alpha^{k_1k_2\dots}_{l_1l_2\dots;n} = \alpha^{k_1k_2\dots}_{l_1l_2\dots,n} &- w\,\Gamma^e_{ne}\,\alpha^{k_1k_2\dots}_{l_1l_2\dots}\\ &+ \Gamma^{k_1}_{ne}\,\alpha^{ek_2\dots}_{l_1l_2\dots} + \Gamma^{k_2}_{ne}\,\alpha^{k_1e\dots}_{l_1l_2\dots} + \dots\\ &- \Gamma^e_{nl_1}\,\alpha^{k_1k_2\dots}_{el_2\dots} - \Gamma^e_{nl_2}\,\alpha^{k_1k_2\dots}_{l_1e\dots} - \dots\ ,\end{aligned}$$

kde čárka značí parciální derivování podle x^j. $\square$

Divergence tenzorové hustoty zavedená v definici D10.1 lze jednoduše vyjádřit pomocí libovolné beztorzní kovariantní derivace

Věta V10.9 (Divergence pomocí kovariantní derivace)
Pro libovolnou kovarinatní derivaci $\boldsymbol{\nabla}$ bez torze platí

$$\big(\mathbf{div}\,\boldsymbol{\alpha}\big)^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p\boldsymbol{n}}\ ,$$

případně

$$\mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha}\ . \qquad \square$$

Poznámka
Tento vztah divergence ke kovariantní derivaci je motivací pro označení alternativního operátoru divergence $\mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\alpha}$ zavedeného v poznámce k definici D10.1. Nabízelo by se dokonce užít přímo označení $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha}$. Znak $\mathbf{d}$ ve výrazech $\mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha}$ (při užití indexů $(\mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p} = \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}$) však zdůrazňuje fakt, že divergence nezávisí na konkrétní volbě beztorzní kovariantní derivace. Navíc, pro kovariantní derivci s torzí je výraz pro divergenci trochu složitější, viz marginálii M10.2.

Důkaz:
Vyjdeme z definice D10.1 divergence, definice D5.19 hustotního duálu a vyjádření vnější derivace pomocí derivace kovariantní (věta V7.20):

$$\begin{aligned}\big(\mathbf{div}\,\boldsymbol{\alpha}\big)^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p} &= \big({}^\star\mathbf{d}{}^\star\boldsymbol{\alpha}\big)^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p} = \frac{1}{(d-p)!}\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_{p+1}}{}^\star\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{a}_{p+2}\dots\boldsymbol{a}_d}\\ &= \frac{d-p}{(d-p)!}\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d}\,\boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}_{p+1}}{}^\star\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{a}_{p+2}\dots\boldsymbol{a}_d]}\\ &= \frac{1}{(d-p-1)!(p+1)!}\,\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}_{p+1}}\big(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d}\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_{p+1}\boldsymbol{a}_{p+2}\dots\boldsymbol{a}_d}\,\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_{p+1}}\big)\\ &= \tbinom{d}{p+1}\,\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}_{p+1}}\Big({}^{[d]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_{p+1}\boldsymbol{c}_{p+2}\dots\boldsymbol{c}_d}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_{p+1}\boldsymbol{c}_{p+2}\dots\boldsymbol{c}_d}\,\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_{p+1}}\Big) = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p\boldsymbol{n}}\ .\end{aligned}$$

M10.2 Divergence a derivaci s torzí
Pro kovariantní derivaci s torzí se vztah k divergenci mírně komplikuje. Pro $p\geq 1$ platí

$$\begin{aligned}\big(\mathbf{div}\,\boldsymbol{\alpha}\big)^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p} &= \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p\boldsymbol{k}}\\ &\quad+ \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{kn}}\,\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p\boldsymbol{k}}\\ &\quad- (-1)^p\frac{p}{2}\,\boldsymbol{T}^{[\boldsymbol{a}_1}_{\boldsymbol{kl}}\,\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{a}_2\dots\boldsymbol{a}_p]\boldsymbol{kl}}\ .\end{aligned}$$

Pro $p=0$ poslední člen vymizí. Při alternativní volbě znamének lze s výhodou užít jiné pořadí indexů

$$\begin{aligned}\big(\mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\alpha}\big)^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p} &= \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{k}\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}\\ &\quad+ \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{kn}}\,\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{k}\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p} - \frac{p}{2}\,\boldsymbol{T}^{[\boldsymbol{a}_1}_{\boldsymbol{kl}}\,\boldsymbol{\alpha}^{|\boldsymbol{kl}|\boldsymbol{a}_2\dots\boldsymbol{a}_p]}\ .\end{aligned}$$

Tyto vztahy odvodíme rozkladem kovariantní derivace na její beztorzní část a pseudoderivaci determinovanou torzí podle lemmatu V7.15 a užitím věty V10.9.

