Kapitola 5

Integrování na varietách

Dosud jsme se zabývali převážně lokálními objekty na varietě. V této kapitole vybudujeme aparát pro zkoumání globálních extenzivních veličin. Naučíme se, co a jak lze na varietě integrovat.

5.1 Souřadnicové integrování

Budeme předpokládat, že ze standardní matematické analýzy víme jak spočítat integrál funkce f od d proměnných přes obecnou oblast $O \subset \mathbb{R}^d$

$$\int_O f(x^1, \ldots, x^d)\, dx^1 \ldots dx^d \ . \tag{5.1}$$

Význam tohoto integrálu je ‘spojitá suma’ ‘infinitezimální kvantity’ $f\, dx^1 \ldots dx^d$ přes oblast O. Pokud zvolíme speciálně $f = 1$, integrál udává *souřadnicový objem* oblasti O, měřený v počtu jednotkových souřadnicových krychliček. Integrování samozřejmě vyčísluje tento objem ‘chytrým’ způsobem fungujícím i pro oblasti, které nerespektují mříž souřadnic x^j – rozdělí si oblast na nekonečně malé krychličky a přes ně pak provede sumu. Kvantitu $dx^1 \ldots dx^d$ tak lze formálně chápat, jako souřadnicový objem elementárně malé krychličky.

Integrování v $\mathbb{R}^d$ lze přenést na obecnou varietu pomocí souřadnicové mapy.

Definice D5.1 (Souřadnicové integrování)

Pro zvolený souřadnicový systém x^j zadaný na oblasti U d-dimenzionální variety M definujeme *souřadnicové integrování* funkce f přes oblast $\Omega \subset U$ následovně:

$$\int_\Omega f\, d^d x = \int_{x^j(\Omega)} \tilde{f}(x^1, \ldots, x^d)\, dx^1 \ldots dx^d \ .$$

Zde $x^j(\Omega)$ je obraz oblasti Ω v $\mathbb{R}^d$ a $\tilde{f}$ je funkce f chápaná jako funkce od souřadnic

$$f(z) = \tilde{f}(x^1(z), \ldots, x^d(z)) \ , \quad z \in U \ . \qquad \circ$$

Poznámka

Obvykle se funkce $\tilde{f}$ a f nerozlišují.

Takto definovaný integrál měří objem v jednotkách souřadnicových krychliček souřadnic x^j a $d^d x$ lze chápat jako souřadnicový objem infinitezimální oblasti.

Na obecné varietě však máme k dispozici mnoho souřadnicových systémů a výše definované integrování závisí na volbě jednoho z nich. Věta o substituci pro integrování v d proměnných nám dá vztah mezi integrováním v různých souřadnicových systémech

Lemma V5.1

Nechť x^j a y^j jsou dva souřadnicové systémy definované na oblasti U, f funkce definovaná na U a $\Omega \subset U$. Pak platí

$$\int_\Omega f\, d^d x = \int_\Omega f \left|\det \frac{\partial x^k}{\partial y^l}\right| d^d y \,. \qquad \square$$

Determinant přechodové matice $\partial x^k / \partial y^l$, neboli Jacobián, je faktor převádějící ‘počet krychliček’ napnutých na souřadnicích x^j na ‘počet krychliček’ napnutých na y^j.

M5.1 Jednodimenzionální integrování
Poznamenejme, že pro $d = 1$ umožňuje integrál zavedený v textu integrovat přes *neorientovanou* oblast. Pro interval $I = \langle x_z, x_k \rangle$ máme integrál $\int_I f\,dx$ nezávisející na orientaci reálné osy, tj. na tom, která z mezí x_z, x_k je dolní a která horní. Vedle toho se často používá zápis pomocí *orientovaného integrálu*, $\int_{x_z}^{x_k} f\,dx$, rozlišující pořadí mezí. V prvním případě musíme při substituci $y = y(x)$ použít Lemma V5.1

$$\int_{x \in I} f\,dx = \int_{y \in y(I)} f \left|\frac{dx}{dy}\right| dy \,.$$

V druhém případě se musí užít transformační faktor bez absolutní hodnoty,

$$\int_{x_z}^{x_k} f\,dx = \int_{y(x_z)}^{y(x_k)} f\,\frac{dx}{dy}\,dy \,,$$

přičemž znaménko obstarává pořadí mezí – při záměně horní a dolní meze (např. při vzestupném přeuspořádání mezí pokud substituce změní jejich pořadí) je nutné přidat dodatečné minus.
Jelikož možnost uspořádat meze je speciální vlastnost integrálu v jedné dimenzi, která nelze přímočaře zobecnit na obecné oblasti ve více dimenzích, nebudeme orientovaný integrál používat.

5.2 Integrovatelné hustoty – motivace

Nás však většinou nezajímá souřadnicový objem: v geometrii nás zajímá skutečný objem, nezávislý na volbě souřadnic. Ve fyzice nás pak většinou zajímají množství určitých extenzivních veličin – hmotnosti, energie, náboje, atd. – v dané oblasti. Extenzivní veličinou míníme kvantitu, která je lokálně rozprostřená po varietě a je aditivní vůči skládání disjunktních oblastí. Určení množství takové veličiny v zadané oblasti Ω se pak redukuje na sumu přes infinitezimálně malé části této oblasti. Potřebujeme proto zavést matematický objekt vystihující *velikost* infinitezimální oblasti či lépe *množství zkoumané kvantity* v infinitezimální oblasti. Integrál pak lze chápat jako ‘spojitou sumu’ této veličiny. Hledaný objekt se nazývá *objemový element* či *integrovatelná hustota*.

Než uvedeme přesnou definici integrovatelné hustoty, ujasníme si její vlastnosti. Integrovatelná hustota (v daném bodě) je intuitivně řečeno nekonečně malé číslo určující množství kvantity v infinitezimální oblasti kolem bodu. Toto množství nelze vyčíslit přímo, můžeme s ním však formálně manipulovat. Např. můžeme dvě hustoty sečíst (složení dvou extenzivních veličin) nebo zkoumat jejich *poměr*. Ten by měl určovat, kolik je v elementární oblasti první kvantity na jednotku druhé kvantity – např. množství náboje na jednotku objemu či množství entropie na jednotku hmotnosti. Poměr dvou integrovatelných hustot je konečné číslo.

Poznámka

Název *objemový element* může být trochu matoucí, protože označuje matematický objekt, který může mít i zcela negeometrickou interpretaci – viz třeba množství hmoty či náboje. Objemový element měřící ‘skutečný’ objem dV (zadaný např. pomocí metriky – budeme též říkat *geometrický* objem) je jen jeden konkrétní příklad objemového elementu. Častěji proto budeme používat označení *integrovatelná hustota* (či krátce *hustota*) – např. hustota energie nebo náboje. Je potřeba ale odlišit *integrovatelnou hustotu* (např. náboje) dq od *objemové hustoty* ρ. Ta udává poměr mezi hustotou náboje dq a hustotou geometrického objemu dV, tj. $dq = \rho\, dV$.

Ze své povahy mají integrovatelné hustoty skalární charakter – k jejich určení stačí podchytit jejich velikost. Zvolíme-li v daném bodě jednu referenční hustotu (např. dV), každá další hustota (řekněme dm) bude již jednoznačně dána svým poměrem k referenční hustotě

$$dm = \mu\, dV \; . \tag{5.2}$$

Hustoty v daném bodě tak tvoří jednodimenzionální vektorový prostor a poměr μ hraje roli *souřadnice* hustoty dm vzhledem k dV.

K určení obecné hustoty tedy stačí zadat její vztah k jistým speciálním hustotám, které máme dobře pod kontrolou. V předchozím oddíle jsme se s takovými hustotami již setkali – jednalo se o kvantitu $d^d x$ měřící *souřadnicový objem*, tj. objem měřený v počtu souřadnicových krychliček napnutých na souřadnicové čáry. Souřadnicovou hustotu můžeme charakterizovat i mírně odlišným způsobem – zadáním infinitezimálních souřadnic. V okolí daného bodu lze souřadnicové čáry systému x^j aproximovat tečnými vektory $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial} x^j$. Elementární souřadnicová krychlička je tak dána bází vektorů. S každou bází vektorů můžeme tedy asociovat souřadnicovou hustotu měřící objem v počtu krychliček napnutých na této bázi.

Je přirozené se nyní ptát, jak se mění souřadnicová hustota se změnou souřadnic. Zvětšíme-li souřadnicové krychličky např. dvakrát (zdvojnásobíme jeden z vektorů báze), změní se souřadnicová hustota na polovinu (do elementární oblasti se vejde jen polovina zvětšených souřadnicových krychliček). Tento princip určuje transformační vlastnosti souřadnicových hustot i při obecné změně báze. Konkrétně, máme-li souřadnicovou hustotu $d^d x$ definovanou pomocí krychliček napnutých na bázi $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial} x^j$ a hustotu $d^d y$ danou bází $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial} y^j$, pak jejich poměr je dán faktorem J určujícím, kolikrát musíme krychličku napnutou na $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial} x^j$ zvětšit, abychom dostali krychličku napnutou na $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial} y^j$,

$$d^d y = J^{-1}\, d^d x \; . \tag{5.3}$$

Z elementární vektorové algebry víme, že faktor J je dán velikostí determinantu matice přechodu mezi oběma bázemi. Ta je v našem případě $\frac{\partial x^i}{\partial y^j}$, čili

$$J = \left|\det \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right| \; , \tag{5.4}$$

čímž jsme v podstatě zreprodukovali Lemma V5.1 o chování souřadnicového integrování při změně souřadnic.

Zvolme nyní souřadnicové hustoty $d^d x$ a $d^d y$ jako dvě referenční hustoty. Poměry integrovatelné hustoty dm k těmto referenčním hustotám označíme μ_x a μ_y:

$$dm = \mu_x\, d^d x = \mu_y\, d^d y \; . \tag{5.5}$$

Pak okamžitě dostáváme transformační vztah

$$\mu_y = \left|\det \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right| \mu_x \; . \tag{5.6}$$

Tento transformační vztah je klíčem k exaktní definici integrovatelných hustot.

5.3 Integrovatelné hustoty – definice

V předchozím oddíle jsme motivovali pojem integrovatetelné hustoty potřebou umět integrovat extenzivní veličiny rozprostřené na varietě. Aditivita těchto veličin však umožňuje zkoumat integrovatelné hustoty lokálně. Hustotu v bodě x lze definovat jako *ultralokální* objekt 'žijící' pouze v tomto bodě, tj. nezávisející na propojení s okolními body. Integrovatelné hustoty se budou vztahovat pouze k tečnému prostoru daného bodu. Obecně lze hustoty vybudovat nad každým vektorovým prostorem, stejně jako umíme nad každým vektorovým prostorem vybudovat tenzorovou algebru. Hustoty tak lze chápat, jako jisté rozšíření pojmu tenzoru. Samozřejmě, v praxi nás budou hlavně zajímat hustoty definované ne v jednom bodě, nýbrž na celé oblasti, přes kterou chceme integrovat.

Obecná hustota je dána svým vztahem k souřadnicové hustotě a transformačními vlastnostmi při změně souřadnic. Souřadnicovou hustotu budeme lokálně specifikovat zadáním 'referenční kostičky', tj. zadáním vektorové báze, na které je kostička napnutá. Obecná hustota pak bude určena svojí souřadnicí vůči takto zadané referenční hustotě.

Definice D5.2 (Integrovatelné hustoty)

Integrovatelná hustota (též *objemový element*) $\mathfrak{a}$ v bodě x variety M je objekt, který je určen vzhledem k libovolné bázi $\boldsymbol{e}_j$ vektorů z tečného prostoru $\boldsymbol{T}_x M$ svojí souřadnicí $\mathfrak{a}[\boldsymbol{e}_j] \in \mathbb{R}$. Souřadnice hustoty se přitom při změně báze

$$\boldsymbol{e}'_{j'} = A^i_{j'}\, \boldsymbol{e}_i$$

transformuje

$$\mathfrak{a}[\boldsymbol{e}'_{j'}] = \left|\det A^i_{j'}\right|\, \mathfrak{a}[\boldsymbol{e}_i]\ .$$

Prostor hustot v bodě x označíme $\boldsymbol{H}_x M$, prostor polí těchto hustot (funkcí přiřazujících každému bodu hustotu v tomto bodě) budeme značit $\widetilde{\mathfrak{F}} M$.

Pole hustoty na oblasti Ω nazveme hladké, pokud jeho souřadnice vzhledem k bázi tvořené hladkými vektorovými poli je hladká funkce. ∘

M5.2 Souvislost s fibrovanými prostory
V definici D5.2 integrovatelných hustot vztahujeme souřadnici hustoty k vektorové bázi a ne k referenční hustotě – to provedeme až později, v lemmatu V5.3. Skrytým důvodem pro tento postup je, že se jedná o obecnou metodu tvorby objektů asociovaných s tečnou strukturou. Prostor bází je tzv. hlavní tečný bundle, na kterém působí grupa obecných nesingulárních lineárních transformací $\mathsf{GL}(d)$. Pro každou reprezentaci této grupy na $\mathbb{R}^n$ lze definovat jistý typ objektů asociovaných s tečnou strukturou (konkrétně, lze definovat vektorový bundle asociovaný s hlavním tečným bundlem). Pro definiční reprezentaci na $\mathbb{R}^d$ tímto postupem dostaneme 1-formy, pro duální reprezentaci dostaneme obyčejné vektory. Hustoty jsou pak dány reprezentací na $\mathbb{R}$

$$A^i_j \to \left|\det A^i_j\right|\ , \qquad A^i_j \in \mathsf{GL}(d)\ .$$

Více o této konstrukci viz část o fibrovaných prostorech.

Poznámka
Hustoty budeme značit gotickými písmeny (např. $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$) nebo stylem dV, dm, přirozeným z hlediska použití hustot při integrování.

Poznámka
V definici by se místo tečného prostoru $\boldsymbol{T}_x M$ mohl použít libovolný vektorový prostor V a obdrželi bychom prostor hustot H asociovaný s V. Lze též zavést prostor komplexních hustot, jejichž souřadnice nabývá hodnoty z $\mathbb{C}$.

Poznámka
V terminologii teorie míry odpovídá pole integrovatelné hustoty diferenciálu dostatečně hladké míry.

Lemma V5.2

Prostor hustot $\boldsymbol{H}_x M$ tvoří jednodimenzionální vektorový prostor s operacemi sčítání a násobení číslem danými následovně:

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})[\boldsymbol{e}_i] = \mathfrak{a}[\boldsymbol{e}_i] + \mathfrak{b}[\boldsymbol{e}_i]\ ,$$
$$(r\mathfrak{a})[\boldsymbol{e}_i] = r\mathfrak{a}[\boldsymbol{e}_i]\ ,$$

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \in \boldsymbol{H}_x M$ a $r \in \mathbb{R}$. Transformační vlastnosti souřadnice výsledku jsou evidentně splněny. □

V definici hustoty vztahujeme souřadnice k vektorové bázi, která zadává 'referenční krychličku'. Můžeme však přímo identifikovat i referenční souřadnicovou hustotu.

Definice D5.3 (Souřadnicová hustota)

S každou vektorovou bází $\boldsymbol{e}_j$ můžeme asociovat *souřadnicovou hustotu* $\mathfrak{e}$ požadavkem

$$\mathfrak{e}[\boldsymbol{e}_j] = 1 \ .$$

Máme-li zadaný systém souřadnic x^j $(j = 1, \dots, d)$, budeme souřadnicovou hustotu asociovanou s bází $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial}x^j$ označovat $d^d x$. ∘

POZNÁMKA

V případě, že máme jednotlivé souřadnice pojmenovány vlastními symboly, jako např. u sférických souřadnic $\{x^1, x^2, x^3\} = \{r, \vartheta, \varphi\}$, budeme psát místo d^3x formální součin $dr d\vartheta d\varphi$.

Zřejmě platí

Lemma V5.3

Nechť $\mathfrak{e}$ je souřadnicová hustota asociovaná s bází $\boldsymbol{e}_j$. Pak libovolnou hustotu $\mathfrak{a}$ můžeme zapsat

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}[\boldsymbol{e}_j]\, \mathfrak{e} \ . \qquad \square$$

Každé hladké pole hustot dq můžeme tedy na oblasti pokryté souřadnicovým systémem x^j vyjádřit

$$dq = dq\big[\tfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^j}\big]\, d^d x \ , \tag{5.7}$$

tj. jako součin hladké funkce $dq\big[\tfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^j}\big]$ a souřadnicové hustoty $d^d x$. Tímto způsobem se hustota dq také typicky zadává. Inspirováni vztahem (5.7), budeme pro souřadnici hustoty také užívat značení

$$dq\big[\tfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^j}\big] = \frac{dq}{d^d x} \ . \tag{5.8}$$

PŘÍKLAD P5.1 (PLOŠNÝ ELEMENT V ROVINĚ A NA SFÉŘE)

Jako příklad si uvedeme vyjádření plošného elementu dS v euklidovské rovině. dS je integrovatelná hustota na E^2, která je nejjednodušeji zadána v kartézských souřadnicích x, y

$$dS = dxdy \ , \quad dS\big[\tfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x}, \tfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}y}\big] = 1 \ .$$

Jedná se tedy přímo o souřadnicovou hustotu asociovanou s kartézskými souřadnicemi. Využitím transformačních vlastností souřadnic hustoty (definice D5.2) dostaneme vyjádření v polárních souřadnicích r, φ

$$dS = r\, dr d\varphi \ .$$

Vskutku, matice přechodu od x, y k r, φ je

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix}$$

a determinant dá $dS\big[\tfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}r}, \tfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\varphi}\big] = r$.

Jen trochu netriviálnější příklad je zadání plošného elementu na sféře S^2. Tato hustota již není souřadnicová vzhledem k běžným systémům souřadnic. Ve standardních sférických souřadnicích ϑ, φ máme

$$dS = \sin\vartheta\, d\vartheta d\varphi \ .$$

CVIČENÍ C5.1

Nalezněte souřadnice na S^2, ve kterých bude dS z příkladu P5.1 souřadnicovou hustotou. ✓

5.4 Integrování hustot

Nyní se vrátíme k hlavnímu tématu této kapitoly – integrování. Hustoty jsme zavedli hlavně proto, že nám umožňují definovat jejich integrál.

Definice D5.4 (Integrování hustot)
Mějme pole integrovatelné hustoty $\mathfrak{a}$ definované na oblasti Ω, pak integrál této hustoty přes oblast Ω je

$$\int_\Omega \mathfrak{a} = \int_\Omega \mathfrak{a}\big[\tfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^j}\big]\, d^d x \,,$$

kde x^j je libovolný souřadnicový systém definovaný na okolí oblasti Ω. Pravá strana této rovnosti je chápána ve smyslu definice D5.1. ∘

Poznámka
Dále budeme již místo 'pole integrovatelné hustoty na oblasti Ω' krátce říkat 'hustota na Ω'.

Užitím lemmatu V5.1 a transformačních vlastností souřadnice hustoty (definice D5.2) lehce ověříme, že se integrál nezmění při změně souřadnicového systému.

Integrál z definice D5.4 je však použitelný pouze pro oblasti, které lze pokrýt jedním souřadnicovým systémem. To však nemusí být vždy možné – typicky při integraci přes topologicky netriviální variety nelze zvolit globální souřadnicový systém. Praktická odpověď na tuto obtíž je rozdělit oblast integrace na podoblasti, které již lze pokrýt souřadnicovým systémem (jednotlivé podoblasti různými systémy), spočítat integrály přes tyto podoblasti a výsledky sečíst.