V závěru jsme použili vlastnosti tenzoru orientace (vztah (ii) věty V5.6) a antisymetrické jednotky (věta V1.2). ■

Užitím souřadnicové kovariantní derivace dostaneme vyjádření divergence a rotace pomocí souřadnic:

Lemma V10.10 (Divergence a rotace v souřadnicích)

Pro tenzorovou hustotu $\boldsymbol{\alpha}$ stupně $p+1$ platí

$$\big(\mathbf{div}\,\alpha\big)^{n_1\dots n_p} = \alpha^{n_1\dots n_p n}{}_{,n}\ , \tag{div}$$

tj. $\mathbf{div}\,\boldsymbol{\alpha} = \alpha^{n_1\dots n_p n}{}_{,n}\,\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^{n_1}}\cdots\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^{n_p}}\,d^d x$.

Pro rotaci antisymetrické formy $\boldsymbol{\omega}$ stupně $d-p-1$ dostaneme

$$(\tilde{\mathbf{rot}}\,\omega)^{n_1\dots n_p} = \sum_{n_{p+1}\neq n_1,\dots n_p} \sigma\ \omega_{n_{p+2}\dots n_d,n_{p+1}}\ , \tag{rot}$$

kde hodnoty indexů $n_{p+2}, \dots, n_d$ jsou jednoznačně dány podmínkou, že jsou různé od hodnot indexů $n_1, \dots, n_{p+1}$ a jsou uspořádané podle velikosti, tj. $n_{p+2} < \dots < n_d$. Znaménko σ je znaménko permutace všech indexů $n_1, \dots, n_d$ vůči d-tici $1, 2, \dots, d$. □

DŮKAZ:

První vztah je přímé užití souřadnicové kovarinatní derivace ve větě V10.9. Druhý vztah pak plyne ze souřadnicového vyjádření vnější derivace (viz lemma V4.1) a tenzoru orientace (vztah (iv) v lemmatu V5.6). ■

Dále se obraťme k druhým kovariantním derivacím hustot.

Věta V10.11 (Operátor křivosti na hustotách)

Komutátor druhé kovariantní derivace je dán operátorem křivosti

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{l}} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{kl}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}} = \mathsf{R}_{\boldsymbol{kl}}\ ,$$

který na hustotách působí jako pseudoderivace – pro hustotu $\mathfrak{a}$ váhy w lze psát

$$\mathsf{R}_{\boldsymbol{kl}}\mathfrak{a} = -w\,\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{kl}}\,\mathfrak{a}\ .$$

Tenzor křivosti $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{kl}}$ *derivace* $\boldsymbol{\nabla}$ *na* $\boldsymbol{H}M$ lze explicitně vyjádřit jako

$$\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{kl}} = -\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{k}}\big(\mathfrak{o}^{-1}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{l}}\mathfrak{o}\big)\ ,$$

kde $\mathfrak{o}$ je libovolná hustota váhy 1. □

DŮKAZ:

To že komutátor působí na hustotách jako pseudoderivace se dokazuje stejně jako obdobné tvrzení platné pro tečné tenzory (lemma V7.21). Akce operátoru křivosti na hustoty je pak dána větou V10.6, kde $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{kl}}$ charakterizuje akci na hustotách váhy 1.