Elegantnější alternativa tohoto postupu (vyhýbající se potenciálním potížím s hladkostí při dělením oblasti na podoblasti) využívá tzv. *rozkladu jednotky*.

Definice D5.5 (Rozklad jednotky)
Mějme varietu pokrytou souřadnicovými systémy definovanými na oblastech U_k. Rozklad jednotky pro takovéto pokrytí je přiřazení ke každé oblasti U_k hladké funkce φ_k s nosičem v této oblasti tak, že

$$\sum_k \varphi_k = 1 \,.$$ ∘

Lze ukázat, že takovýto rozklad jednotky vždy existuje. Rozklad jednotky nám zprostředkuje 'hladké' rozdělení variety na podoblasti lokalizované již v oblastech definice souřadnicových systémů. Můžeme tak definovat integrál přes libovolnou oblast Ω:

Definice D5.6 (Globální integrování hustot)
Integrál hustoty $\mathfrak{a}$ přes obecnou oblast Ω definujeme

$$\int_\Omega \mathfrak{a} = \sum_k \int_{\Omega\cap U_k} \varphi_k\, \mathfrak{a} \,,$$

kde U_k jsou oblasti definice souřadnicových systémů pokrývající celou varietu a $\{\varphi_k\}$ je rozklad jednotky pro toto pokrytí. Integrály na pravé straně lze již chápat ve smyslu definice D5.4. ∘

Z náhledu je zřejmé, že integrál nezávisí na volbě pokrytí variety a výběru rozkladu jednotky – přestože formální důkaz vyžaduje jisté technické úsilí.

Poznámka

Definice D5.6 samozřejmě definuje i integrál typu $\int_\Omega f\mathfrak{a}$, jelikož $f\mathfrak{a}$ je též integrovatelná hustota.

Tímto jsme završili definici integrálu obecné integrovatelné hustoty přes obecnou oblast variety. Shrňme ještě jednotlivé kroky. Integrál se nejdříve rozdělí pomocí rozkladu jednotky na integrály přes oblasti, z nichž každá je pokrytá jedním souřadnicovým systémem (definice D5.6). V těchto oblastech se hustota vyjádří pomocí souřadnicové hustoty (definice D5.4) a integrál ze souřadnicové hustoty se převede na integrál v $\mathbb{R}^d$ (definice D5.1).

Příklad P5.2 (Integrování na válcové ploše)

V tomto příkladě provedeme podrobně všechny právě popsané kroky při integrování přes válcovou plochu.

Válcová plocha C je varieta topologie $\mathbb{R} \times S^1$. Pro její pokrytí potřebujeme alespoň dva souřadnicové systémy, které označíme x, φ a y, ψ. Souřadnice $x, y \in \mathbb{R}$ běžící ve směru podél osy válce zvolíme totožné, $x = y$. Souřadnice $\varphi, \psi \in (-\pi, \pi)$ číslují směr okolo válce a zvolíme je posunuté o polovinu válce

$$\psi = \begin{cases} \varphi - \pi & \text{pro} \quad \varphi > 0\,, \\ \varphi + \pi & \text{pro} \quad \varphi < 0\,. \end{cases}$$

Oba souřadnicové systémy pokrývají celý válce mimo jedné přímky – systém x, φ nepokrývá přímku $\psi = 0$ (oblast U), systém y, ψ přímku $\varphi = 0$ (oblast V). Rozklad jednotky je dán např. funkcemi $\cos^2\frac{\varphi}{2}$ na U a $\cos^2\frac{\psi}{2} = \sin^2\frac{\varphi}{2}$ na V.

Přirozený plošný element dS je přímo souřadnicová hustota asociovaná s těmito systémy, tj. $dS = dx d\psi$ na U a $dS = dy d\varphi$ na V. Na průniku $U \cap V$ je definice zjevně konzistentní .

Chceme-li nyní zintegrovat např. hustotu

$$\mathfrak{a} = \exp(-x^2)\,\cos^2\!\varphi\; dS = \exp(-y^2)\,\cos^2\!\psi\; dS$$

přes celý válec C, postupujeme následovně:

$$\begin{aligned}
\int_C \mathfrak{a} &= \int_U \cos^2\frac{\varphi}{2}\,\mathfrak{a} + \int_V \cos^2\frac{\psi}{2}\,\mathfrak{a} && \text{rozdělení na podoblasti}\\
&= \int_U \cos^2\frac{\varphi}{2}\,\exp(-x^2)\cos^2\!\varphi\, dx d\varphi + \int_V \cos^2\frac{\psi}{2}\,\exp(-y^2)\cos^2\!\psi\, dy d\psi && \text{přechod k souřadnicové hustotě}\\
&= \int_{x\in\mathbb{R}} \exp(-x^2)\, dx \int_{\varphi\in(-\pi,\pi)} \cos^2\frac{\varphi}{2}\,\cos^2\varphi\, d\varphi && \text{přechod k integrování v } \mathbb{R}^d\\
&\qquad + \int_{y\in\mathbb{R}} \exp(-y^2)\, dy \int_{\psi\in(-\pi,\pi)} \cos^2\frac{\psi}{2}\,\cos^2\psi\, d\psi && \text{a faktorizace na jednodimenzionální integrály}\\
&= \pi^{3/2}\,. && \text{vyčíslení integrálů}
\end{aligned}$$

V praxi si samozřejmě výpočet integrálu můžeme usnadnit. Využijeme faktu, že oblast U pokrývá celý válec C až na jednu přímku. Ta je však míry nula vzhledem k hladké integrovatelné hustotě $\mathfrak{a}$. Můžeme proto tuto přímku ignorovat a přeskočit první krok v uvedeném postupu:

$$\int_C \mathfrak{a} = \int_U \exp(-x^2)\cos^2\!\varphi\, dx d\varphi = \int_{x\in\mathbb{R}} \exp(-x^2)\, dx \int_{\varphi\in(-\pi,\pi)} \cos^2\varphi\, d\varphi = \pi^{3/2}\,.$$

5.5 Vlastnosti hustot a operace s nimi

Hustoty v daném bodě můžeme rozlišit na kladné a záporné.

Definice D5.7 (Absolutní hodnota hustoty)

Hustotu nazýváme kladnou (zápornou), pokud její souřadnice vůči libovolné bázi je kladná (záporná). Prostor kladných a záporných hustot budeme značit $\boldsymbol{H}^+_x M$ a $\boldsymbol{H}^-_x M$.

Absolutní hodnotu hustoty $\mathfrak{a}$ definujeme zadáním její souřadnice:

$$|\mathfrak{a}|\,[\boldsymbol{e}_j] = \big|\mathfrak{a}[\boldsymbol{e}_j]\big| \ . \qquad \circ$$

Zjevně $|a| \in \boldsymbol{H}^+_x M$. Stejně tak jsou kladné všechny souřadnicové hustoty $d^d x$.

Jelikož má prostor hustot lineární charakter, můžeme ho tenzorově vynásobit s prostorem tečných tenzorů. Dostaneme tak objekty, které mají zároveň charakter hustoty i tenzoru. Ve většině ohledů se tyto objekty chovají jako běžné tenzory. Fakt, že se jedná i o hustoty intuitivně znamená, že jsou přeškálované nekonečně malým číslem.

Definice D5.8 (Tenzorové hustoty)

Prvky tenzorového součinu prostoru hustot a tečných tenzorů nazýváme *tenzorové hustoty*. Prostor tenzorových hustot označíme $\tilde{\boldsymbol{T}}_x M$, tj.

$$\tilde{\boldsymbol{T}}_x M = \boldsymbol{H}_x M \otimes \boldsymbol{T}_x M \ .$$

Prostor příslušných polí označíme $\tilde{\mathfrak{T}} M$. $\circ$

Poznámka

Tenzorové hustoty budeme někdy odlišovat od běžných tenzorů vlnovkou, např. $\tilde{\boldsymbol{a}}$.

Vzhledem k tomu, že prostor hustot je jednodimenzionální, každou tenzorovou hustotu $\tilde{\boldsymbol{a}}$ lze faktorizovat na součin hustoty a obyčejného tenzoru, $\tilde{\boldsymbol{a}} = \mathfrak{a}\,\boldsymbol{a}$. Tento rozklad však není jednoznačný.

Samozřejmě se nabízí provést i tenzorový součin prostoru hustot se sebou. To, že $\dim \boldsymbol{H}_x M = 1$ nám dokonce dovolí definovat obecnou w-tou tenzorovou mocninu, $w \in \mathbb{R}$. Vytvoříme tak objekty nového druhu nazývané hustoty váhy w.

Definice D5.9 (Hustoty váhy w)

Hustoty váhy w jsou definovány obdobně jako integrovatelné hustoty (definice D5.2) pomocí své souřadnice vůči bázi $\boldsymbol{e}_j$ v tečném prostoru. $\mathfrak{a}$ je hustota váhy w, pokud se její souřadnice $\mathfrak{a}[\boldsymbol{e}_j]$ transformuje

$$\mathfrak{a}[A^i_{j'}\,\boldsymbol{e}_i] = \big|\det A^i_{j'}\big|^w\ \mathfrak{a}[\boldsymbol{e}_i] \ .$$

Prostor hustot váhy w v bodě x označíme $\boldsymbol{H}^w_x M$. $\circ$

Integrovatelné hustoty z definice D5.2 jsou pak hustoty váhy $w = 1$ a hustoty váhy $w = 0$ se redukují na obyčejné čísla (jejich 'souřadnice' se při změně báze nemění).

Definice D5.10 (Součiny a mocniny hustot)

Obecná r-tá mocnina ($r \in \mathbb{R}$) kladné hustoty $\mathfrak{a}$ váhy w je hustota váhy rw, jejíž souřadnice je

$$\mathfrak{a}^r[\boldsymbol{e}_j] = \big(\mathfrak{a}[\boldsymbol{e}_j]\big)^r \ .$$

Celočíselné mocniny můžeme definovat i pro záporné hustoty.

Součin dvou hustot $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ váh a a b je hustota váhy $a+b$ daná opět souřadnicově

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})[\boldsymbol{e}_j] = \mathfrak{a}[\boldsymbol{e}_j]\,\mathfrak{b}[\boldsymbol{e}_j]\ . \qquad \circ$$

Na varietě bez dodatečné struktury neexistuje nějaká kanonická, speciální integrovatelná hustota. Různé geometrické struktury však mohou význačnou hustotu specifikovat. Nejdůležitějším příkladem je metrická struktura, umožňující definovat délky křivek, velikosti úhlů a – jak nyní ukážeme – měřit objem. Metrickou strukturou se budeme podrobně zabývat v kapitole 6, nyní nám však postačí vědět, že je určena metrikou, což je symetrický nedegenerovaný tenzor typu $\boldsymbol{T}^0_2 M$ (viz definici D6.1). Metrika $\boldsymbol{g_{mn}}$ definuje skalární součin vektorů $\boldsymbol{a^m}$, $\boldsymbol{b^n}$ vztahem $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{g_{mn}}\boldsymbol{a^m}\boldsymbol{b^n}$. S metrikou lze asociovat objemový element dV, který měří objem v množství 'krychliček' napnutých na ortonormální bázi, tj. na bázi na sebe kolmých a normalizovaných vektorů ve smyslu metrického skalárního součinu (viz definici D6.2).

Definice D5.11 (Metrický objemový element)

Metrický objemový element (též *metrická hustota*) dV asociovaný s metrikou $\boldsymbol{g}$ splňuje

$$dV[\boldsymbol{e}_j] = 1\ ,$$

pro každou bázi $\boldsymbol{e}_j$ ortonormální ve smyslu metriky $\boldsymbol{g}$. $\circ$

Díky tomu, že determinant matice přechodu mezi dvěmi ortonormálními bázemi je ± 1, definice metrického objemového elementu nezávisí na volbě báze. Jinými slovy, objem referenční ortonormální krychličky nezávisí na jejím natočení.

Poznámka

Na varietách dimenze $1, 2$ a 3 se metrické objemové elementy obvykle značí $d\ell$, dS a dV.

Souřadnice metrického objemového elementu vzhledem k obecné bázi jsou dány pomocí složek metriky:

Věta V5.4

Nechť dV je metrický objemový element metriky $\boldsymbol{g}$. Pak

$$dV[\boldsymbol{e}_j] = |\det g_{ij}|^{1/2}\ ,$$

kde g_{ij} jsou složky metriky vzhledem k bázi $\boldsymbol{e}_j$. $\square$

Důkaz:

Nechť $A^{i'}_j$ je matice přechodu od ortonormální báze $\boldsymbol{e}'_{j'}$ k obecné bázi $\boldsymbol{e}_j$,

$$\boldsymbol{e}_j = A^{i'}_j\,\boldsymbol{e}'_{i'}\ .$$

Pro složky metriky dostáváme

$$g_{ij} = A^{m'}_i\,A^{n'}_j\,g_{m'n'}\ ,$$

kde $g_{m'n'}$ jsou komponenty metriky vzhledem k ortonormální bázi $\boldsymbol{e}'_{j'}$, tj. diagonální matice mající na diagonále pouze 1, případně -1 (viz definici D6.2). Absolutní hodnota determinantu je

$$|\det g_{ij}| = \big(\det A^{i'}_j\big)^2\ .$$

Na druhou stranu však transformační vlastnosti souřadnice hustoty (viz definici D5.2) dávají

$$dV[\boldsymbol{e}_j] = \Big|\det A^{i'}_j\Big|\ dV[\boldsymbol{e}'_{j'}]\ .$$

Porovnáním posledních dvou rovnic a uvážením, že $dV[\boldsymbol{e}'_{j'}] = 1$, dostáváme dokazované tvrzení. $\blacksquare$

Věta V5.4 nás může inspirovat k definici nové operace.

Definice D5.12 (Determinant metriky)

Zobrazení Det přiřazující každému tenzoru $\boldsymbol{g}$ typu $(0,2)$ hustotu $\operatorname{Det}\boldsymbol{g}$ váhy 2,

$$\operatorname{Det}: \boldsymbol{T}_x{}^0_2 M \to \boldsymbol{H}^2_x M\ , \quad \boldsymbol{g} \to \operatorname{Det}\boldsymbol{g}\ ,$$

je definováno vzhledem k libovolné bázi $\boldsymbol{e}_j$ podmínkou

$$(\operatorname{Det}\boldsymbol{g})[\boldsymbol{e}_j] = \det g_{ij}\ . \qquad \circ$$

Transformační vlastnosti souřadnice výsledné hustoty (definice D5.9) jsou zřejmě splněny. Poznamenejme, že jsme v definici nepoužili absolutní hodnotu a hustota $\operatorname{Det}\boldsymbol{g}$ tak nemusí být nutně kladná.

Pomocí operace Det můžeme napsat metrický objemový element dV následovně

$$dV = |\operatorname{Det}\boldsymbol{g}|^{1/2}\ . \tag{5.9}$$

Pro absolutní hodnotu determinantu metriky se často zavádí samostatný symbol – např. pro metriky $\boldsymbol{g}$ a $\boldsymbol{q}$ symboly $\mathfrak{g} = |\operatorname{Det}\boldsymbol{g}|$ a $\mathfrak{q} = |\operatorname{Det}\boldsymbol{q}|$. Metrický objemový element pak bude $\mathfrak{g}^{1/2}$, případně $\mathfrak{q}^{1/2}$. V souřadnicích x^j lze tuto hustotu zapsat

$$\mathfrak{g}^{1/2} = |\det g_{ij}|^{1/2}\, d^d x\ . \tag{5.10}$$

Často se můžeme setkat se zápisem

$$\int_\Omega f\,\mathfrak{g}^{1/2} = \int_\Omega f\,|\det g_{ij}|^{1/2}\, d^d x\ . \tag{5.11}$$

Příklad P5.3

Euklidovská metrika na E^d je v kartézských souřadnicích dána výrazem

$$\boldsymbol{g} = \mathbf{d}x^1\,\mathbf{d}x^1 + \cdots + \mathbf{d}x^d\,\mathbf{d}x^d\ .$$

S ní asociovaný metrický element samozřejmě je

$$\mathfrak{g}^{1/2} = d^d x\ .$$

Pokud zapíšeme euklidovskou metriku v polárních ($d=2$), případně sférických ($d=3$) souřadnicích

$$^2\boldsymbol{g} = \mathbf{d}\rho\,\mathbf{d}\rho + \rho^2\,\mathbf{d}\varphi\,\mathbf{d}\varphi\ ,$$
$$^3\boldsymbol{g} = \mathbf{d}r\,\mathbf{d}r + r^2\big(\mathbf{d}\vartheta\,\mathbf{d}\vartheta + \sin^2\vartheta\ \mathbf{d}\varphi\,\mathbf{d}\varphi\big)$$

odpovídající objemové elementy budou

$$dS = \rho\ d\rho d\varphi\ ,$$
$$dV = r^2 \sin\vartheta\ dr d\vartheta d\varphi\ .$$

V kapitole 6 uvidíme, že standardní metriky na 2-sféře a 3-sféře jsou

$$^2\boldsymbol{g} = \mathbf{d}\vartheta\,\mathbf{d}\vartheta + \sin^2\vartheta\ \mathbf{d}\varphi\,\mathbf{d}\varphi\ ,$$
$$^3\boldsymbol{g} = \mathbf{d}\chi\,\mathbf{d}\chi + \sin^2\chi\big(\mathbf{d}\vartheta\,\mathbf{d}\vartheta + \sin^2\vartheta\ \mathbf{d}\varphi\,\mathbf{d}\varphi\big)\ .$$

Odpovídající objemové elementy jsou

$$dS = \sin\vartheta\ d\vartheta d\varphi\ ,$$
$$dV = \sin^2\chi\ \sin\vartheta\ d\chi d\vartheta d\varphi\ .$$

Více příkladů viz kapitolu 6.

CVIČENÍ C5.2

Nalezněte souřadniceový objemový element na Lobačevského rovině dané metrikou

$$\boldsymbol{g} = \mathbf{d}\chi\,\mathbf{d}\chi + \sinh^2\chi\;\mathbf{d}\varphi\,\mathbf{d}\varphi\;.$$

Nalezněte euklidovský plošný element dS v parabolických souřadnicích u, v daných vztahy

$$x = uv\;,\quad y = \tfrac{1}{2}(u^2 - v^2)\;. \qquad ✓$$

5.6 Vztah hustot k antisymetrickým d-formám

Integrovatelné hustoty mají velmi blízko k antisymetrickým formám maximálního stupně $d = \dim M$, tj. k totálně antisymetrickým tenzorům typu $(0, d)$. Jak jsme se zmínili v kapitole 4, prostor d-forem $\mathbf{\Lambda}^d_x M$ je jednodimenzionální, stejně jako prostor hustot $\boldsymbol{H}_x M$. Navíc, souřadnice d-formy se transformuje podobně jako souřadnice hustoty. Pro hustotu $\mathfrak{a}$ je tato transformace dána definicí D5.2

$$\mathfrak{a}[\boldsymbol{e}'_{j'}] = \left|\det A^i_{j'}\right|\,\mathfrak{a}[\boldsymbol{e}_i]\;, \tag{5.12}$$

pro d-formu $\boldsymbol{\alpha}$ jsme odvodili v marginálii M4.3 vztah

$$\alpha'_{1'\dots d'} = (\det A^i_{j'})\;\alpha_{1\dots d}\;. \tag{5.13}$$

Oba vztahy se liší pouze absolutní hodnotou. d-forma tedy nese podobnou informaci jako hustota – ke každé bázi přiřadí číslo určující objem měřený v počtu ‘krychliček’ napnutých na bázi. Oproti hustotám však ještě nese informaci o orientaci báze – při změně orientace změní souřadnice formy znaménko.