Vyjádření tenzoru $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{kl}}$ dostaneme, rozepíšeme-li vnější derivaci pomocí kovariantní derivace (věta V7.20 či marginálie M7.7), použijeme Leibnizovo pravidlo a pravidlo pro derivování mocniny:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_{\boldsymbol{k}}\big(\mathfrak{o}^{-1}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{l}}\mathfrak{o}\big) &= \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\big(\mathfrak{o}^{-1}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{l}}\mathfrak{o}\big) - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{l}}\big(\mathfrak{o}^{-1}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\mathfrak{o}\big) + \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{kl}}\,\mathfrak{o}^{-1}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\mathfrak{o}\\ &= \mathfrak{o}^{-1}\big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{l}}\mathfrak{o} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\mathfrak{o} + \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{kl}}\,\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\mathfrak{o}\big)\\ &\qquad\qquad - \mathfrak{o}^{-2}\big((\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\mathfrak{o})(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{l}}\mathfrak{o}) - (\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{l}}\mathfrak{o})(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\mathfrak{o})\big)\\ &= \mathfrak{o}^{-1}\mathsf{R}_{\boldsymbol{kl}}\mathfrak{o} = -\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{kl}}\ .\end{aligned}$$

■

Pokud je působení kovariantní derivace na hustotách dáno rozšířením derivace z tečného prostoru, dostaneme i rozšíření tenzoru křivosti.

M10.3 Derivace anihilující hustotu

Podle (10.3) souřadnicová kovariantní derivace anihiluje souřadnicový objemový element $d^d x$. Je přirozené se ptát, zda ke každé hustotě $\mathfrak{a}$ existuje kovariantní derivace, která ji anihiluje. Odpověď je kladná. Nechť $\boldsymbol{\partial}$ je libovolná souřadnicová derivace, pomocí které definujeme 1-formu $\boldsymbol{\lambda} = \mathfrak{a}^{-1}\boldsymbol{\partial}\mathfrak{a}$. Pak beztorzní kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$ lišící se od $\boldsymbol{\partial}$ rozdílovým tenzorem

$$\boldsymbol{\Gamma}^{n}_{kl} = \frac{1}{d+1}\left(\delta^n_k\boldsymbol{\lambda}_l + \delta^n_l\boldsymbol{\lambda}_k\right)\ ,$$

tj. $\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\partial} + \mathbf{tens}[\boldsymbol{\Gamma}]$, zachovává hustotu $\mathfrak{a}$:

$$\boldsymbol{\nabla}\mathfrak{a} = 0\ .$$

Díky $\mathbf{Tor}[\boldsymbol{\partial}] = 0$ a symetrii $\boldsymbol{\Gamma}$ okamžitě dostáváme torzi derivace $\boldsymbol{\nabla}$

$$\boldsymbol{T} = 0\ ,$$

aplikací vět V10.11 a V10.12 na hustotu $\mathfrak{a}$ pak podmínku na Riemannův tenzor

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{kl}}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{n}} = 0\ . \tag{*}$$

Můžeme si položit i opačnou otázku: kdy k dané beztorzní kovariantní derivaci existuje hustota, která je touto derivací anihilována? Odpověď je (alespoň lokálně, na topologicky jednoduchých oblastech) dána právě podmínkou (*). Již jsme ukázali, že se jedná o podmínku nutnou. Předpokládejme nyní, že je tato podmínka splněna. Podle věty V10.11 tak pro libovolnou hustotu $\mathfrak{o}$ váhy 1 máme

$$\mathbf{d}\big(\mathfrak{o}^{-1}\boldsymbol{\nabla}\mathfrak{o}\big) = 0\ .$$

Podle Poincareho lemmatu V4.5 musí (na topologicky jednoduché oblasti) existovat funkce, nazvěme ji $-\log f$, taková že

$$\mathfrak{o}^{-1}\boldsymbol{\nabla}\mathfrak{o} = -\,\mathbf{d}\log f = -f^{-1}\,\mathbf{d}f\ .$$

Dostáváme tak, že hustota $f\mathfrak{o}$ je derivací $\boldsymbol{\nabla}$ anihilována:

$$\boldsymbol{\nabla}(f\mathfrak{o}) = 0\ .$$

Věta V10.12 (Riemannův tenzor působící na hustotách)

Pro kovariantní derivaci indukovanou z tečného prostoru je operátor křivosti dán Riemannovým tenzorem, tj. na hustotách váhy w působí:

$$\mathsf{R}_{\boldsymbol{kl}}\,\mathfrak{o} = -w\,\mathbf{Tr}\mathbf{R}_{\boldsymbol{kl}}\,\mathfrak{o}\ .$$