Díky této podobnosti můžeme svázat oba prostory několika vztahy. Za prvé, můžeme zavést operaci smazávající informaci o orientaci. Definujeme absolutní hodnotu d-formy, jejíž výsledek bude integrovatelná hustota

Definice D5.13 (Absolutní hodnota d-formy)

Nechť $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{\Lambda}^d_x M$, $d = \dim M$. Absolutní hodnotu d-forem

$$|\;\;|\,:\,\mathbf{\Lambda}^d_x M \to \boldsymbol{H}_x M\;,\quad \boldsymbol{\alpha} \to |\boldsymbol{\alpha}|\;,$$

definujeme souřadnicovým vztahem

$$|\boldsymbol{\alpha}|\,[\boldsymbol{e}_j] = |\alpha_{1\dots d}|\;,$$

kde $\alpha_{1\dots d}$ je komponenta formy vzhledem k bázi $\boldsymbol{e}_j$. Díky (5.12) a (5.13) nezávisí definice na volbě báze. ∘

Absolutní hodnota není prosté zobrazení – přiřazuje formám $\boldsymbol{\alpha}$ a $-\boldsymbol{\alpha}$ stejný výsledek. Hustota získaná absolutní hodnotou d-formy je vždy kladná. Pro souřadnicové hustoty můžeme psát

$$d^d x = \left|\,\mathbf{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^d\right|\;. \tag{5.14}$$

Každé dva jednodimenzionální vektorové prostory si jsou isomorfní, neexistuje však obecně kanonický isomorfismus. V případě hustot a d-forem však máme pro kanonický isomorfismus k dispozici dva kandidáty. Jedná se o isomorfismy, které ztotožní ‘kladnou’ d-formu s její absolutní hodnotou. Nejednoznačnost spočívá v tom, že na rozdíl od hustot u d-forem nelze přirozeným způsobem rozhodnout, které jsou kladné a které záporné. Prostor $\boldsymbol{\Lambda}^d_x M$ se rozpadá do dvou tříd, reprezentanti každé z nichž se navzájem liší o násobek *kladným* číslem. Ani jedna z těchto tříd však není preferovaná; nelze určit, která z nich reprezentuje 'kladné' a která 'záporné' d-formy. Proto máme k dispozici dva kanonické isomorfismy mezi $\boldsymbol{\Lambda}^d_x M$ a $\boldsymbol{H}_x M$. Výběr jednoho z nich znamená konvenční volbu kladných d-forem.

Taková volba souvisí s pojmem *orientace*. Báze vektorů v tečném prostoru můžeme též rozdělit na dvě třídy lišící se vzájemnou orientací.

Definice D5.14 (Orientace báze)

Řekneme, že dvě báze $\boldsymbol{e}_j$ a $\boldsymbol{e}'_{j'}$ v $\boldsymbol{T}_x M$ mají stejnou orientaci, pokud determinant matice přechodu je kladný. Tato ekvivalence rozdělí všechny báze na dvě třídy. Jednu z nich nazýváme *pozitivně orientované báze*, druhou *negativně orientované*. Volba, která je která, se nazývá *orientace tečného prostoru*. ◦

POZNÁMKA

Používá se též označení *báze s kladnou (zápornou) orientací*, případně *pravotočivé* a *levotočivé* báze. Pravotočivé báze jsou ty, které můžeme přirozeně utvořit z prstů pravé ruky, levotočivé z prstů levé ruky. To se samozřejmě zakládá na předpokladu, že máme dost prstů pro d dimenzí, a že je nemůžeme volně ohýbat na obě strany. Volba pravé a levé strany je navíc z hlediska geometrie také konvenční.

Orientaci lze zvolit v každém bodě variety. Není však samozřejmé, že lze zvolit orientaci na celé varietě hladkým způsobem – tj. takovým způsobem, že pokud hladce přenášíme bázi z místa na místo, zůstává tato báze stále stejně orientovaná.

M5.3 Hladký přenos báze
Hladký přenos báze podél křivky znamená volbu hladkých vektorových polí podél křivky tak, že v každém bodě tvoří tyto vektory *nedegenerovanou* bázi.

Definice D5.15 (Orientovatelnost)

Varietu nazveme *orientovatelnou*, pokud na ní lze zvolit globálně hladkým způsobem orientaci. V opačném případě nazýváme varietu *neorientovatelnou*. ◦

PŘÍKLAD P5.4 (MÖBIŮV PÁSEK)

Standardním příkladem neorientovatelné variety je Möbiův pásek. Ten získáme tak, že slepíme hranice pásu $\mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi \rangle$ 'přetočeným způsobem'. Označíme-li souřadnice na pásu x, φ, 'přetočené slepení' znamená identifikaci bodů $[x, -\pi]$ a $[-x, \pi]$. Tato varieta je neorientovatelná, protože pokud hladce přeneseme bázi kolem dokola (ve φ směru), dostaneme bázi opačně orientovanou.

Möbiův pásek můžeme stejně jako válcovou plochu z příkladu P5.2 pokrýt dvěma systémy souřadnic. Jedním budou již zmíněné souřadnice x, φ definované na oblasti U a druhý – souřadnice y, ψ na oblasti V – zvolíme posunutý o π ve φ směru. Přetočené slepení se projeví znaménkem minus mezi y a x v následujících transformačních vztazích

$$\begin{aligned} y &= x\,, & \psi &= \varphi - \pi \quad \text{pro} \quad \varphi > 0\,,\\ y &= -x\,, & \psi &= \varphi + \pi \quad \text{pro} \quad \varphi < 0\,. \end{aligned}$$

Volba orientace tečného prostoru nám umožní definovat 'kladné' d-formy.

Definice D5.16 (Orientace d-forem)

Mějme tečný prostor $\boldsymbol{T}_x M$ se zvolenou orientací. Antisymetrickou d-formu $\boldsymbol{\alpha}$ nazveme *pozitivně orientovanou*, pokud její souřadnice $\alpha_{12\ldots d}$ vzhledem k pozitivně orientované bázi je kladná. Obdobně definujeme *negativně orientované* d-formy. ◦

Lemma V5.5

Na neorientovatelné varietě neexistuje globální pole antisymetrických d-forem, které by bylo všude nenulové. □

DŮKAZ:
Kdyby taková forma existovala, umožňovala by definovat orientaci variety. ■

Nyní se můžeme vrátit k isomorfismu prostorů d-forem a hustot.

Definice D5.17 (Isomorfismy $\iota_\pm$)

Mějme zvolenou v bodě x orientaci. Pak definujeme dva isomorfismy ι_+ a ι_- zobrazující $\boldsymbol{\Lambda}^d_x M$ na $\boldsymbol{H}_x M$

$$\iota_\pm \boldsymbol{\alpha} = \begin{cases} \pm|\boldsymbol{\alpha}| & \text{pro pozitivně orientovanou formu } \boldsymbol{\alpha}\,, \\ \mp|\boldsymbol{\alpha}| & \text{pro negativně orientovanou formu } \boldsymbol{\alpha}\,. \end{cases}$$ ∘

Pokud je varieta orientovatelné, lze tyto isomorfismy zvolit globálně. Zřejmě platí

$$|\boldsymbol{\alpha}| = |\iota_+\boldsymbol{\alpha}| = |\iota_-\boldsymbol{\alpha}|\ ,\quad \iota_-\boldsymbol{\alpha} = -\iota_+\boldsymbol{\alpha}\ , \tag{5.15}$$

$$(\iota_\pm\boldsymbol{\alpha})[\boldsymbol{e}_j] = \pm\alpha_{1\dots d}\quad \text{pro pozitivně orientovanou bázi } \boldsymbol{e}_j\ . \tag{5.16}$$

CVIČENÍ C5.3
Přesvědčte se o tom! ✓

Na orientovatelných varietách lze tedy integrovatelné hustoty globálně reprezentovat pomocí antisymetrických d-forem. Obvykle k tomu volíme isomorfismus ι_+ převádějící pozitivně orientované d-formy na kladné hustoty. Na neorientovatelných varietách toto ztotožnění nelze provést globálně. Můžeme však alespoň z variety vybrat oblast, která již orientovatelná je, a na níž již toto ztotožnění provést lze.

Isomorfismus ι_+ lze zapsat i tenzorově – zavedeme proto tenzor orientace (přesněji řečeno půjde o tenzorovou hustotu).

Definice D5.18 (Tenzor orientace)

Mějme v bodě x zvolenou orientaci. *Tenzor orientace* $\tilde{\varepsilon}_{\boldsymbol{i}_1\dots\boldsymbol{i}_d}$ je definován:

$$\tilde{\varepsilon} = (\iota_+\boldsymbol{\alpha})^{-1}\boldsymbol{\alpha}$$

pro libovolnou d-formu $\boldsymbol{\alpha}$. Jedná se o tenzorovou hustotu typu $(0,d)$ váhy -1. ∘

Vzhledem k tomu, že ι_+ je isomorfismus, na volbě formy $\boldsymbol{\alpha}$ nezávisí. Tenzor orientace zprostředkovává inverzní zobrazení k isomorfismu ι_+

$$\boldsymbol{\alpha} = \tilde{\varepsilon}\ \iota_+\boldsymbol{\alpha}\ ,\quad \mathfrak{a} = \iota_+(\tilde{\varepsilon}\ \mathfrak{a})\ . \tag{5.17}$$

Můžeme též vytvořit i *inverzní tenzor orientace* $\tilde{\varepsilon}^{-1}$ (tenzorová hustota typu $(d,0)$ váhy 1), který lze s pomocí definice D5.18 rozepsat

$$\tilde{\varepsilon}^{-1} = (\iota_+\boldsymbol{\alpha})\,\boldsymbol{\alpha}^{-1}\ . \tag{5.18}$$

Inverzi d-formy $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$ jsme zavedli v kapitole 1, viz též marginálii M5.4. Inverzní tenzor orientace umožňuje zapsat akci ι_+ následovně

$$\iota_+\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{d!}\,\tilde{\varepsilon}^{-1\boldsymbol{i}_1\dots\boldsymbol{i}_d}\ \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{i}_1\dots\boldsymbol{i}_d} \tag{5.19}$$