Připomeňme, že $\mathbf{Tr}\mathbf{R}_{\boldsymbol{kl}} = \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{kl}}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{n}}$ □

Poznámka

Obdobně jako pro operátor křivosti působící na tečném prostoru (viz definice D7.21 a D7.22 a větu V7.23) budeme užívat též operátor

$$\mathsf{R}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{l}}\,\mathsf{R}_{\boldsymbol{kl}} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b}]}\ ,$$

pro který platí

$$\mathsf{R}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\,\mathfrak{o} = \mathbf{tens}[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})]\,\mathfrak{o} = -w\,\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{n}}\,\mathfrak{o}\ .$$

Důkaz:

Vztahy mezi komutátory a operátory křivosti kopírují obdobné vztahy na tečném prostoru – viz definice D7.21, D7.22 a větu V7.23. Operátor křivosti na tečném prostoru je pseudoderivace dána Riemanovým tenzorem. Její rozšíření na hustoty je dáno větou V10.6. ■

Nakonec ukážeme vztah mezi Laplaceovým operátorem vytvořeným pomocí kovariantní derivace a vnějším Laplaceovým operátorem zavedeným v definici D10.3. Platí

Věta V10.13 (Weitzenböckova identita)

Mějme varietu s metrikou $\boldsymbol{g}$. Nechť $\boldsymbol{\nabla}^2 = \boldsymbol{g}^{\boldsymbol{ab}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}}$ je Laplaceův operátor definovaný pomocí metrické kovariantní derivace a $\triangle$ je vnější Laplaceův operátor z definice D10.3. Pro vnější formu $\boldsymbol{\omega}$ stupně p platí tzv. *Weitzenböckova identita*

$$\begin{aligned}\triangle\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p} = -\boldsymbol{\nabla}^2\,\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p} + p\,\mathbf{Ric}_{\boldsymbol{n}[\boldsymbol{a}_1}\,\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{a}_2\dots\boldsymbol{a}_p]}\\ -\frac{p\,(p-1)}{2}\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{mn}[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}\,\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{mn}}{}_{\boldsymbol{a}_3\dots\boldsymbol{a}_p]}\ .\end{aligned}$$ □

Důkaz:

Podle (10.1) k určení $\triangle\boldsymbol{\omega}$ potřebujeme vyčíslit $\mathbf{div}\,\mathbf{d}\,\boldsymbol{\omega}$ a $\mathbf{d}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\omega}$. Použitím věty V10.9 a vyjádřením vnější derivace pomocí kovariantní (věta V7.20) a vlastnosti antisymetrizace dostaneme

$$\begin{aligned}\big(\mathbf{div}\,\mathbf{d}\,\boldsymbol{\omega}\big)_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p} &= \boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{n}}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_1}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_2\dots\boldsymbol{a}_p\boldsymbol{n}}\\ &= (-1)^p\,\boldsymbol{\nabla}^2\,\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p} - \sum_{k=1}^{p}(-1)^k\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}_k}\boldsymbol{\omega}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\,\dots\,\boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo } \boldsymbol{a}_k}\boldsymbol{n}}\ .\end{aligned}$$

Obdobně

$$\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_1}\big(\mathbf{div}\,\boldsymbol{\omega}\big)_{\boldsymbol{a}_2\dots\boldsymbol{a}_p} = \mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_1}\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_2\dots\boldsymbol{a}_p\boldsymbol{n}} = -\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}_k}\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\omega}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\,\dots\,\boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo } \boldsymbol{a}_k}\boldsymbol{n}}\ .$$

Vidíme, že pro $\triangle\boldsymbol{\omega} = (-1)^{p+1}(\mathbf{div}\,\mathbf{d}\,\boldsymbol{\omega} - \mathbf{d}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\omega})$ dostáváme $-\boldsymbol{\nabla}^2\,\boldsymbol{\omega}$ plus člen, který budeme dále upravovat:

$$\begin{aligned}&(-1)^p\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\boldsymbol{g}^{\boldsymbol{an}}\big[\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}_k} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}_k}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\big]\boldsymbol{\omega}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\,\dots\,\boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo } \boldsymbol{a}_k}\boldsymbol{n}}\\ &\quad= \sum_{k=1}^{p}(-1)^{p+k}\boldsymbol{g}^{\boldsymbol{an}}\,\mathsf{R}_{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}_k}\boldsymbol{\omega}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\,\dots\,\boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo } \boldsymbol{a}_k}\boldsymbol{n}}\ .\end{aligned}$$

Zde jsme zaměnili komutátor beztorzní kovariantní derivace operátorem křivosti. Akce operátoru křivosti na $\boldsymbol{\omega}$ je součtem zúžení Riemannova tenzoru s každým indexem formy $\boldsymbol{\omega}$. Rozdělíme sčítance na ty se zúženým indexem před a po 'chybějícím' indexu a_k a na sčítanec odpovídající indexu n. Dostaneme

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{k-1}(-1)^{p+k}\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{a}_k}{}^{\boldsymbol{m}}{}_{\boldsymbol{a}_l}\,\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_{l-1}\boldsymbol{m}\underbrace{\dots}_{\text{mimo }\boldsymbol{a}_k}\boldsymbol{a}_p\boldsymbol{n}}+\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=k+1}^{p}(-1)^{p+k}\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{a}_k}{}^{\boldsymbol{m}}{}_{\boldsymbol{a}_l}\,\boldsymbol{\omega}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\dots}_{\text{mimo }\boldsymbol{a}_k}\boldsymbol{m}\boldsymbol{a}_{l+1}\dots\boldsymbol{a}_p\boldsymbol{n}}\\
&\qquad+\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p+k}\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{a}_k}{}^{\boldsymbol{m}}{}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{\omega}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo }\boldsymbol{a}_k}\boldsymbol{m}}\\
&=\sum_{\substack{k,\,l\\1\le l<k\le p}}(-1)^{k+l+1}\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{m}}{}_{\boldsymbol{a}_l}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{a}_k}\,\boldsymbol{\omega}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo }\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_l}\boldsymbol{m}\boldsymbol{n}}+\sum_{\substack{k,\,l\\1\le k<l\le p}}(-1)^{k+l}\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{a}_k}{}^{\boldsymbol{m}}{}_{\boldsymbol{a}_l}\,\boldsymbol{\omega}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo }\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_l}\boldsymbol{m}\boldsymbol{n}}\\
&\qquad-\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p+k}\mathbf{Ric}^{\boldsymbol{m}}{}_{\boldsymbol{a}_k}\,\boldsymbol{\omega}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo }\boldsymbol{a}_k}\boldsymbol{m}}\ .
\end{aligned}
$$

Zde jsme v první sumě využili symetrii Riemannova tenzoru vůči záměně prvního a druhého páru indexů a s pomocí antisymetrie $\boldsymbol{\omega}$ jsme prokomutovali index m na předposlední pozici. V posledním členu jsme vedle symetrií Riemannova tenzoru užili definic Ricciho tenzoru. Nyní v první sumě zaměníme indexy m a n a sčítací indexy k a l a tak s využitím antisymetrie $\boldsymbol{\omega}$ v indexech m a n zjistíme, že obě sumy jsou totožné. Dohromady dostáváme:

$$
\begin{aligned}
&2\sum_{\substack{k,\,l\\1\le k<l\le p}}(-1)^{k+l+1}\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{m}}{}_{\boldsymbol{a}_k}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{a}_l}\,\boldsymbol{\omega}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo }\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_l}\boldsymbol{m}\boldsymbol{n}}+\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k}\,\mathbf{Ric}^{\boldsymbol{m}}{}_{\boldsymbol{a}_k}\,\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{m}\underbrace{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo }\boldsymbol{a}_k}}\\
&\quad=\frac{2\,p!}{2!(p-2)!}\,\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{m}}{}_{[\boldsymbol{a}_1}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{a}_2}\,\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_3\dots\boldsymbol{a}_p]\boldsymbol{m}\boldsymbol{n}}-\frac{p!}{1!(p-1)!}\,\mathbf{Ric}_{\boldsymbol{m}[\boldsymbol{a}_1}\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{m}}{}_{\boldsymbol{a}_2\dots\boldsymbol{a}_p]}\ ,
\end{aligned}
$$

přičemž jsme použili rozpis vnějšího násobení pomocí antisymetrizace (definice D4.2) a pomocí vztahů z marginálie M4.2. Zbývá nám tedy dokázat

$$
2\,\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{m}}{}_{[\boldsymbol{a}_1}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{a}_2}\,\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_3\dots\boldsymbol{a}_p]\boldsymbol{m}\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{m}\boldsymbol{n}[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}\,\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{m}\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{a}_3\dots\boldsymbol{a}_p]}\ . \tag{*}
$$