Lemma V5.6 (Vlastnosti tenzoru orientace)

Tenzor orientace splňuje

$$\tilde{\varepsilon}_{\boldsymbol{i}_1\dots\boldsymbol{i}_d}\ \tilde{\varepsilon}^{-1\boldsymbol{i}_1\dots\boldsymbol{i}_d} = d!\ , \tag{i}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\boldsymbol{i}_1\dots\boldsymbol{i}_d}\ \tilde{\varepsilon}^{-1\boldsymbol{j}_1\dots\boldsymbol{j}_d} = d!\ {}^{[d]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{j}_1\dots\boldsymbol{j}_d}_{\boldsymbol{i}_1\dots\boldsymbol{i}_d}\ , \tag{ii}$$

$$\tilde{\varepsilon} = (d^d x)^{-1}\ \mathbf{d}x^1 \wedge\dots\wedge \mathbf{d}x^d\ , \tag{iii}$$

$$\tilde{\varepsilon}^{-1} = d!\ \mathcal{A}\Big(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^1}\dots\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^d}\Big)\ d^d x\ , \tag{iv}$$

M5.4 Inverze d-forem

V definici D1.4 v kapitole 1 jsme zavedli operaci inverze převádějící antisymetrické tenzory typu $(0,d)$ na antisymetrické tenzory typu $(d,0)$ a naopak ($d=\dim M$). Připomeňme zde několik vlastností tohoto zobrazení.

$$^{-1}\ :\ \boldsymbol{T}_x{}^{0}_{[d]}M \leftrightarrow \boldsymbol{T}_x{}^{[d]}_{0}M\ ,$$

tak, že pro $\boldsymbol{\omega}\in\boldsymbol{T}_x{}^{0}_{[d]}M$ platí

$$\boldsymbol{\omega}^{-1\boldsymbol{i}_1\dots\boldsymbol{i}_d}\ \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{i}_1\dots\boldsymbol{i}_d} = d!\ ,$$
$$\boldsymbol{\omega}^{-1\boldsymbol{i}_1\dots\boldsymbol{i}_d}\ \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{j}_1\dots\boldsymbol{j}_d} = d!\ {}^{[d]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{i}_1\dots\boldsymbol{i}_d}_{\boldsymbol{j}_1\dots\boldsymbol{j}_d}\ ,$$
$$(\boldsymbol{\omega}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{\omega}\ ,$$
$$\omega^{-11\dots d} = (\omega_{1\dots d})^{-1}\ .$$

kde x^j je pozitivně orientovaný souřadnicový systém, tj. systém, pro který je souřadnicová báze $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial} x^j$ pozitivně orientovaná. $\square$

Na závěr tohoto oddílu ještě definujeme *hustotní duál*.

Definice D5.19 (Hustotní duál)

Hustotní duál * je lineární isomorfismus mezi prostorem antisymetrických $(d–p)$-forem a prostorem antisymetrických tenzorových hustot typu $(p,0)$ váhy 1 (viz následující definici):

$$
\begin{aligned}
{}^\star\ &: \boldsymbol{\Lambda}^{d-p}_x M \to \boldsymbol{\Lambda}^{\star p}_x M\ ,\\
&\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_{p+1}\dots\boldsymbol{n}_d} \to ({}^\star\boldsymbol{\omega})^{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_p} = \tfrac{1}{(d-p)!}\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_d}\,\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{r}_{p+1}\dots\boldsymbol{r}_d}\ ,\\
{}^\star\ &: \boldsymbol{\Lambda}^{\star p}_x M \to \boldsymbol{\Lambda}^{d-p}_x M\ ,\\
&\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{n}_1\dots\boldsymbol{n}_p} \to ({}^\star\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{r}_{p+1}\dots\boldsymbol{r}_d} = \tfrac{1}{p!}\,\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_p}\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_d}\ .
\end{aligned}
$$
$\circ$

Zde užíváme značení

Definice D5.20 (Antisymetrické tenzorové hustoty)

Prostor antisymetrických tenzorových hustot v bodě x s p kontravariantními indexy, spojený s prostorem antisymetrických forem hustotním duálem, označíme

$$
\boldsymbol{\Lambda}^{\star p}_x M = \tilde{\boldsymbol{T}}^{[p]}_{x0} M
$$
$\circ$

Pro hustotní duál platí

Lemma V5.7

$$
\begin{aligned}
&{}^{\star\star}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} && \text{pro } \boldsymbol{\omega}\in\boldsymbol{\Lambda}^p_x M\ , && \text{(i)}\\
&{}^\star\boldsymbol{\alpha} = \iota_+\boldsymbol{\alpha} && \text{pro } \boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{\Lambda}^d_x M\ , && \text{(ii)}\\
&{}^\star\mathfrak{a} = \iota_+^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} && \text{pro } \mathfrak{a}\in\boldsymbol{H}_x M\ , && \text{(iii)}\\
&{}^\star f = f\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1} && \text{pro } f\in\boldsymbol{\Lambda}^0_x M = \mathbb{R}\ , && \text{(iv)}\\
&{}^\star(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\omega}\bullet{}^\star\boldsymbol{\sigma} && \text{pro } \boldsymbol{\omega}\in\boldsymbol{\Lambda}^p_x M\ ,\quad \boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{\Lambda}^{d-q}_x M\ , && \text{(v)}\\
&{}^\star(\boldsymbol{\omega}\bullet\mathfrak{a}) = \boldsymbol{\omega}\wedge{}^\star\mathfrak{a} && \text{pro } \boldsymbol{\omega}\in\boldsymbol{\Lambda}^p_x M\ ,\quad \mathfrak{a}\in\boldsymbol{\Lambda}^{\star q}_x M\ , && \text{(vi)}
\end{aligned}
$$

kde $p\le q$ a operace $\boldsymbol{\omega}\bullet\mathfrak{a}$ značí zúžení všech indexů antisymetrické p-formy s posledními p indexy tenzorové hustoty o q indexech dělené $p!$:

$$
(\boldsymbol{\omega}\bullet\mathfrak{a})^{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_{q-p}} = \frac{1}{p!}\,\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{r}_{q-p+1}\dots\boldsymbol{r}_q}\mathfrak{a}^{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_q}\ .
$$
$\square$

DŮKAZ:

Vztahy (ii) a (iii) plynou přímo z rovnic (5.19) a (5.17), vztah (iv) je speciální případ definice D5.19 pro $p=d$. Vztah (i) dostaneme užitím lemma V5.6(ii) a identity (viz (iv) v lemmatu V1.2)

$$
\tbinom{d}{p}\ {}^{[d]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_{d-p}}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_p\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_{d-p}} = {}^{[p]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_p}\ .
$$

Rovnost (v) dostaneme rozpisem duálu formy podle definice D5.19, přepisem vnějšího násobení pomocí antisymetrizace tenzorového součinu a opětovným použitím definice duálu. Vztah (vi) je duální forma rovnosti (v). $\blacksquare$

Hustotní duál zprostředkovává dualitu mezi dvěma typy objektů, které můžeme integrovat na podvarietách – mezi tenzorovými hustotami a antisymetrickými formami. Jak uvidíme ve větě V5.9(i) níže, převádí integrování pomocí tzv. tečného objemového elementu na integrování pomocí normálového objemového elemntu. Hustotní duál může také v mnoha případech nahradit obvyklejší Hodgeův duál (který zavedeme v příští kapitole v definici D6.14), jak tomu je např. v definici D10.2 divergence a rotace antisymetrických forem. Na rozdíl od Hodgeova duálu, k jehož definic potřebujeme metriku, hustotní duál nevyužívá žádnou dodatečnou geometrickou strukturu.

5.7 Integrování antisymetrických d-forem

Díky příbuznosti integrovatelných hustot a forem, můžeme na orientovatelných varietách definovat integrál antisymetrických d-forem.

Definice D5.21 (Integrování d-forem)

Nechť M je globálně orientovatelná varieta. Integraci pole $\boldsymbol{\omega}$ antisymetrických d-forem definujeme

$$\int_\Omega \boldsymbol{\omega} = \int_\Omega \iota_+ \boldsymbol{\omega} \,. \qquad \circ$$

Věta V5.8 (Integrování d-forem)

Integrace d-formy $\boldsymbol{\omega}$ lze rozepsat

$$\int_\Omega \boldsymbol{\omega} = \sum_k \int_{\Omega\cap U_k} \varphi_k \, \boldsymbol{\omega} \,,$$

kde $\{\varphi_k\}$ je rozklad jednotky pro pokrytí variety systémy souřadnic definovanými na oblastech U_k.

Na oblasti Ω pokryté jedním systémem souřadnic x^j pak dostáváme

$$\int_\Omega \boldsymbol{\omega} = \int_\Omega \omega_{1\dots d}\, d^d x = \int_{x^i(\Omega)} \omega_{1\dots d}(x^1,\dots,x^d)\, dx^1 \dots dx^d \,.$$

Systém souřadnic x^j musí být přitom zvolen pozitivně orientovaný. (Toho lze vždy dosáhnout vhodným přeuspořádáním souřadnic.) $\square$

Důkaz:

Rozepsání integrálu pomocí rozkladu jednotky plyne z linearity isomorfismu ι_+. Pro pozitivně orientovaný souřadný systém pak můžeme použít (5.16). Poslední rovnost je již jen explicitní přepsání definice D5.1. $\blacksquare$

Na neorientovatelných varietách nelze integrace d-forem zavést. V definici D5.21 se využívá orientovatelnosti ke ztotožnění d-forem a hustot pomocí isomorfismu ι_+. V konkrétním rozepsání integrálu se volba orientace projeví v tom, že potřebujeme mít varietu pokrytou pozitivně orientovanými systémy souřadnic. Pokud bychom zvolili orientaci pro každý systém souřadnic zvlášť, nekorelovaně s ostatními, nelze zaručit nezávislost výsledku integrálu na výběru souřadných systémů a na volbě rozkladu jednotky – viz příklad P5.5.

Integrace hustot však na orientovatelnosti variety nezáleží. Zhruba řečeno, hustoty slouží k měření 'velikosti' objemu, d-formy měří 'orientovaný objem'. Na orientovatelných varietách lze jednoduše ztotožnit positivně orientovaný objem s jeho velikostí. Na neorientovatelných varietách nemá orientovaný objem globálně smysl.

Příklad P5.5 (Integrace přes Möbiův pásek)

Potíže s integrací d-forem na neorientovatelné varietě si můžeme dokumentovat na Möbiově pásku popsaném v příkladu P5.4.

Jelikož se jedná o neorientovatelnou varietu, neexistuje zde všude nenulová 2-forma, která by mohla měřit 'skutečnou plochu'. Můžeme však zadat 2-formu, která v některých bodech vymizí. Vezměme si jako příklad 2-formu

$$\boldsymbol{\omega} = \exp(-x^2)\sin^2\varphi \;\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}\varphi \,.$$

Využitím transformačních vztahů z příkladu P5.4 můžeme přepsat tuto formu i v souřadnicích y, ψ

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{cases} +\exp(-y^2)\sin^2\psi \;\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}\psi & \text{pro } \psi < 0 \,, \\ -\exp(-y^2)\sin^2\psi \;\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}\psi & \text{pro } \psi > 0 \,. \end{cases}$$

Forma $\boldsymbol{\omega}$ vymizí na přímkách $\varphi = 0$ a $\psi = 0$. Zdálo by se tedy, že místo integrace přes celý pásek se stačí omezit pouze na oblast U nebo pouze na oblast V. Zanedbáme tak pouze množinu míry nula (vůči jakékoli hladké hustotě), navíc forma $\boldsymbol{\omega}$ je na zanedbávané množině nulová. Obě tyto oblasti již jsou orientovatelné. Nabízí se zvolit orientaci tak, aby systém x, φ měl pozitivní orientaci na U a systém y, ψ pozitivní orientaci na V. To znamená, že forma $\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}\varphi$ je pozitivně orientovaná ve smyslu orientace na U a forma $\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}\psi$ je pozitivně orientovaná ve smyslu orientace na V. Vyčíslíme nyní integrál formy $\boldsymbol{\omega}$ jak přes U, tak přes V:

$$\begin{aligned}
\int_U \boldsymbol{\omega} &= \int_U \exp(-x^2)\sin^2\varphi \;\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}\varphi \\
&= \int_U \exp(-x^2)\sin^2\varphi \; dx d\varphi = \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\, dx \int_{(-\pi,\pi)} \sin^2\varphi \; d\varphi \\
&= \pi^{3/2} \,, \\
\int_V \boldsymbol{\omega} &= -\int_V \operatorname{sign}\psi \;\exp(-y^2)\sin^2\psi \;\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}\psi \\
&= -\int_V \operatorname{sign}\psi \;\exp(-y^2)\sin^2\psi \; dy d\psi \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \exp(-y^2)\; dy \int_{(-\pi,\pi)} \operatorname{sign}\psi \;\sin^2\psi \; d\psi \\
&= 0 \,.
\end{aligned}$$

Vidíme, že odlišná volba souřadného systému (a s ním spojené orientace) vede k nejednoznačnosti integrálu. Integrál $\boldsymbol{\omega}$ tak nemá smysl globálně.

Můžeme samozřejmě zintegrovat absolutní hodnotu formy $\boldsymbol{\omega}$. Ta má tvar

$$|\boldsymbol{\omega}| = \exp(-x^2)\sin^2\varphi \; dx d\varphi = \exp(-y^2)\sin^2\psi \; dy d\psi$$

a její integrál je

$$\int |\boldsymbol{\omega}| = \int_U |\boldsymbol{\omega}| = \int_V |\boldsymbol{\omega}| = \pi^{3/2} \,.$$

Na Möbiově pásku lze zvolit plochou metriku, ve které jsou oba diskutované souřadnicové systémy lokálně kartézské,

$$\boldsymbol{g} = \mathbf{d}x\,\mathbf{d}x + \mathbf{d}\varphi\,\mathbf{d}\varphi = \mathbf{d}y\,\mathbf{d}y + \mathbf{d}\psi\,\mathbf{d}\psi \,.$$

S touto metrikou je spojen přirozený objemový element $\mathfrak{g}^{1/2}$

$$\mathfrak{g}^{1/2} = |\operatorname{Det}\boldsymbol{g}|^{1/2} = dx d\varphi = dy d\psi \,.$$

5.8 Integrování na podvarietách

Nyní budeme zkoumat integrování přes podvarietu N (dimenze $d-n$) variety M (dimenze d). Nejprve nás bude zajímat vztah tenzorových hustot definovaných na podvarietě N a varietě M. Při přechodu mezi objekty definovanými na varietě M k objektům na podvarietě N se typicky využívá informace týkající se pouze směrů tečných nebo pouze normálových k N. Potřebujeme proto uchopit informaci o tečných či normálových směrech.

Jeden ze způsobů, jak to provést, je zavést integrovatelnou hustotu na N, která navíc nese informaci o tečných směrech k N – zavést tzv. *tečný objemový element* $\boldsymbol{d\Sigma}_N$. Bude se jednat o zobecnění délkového elementu $\boldsymbol{d\ell}$ užívaného při integraci přes křivku. Ten je dán součinem integrovatelné hustoty ds (s je parametr křivky) a tečného vektoru $\boldsymbol{t}$.

Alternativně, můžeme zadat místo informace o tečných směrech informaci o směrech doplňkových, tj. o směrech normálových. To lze provést pomocí *normálového objemového elementu* $\tilde{\boldsymbol{dS}}_N$, který je s tečným objemovým elementem spojen pomocí hustotního duálu. Tento element umožní transformovat jisté tenzorové hustoty na M na integrovatelné hustoty na N. Jedná se zobecnění normálového plošného elementu $\boldsymbol{dS} = \boldsymbol{n}dS$ sloužícímu k integraci normálových složek vektorových polí přes plochy vnořené do třídimenzionálního prostoru.

Naším cílem bude nejprve přiřadit antisymetrické formě stupně $d-n$ definované na M integrovatelnou hustotu na N. Přirozený postup je provést nejdříve restrikci formy ‘žijící’ na M na formu ‘žijící’ na N a po té ji převést na hustotu pomocí isomorfismu ι_+.

Pro antisymetrickou formu $\boldsymbol{\omega}$ stupně $d-n$ můžeme v přizpůsobených souřadnicích x^i psát

$$\boldsymbol{\omega}|_N = \omega_{n+1\ldots d}\ \mathbf{d}x^{n+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^d\ , \tag{5.20}$$

kde 1-formy $\mathbf{d}x^u$ jsou chápány jako gradienty souřadnic na N, tj. jako prvky $\boldsymbol{T}^*_x N$. Vskutku, rozepíšeme-li jednotkový tenzor na prostoru antisymetrických forem $\boldsymbol{\Lambda}^p_x M$ řádu $p = d-n$ v přizpůsobených souřadnicích

$${}^{[p]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_d}_{\boldsymbol{b}_1\ldots\boldsymbol{b}_p} = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq d} \frac{\boldsymbol{\partial}^{[\boldsymbol{a}_1}}{\boldsymbol{\partial} x^{i_1}} \cdots \frac{\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{a}_p]}}{\boldsymbol{\partial} x^{i_p}}\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{b}_1} x^{i_1} \wedge\cdots\wedge \mathbf{d}_{\boldsymbol{b}_p} x^{i_p}\ , \tag{5.21}$$

a provedeme-li restrikci na podvarietu v části obsahující kovektory, dostaneme smíšený tenzorový objekt z prostoru $\boldsymbol{T}^{[p]}_{x0} M \otimes \boldsymbol{T}^{0}_{x[p]} N$ provádějící restrikci $\boldsymbol{\omega}$ na $\boldsymbol{\omega}|_N$ zúžením přes všechny indexy odpovídající varietě M:

$$\boldsymbol{\omega}|_{N\,\boldsymbol{u}_1\ldots\boldsymbol{u}_p} = \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_p}\, {}^{[p]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_d}_{\boldsymbol{u}_1\ldots\boldsymbol{u}_p}\ . \tag{5.22}$$

Ale při restrikci souřadnicových 1-forem $\mathbf{d}x^i$ všechny formy s indexem $i = 1, \ldots, n$ vymizí, čili v sumě na pravé straně (5.21) zbyde po restrikci na N pouze člen

$$\frac{\boldsymbol{\partial}^{[\boldsymbol{a}_{n+1}}}{\boldsymbol{\partial} x^{n+1}} \cdots \frac{\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{a}_d]}}{\boldsymbol{\partial} x^d}\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{u}_{n+1}} x^{n+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}_{\boldsymbol{u}_d} x^d\ . \tag{5.23}$$

Zúžením tohoto tenzoru s $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_{n+1}\ldots\boldsymbol{a}_d}$ dostaneme výraz (5.20). Nyní zbývá aplikovat isomorfismus ι_+, který provede záměnu $\mathbf{d}x^{n+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^d$ na hustotu $d^{d-n}x$ na N.

M5.5 Podvariety – opakování
V podkapitole 3.4 jsme definovali pojem podvariety N dimenze $d-n$ (tj. kodimenze n) vnořené do variety M dimenze d. Připomeňme (viz definici D3.15), že v souřadnicích x^i *přizpůsobených podvarietě* N je tato podvarieta dána podmínkami

$$x^i|_N = 0 \qquad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, n\ ,$$

a zbývající souřadnicové funkce x^u, $u = n+1, \ldots, d$ tvoří souřadný systém na N. Pro souřadnicové a tenzorové indexy na podvarietě N budeme používat písmenka z konce abecedy.
Zopakujme též, že máme přirozené vnoření prostoru tečných vektorů $\boldsymbol{T}_x N$ do tečného prostoru $\boldsymbol{T}_x M$ a obdobně pro tenzory s indexy pouze v horní poloze. Pro kovektory (a obecně tenzory s indexy pouze v dolní pozici) máme pouze pojem restrikce z $\boldsymbol{T}^*_x M$ do $\boldsymbol{T}^*_x N$ – viz definici D3.16.