Tento vztah plyne ze symetrií Riemanova tenzoru a první Bianchiho identity (viz věta V7.28) zúžené ve dvou indexech s antisymetrickou tenzorem

$$
\begin{aligned}
0&=\big(\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{m}\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}+\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{m}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{n}}+\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{m}\boldsymbol{b}\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}}\big)\,\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{m}\boldsymbol{n}}\\
&=\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{m}\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{m}\boldsymbol{n}}-\big(\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{m}\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\boldsymbol{b}}-\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}\boldsymbol{m}\boldsymbol{b}}\big)\,\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{m}\boldsymbol{n}}\ .
\end{aligned}
$$

Užitím antisymetrie v mn dostaneme tvrzení (*) a po dosazení i dokončení celého důkazu. ∎

10.3 Integrální věty

Tato podkapitola je neúplná – obsahuje pouze znění několika podob integrálních vět bez dalších komentářů. Podkapitola bude časem rozšířena.

Věta V10.14 (Gaussova–Stokesova věta pro formy)
$\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}^{d-1} M$

$$\int\limits_{\Omega\subset M} \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{\omega}\big|_{\partial\Omega} \,.$$

$\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}^{d-p} M$, N je podvarieta M dimenze $\dim N = d-p+1$

$$\int\limits_{\Omega\subset N} \mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\big|_N = \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{\omega}\big|_{\partial\Omega} \,. \qquad \square$$

Věta V10.15 (Stokesova věta)
$\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}^{d-p} M$, N je podvarieta M dimenze $\dim N = d-p+1$

$$\int\limits_{\Omega\subset N} \big(\tilde{\mathbf{rot}}\,\boldsymbol{\omega}\big)^{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_{p-1}} \tilde{\boldsymbol{dS}}_{N\,\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_{p-1}} = \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_{p+1}\ldots\boldsymbol{a}_d}\, \boldsymbol{d\Sigma}_{\partial\Omega}^{\boldsymbol{a}_{p+1}\ldots\boldsymbol{a}_d} \,. \qquad \square$$

Věta V10.16 (Gaussova věta)
$\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{Sect}\, \boldsymbol{\Lambda}^{\star p}_x M$, N je podvarieta M dimenze $\dim N = d-p+1$

$$\int\limits_{\Omega\subset N} \big(\mathbf{div}\,\boldsymbol{\alpha}\big)^{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_{p-1}} \tilde{\boldsymbol{dS}}_{N\,\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_{p-1}} = \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_p}\, \tilde{\boldsymbol{dS}}_{\partial\Omega\,\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_p} \,. \qquad \square$$

Příklad P10.1 (Speciální případy)
Newtonův vzorec
$p = d$, γ ohraničená křivka v M, $\dim\gamma = 1$, $\dim\partial\gamma = 0$, $f \in \mathfrak{F}M$

$$\int\limits_{\gamma} \mathbf{d}f\big|_\gamma = \big[f\big]_{\partial\gamma} \tag{10.5}$$

Stokesova věta
$p = d-1$, S ohraničená plocha v M, $\dim S = 2$, $\dim\partial S = 1$, $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}^1 M$

$$\int\limits_{S} (\tilde{\mathbf{rot}}\,\boldsymbol{\omega}) \cdot \tilde{\boldsymbol{dS}}_S = \int\limits_{\partial S} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{d\Sigma}_{\partial S} \tag{10.6a}$$

$$\int\limits_{S} \mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\big|_S = \int\limits_{\partial S} \boldsymbol{\omega}\big|_{\partial S} \tag{10.6b}$$

Gaussova věta
$p = 1$, Ω ohraničená oblast v M, $\dim\Omega = d$, $\dim\partial\Omega = d-1$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{Sect}\,\boldsymbol{\Lambda}^{\star 1}_x M$

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{div}\,\boldsymbol{\alpha} = \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{\alpha} \cdot \tilde{\boldsymbol{dS}}_{\partial\Omega} \tag{10.7}$$