Celou tuto proceduru můžeme spojit zavedením tečného objemového elementu:

Definice D5.22 (Tečný objemový element podvariety)
Mějme orientovatelnou podvarietu N dimenze $d{-}n$ vnořenou do orientovatelné variety M dimenze d a přizpůsobené souřadnice x^i, které jsou ve smyslu obou variet positivně orientované. Pak definujeme *tečný objemový element podvariety* N

$$\boldsymbol{d\Sigma}_N \in \boldsymbol{T}_x^{d-n} M \otimes \boldsymbol{H}_x N$$

následovně

$$\boldsymbol{d\Sigma}_N = d^{d-n}x \ \mathcal{A}\Big(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^{n+1}} \cdots \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^d}\Big) \ .$$

Tato smíšená tenzorová hustota je nezávislá na volbě přizpůsobených souřadnic x^i a zprostředkovává zobrazení z prostoru antisymetrických $d{-}n$ forem na M do hustot na N:

$$\begin{aligned} |_N \ &: \boldsymbol{\Lambda}_x^{d-n} M \to \boldsymbol{H}_x M \ , \\ \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_{n+1}\dots\boldsymbol{a}_d} &\to \boldsymbol{\omega}|_N = \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_{n+1}\dots\boldsymbol{a}_d} \ \boldsymbol{d\Sigma}_N^{\boldsymbol{a}_{n+1}\dots\boldsymbol{a}_d} \ . \end{aligned}$$

∘

POZNÁMKA
Označení $\boldsymbol{\omega}|_N$ je stejné jako označení pro restrikci formy na podvarietu N. Jelikož se jedná o velmi blízké operace, nebudeme je explicitně rozlišovat – rozdíl je dán implicitně povahou výsledku (tj. zda $\boldsymbol{\omega}|_N$ je forma či hustota).

POZNÁMKA
Srovnáním se vztahem (iv) lemmatu V5.6 vidíme, že tečný objemový element $\boldsymbol{d\Sigma}_N$ je shodný s inverzním tenzorem orientace na N (přeškálovaným faktorem $1/(d{-}n)!$), jehož tenzorová část (patřící do $\boldsymbol{T}_x{}^{[d-n]}_{\ 0} N$) je vnořená do tečného prostoru $\boldsymbol{T}_x{}^{[d-n]}_{\ 0} M$ a hustotní část (patřící do $\boldsymbol{H}_x N$) zůstává spojená s varietou N. To dokazuje nezávislost definice D5.22 na volbě souřadnic.

Souřadnicové vyjádření tečného objemového elementu s explicitně uvedenými tenzorovými indexy je:

$$\boldsymbol{d\Sigma}_N^{\boldsymbol{a}_{n+1}\dots\boldsymbol{a}_d} = d^{d-n}x \ \frac{\boldsymbol{\partial}^{[\boldsymbol{a}_{n+1}}}{\boldsymbol{\partial} x^{n+1}} \cdots \frac{\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{a}_d]}}{\boldsymbol{\partial} x^d} \ . \tag{5.24}$$

Pro hustotu asociovanou s formou $\boldsymbol{\omega}$ tak vůči positivně orientované bázi přizpůsobené podvarietě N dostáváme

$$\boldsymbol{\omega}|_N = \omega_{n+1\dots d} \ d^{d-n}x \ . \tag{5.25}$$

Vidíme, že tečný objemový element $\boldsymbol{d\Sigma}_N$ vybírá z antisymetrické $d{-}n$ formy definované na M část tečnou k N a z ní vytváří integrovatelnou hustotu na N.

Tečný objemový element je tak zobecněním lineárního tečného elementu na křivce $\boldsymbol{d\ell}^{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{a}} ds$. Zde $\boldsymbol{t}$ je tečný vektor ke křivce parametrizované parametrem s. Ke každé 1-formě $\boldsymbol{\omega}$ nám $\boldsymbol{d\ell}$ přiřazuje hustotu na křivce $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{d\ell}^{\boldsymbol{a}} = \omega_s ds$, která je nezávislá na parametrizaci s a závisí pouze na tečné komponentě ω_s formy $\boldsymbol{\omega}$.

Nyní již můžeme definovat integraci antisymetrických forem přes podvarietu:

Definice D5.23 (Integrování forem přes podvarietu)
Mějme orientovatelnou podvarietu N dimenze $d{-}n$ orientovatelné variety M dimenze d. Integrál formy $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}^{d-n} M$ definované na varietě M přes oblast Ω v podvarietě N je definován

$$\int_\Omega \boldsymbol{\omega} = \int_\Omega \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_{n+1}\dots\boldsymbol{a}_d} \ \boldsymbol{d\Sigma}_N^{\boldsymbol{a}_{n+1}\dots\boldsymbol{a}_d} \ ,$$

tj. jako integrál z hustoty $\boldsymbol{\omega}|_N \in \tilde{\mathfrak{F}}N$. $\circ$

V positivně orientovaných souřadnicích x^i přizpůsobených podvarietě N dostáváme

$$\int\limits_\Omega \boldsymbol{\omega} = \int\limits_\Omega \omega_{n+1\dots d}\; d^{d-n}x \;. \tag{5.26}$$

Příklad P5.6 (Integrace přes podvarietu I)

Mějme dvoudimenzionální sféru S vnořenou do třídimenziálního euklidovského prostoru E. Jako přizpůsobené souřadnice můžeme zvolit sférické souřadnice r, ϑ, φ. Sféra o poloměru R je dána podmínkou $r = R$. (Zde jsme částečně uvolnili podmínky definující souřadnice přizpůsobené podvarietě – namísto podmínky $r|_S = R$ bychom měli psát $x^1|_S = 0$, kde $x^1 \equiv (r - R)$. To ale nijak neovlivní další diskuzi.) Pomocí přizpůsobených souřadnic můžeme zapsat tečný objemový element

$$\boldsymbol{d\Sigma}_S^{\boldsymbol{ab}} = \frac{\boldsymbol{\partial}^{[\boldsymbol{a}}}{\boldsymbol{\partial}\vartheta}\frac{\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{b}]}}{\boldsymbol{\partial}\varphi}\, d\vartheta d\varphi = \frac{1}{R}\frac{\boldsymbol{\partial}^{[\boldsymbol{a}}}{\boldsymbol{\partial}\vartheta}\,\frac{1}{R\sin\vartheta}\frac{\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{b}]}}{\boldsymbol{\partial}\varphi}\, dS \;,$$

kde dS označuje plošný element asociovaný s indukovanou metrikou $\boldsymbol{q}$ na sféře (viz definici D5.11)

$$dS = |\mathrm{Det}\,\boldsymbol{q}|^{\frac{1}{2}} = R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta d\varphi \;.$$

Poznamenejme, že kombinace $\frac{1}{R}\frac{\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{a}}}{\boldsymbol{\partial}\vartheta}$ a $\frac{1}{R\sin\vartheta}\frac{\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{b}}}{\boldsymbol{\partial}\varphi}$ jsou jednotkové vektory měřeno metrikou $\boldsymbol{q}$.

Jako příklad nyní integrujme 2-formu $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$, kde x, y, z jsou kartézské souřadnice, přes oblast Ω danou podmínkou $\vartheta < \pi/2$. Ze vztahů mezi sférickými a kartézskými souřadnicemi dostaneme

$$\boldsymbol{\omega} = r\sin^2\vartheta\; \mathbf{d}r \wedge \mathbf{d}\varphi + r^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\; \mathbf{d}\vartheta \wedge \mathbf{d}\varphi \;.$$

Zúžením s tečným objemovým elementem na sféře S dostaneme

$$\boldsymbol{\omega}|_S = \boldsymbol{\omega_{ab}}\; \boldsymbol{d\Sigma}_S^{\boldsymbol{ab}} = R^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\; d\vartheta d\varphi \;.$$

Alternativně bychom mohli nejdříve provést restrikci formy $\boldsymbol{\omega}$ na S vedoucí k $R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\;\mathbf{d}\vartheta\wedge\mathbf{d}\varphi$ a tu pak převést na integrovatelnou hustotu s využitím vztahu $\iota_+\, \mathbf{d}\vartheta \wedge \mathbf{d}\varphi = d\vartheta d\varphi$.

Integrace nakonec dává

$$\int\limits_\Omega \boldsymbol{\omega} = \int\limits_{\substack{\vartheta\in(0,\pi/2)\\ \varphi\in(-\pi,\pi)}} R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\; d\vartheta d\varphi = \pi R^2$$

Nyní přistoupíme k zavedení duálního normálového objemového elementu:

Definice D5.24 (Normálový objemový element podvariety)

Mějme orientovatelnou podvarietu N dimenze $d-n$ vnořenou do orientovatelné variety M dimenze d a přizpůsobené souřadnice x^i, které jsou ve smyslu obou variet positivně orientované. Pak definujeme *normálový objemový element podvariety* N

$$\tilde{\boldsymbol{dS}}_N \in \boldsymbol{T}_x{}^0_{[n]}M \otimes \boldsymbol{H}_x^{-1}M \otimes \boldsymbol{H}_x N$$

následovně

$$\tilde{\boldsymbol{dS}}_{N\,\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_n} = \frac{1}{n!}\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d}\; \boldsymbol{d\Sigma}_N^{\boldsymbol{a}_{n+1}\dots\boldsymbol{a}_d} \;.$$

Tato smíšená tenzorová hustota zprostředkovává zobrazení z prostoru antisymetrických tenzorových hustot stupně n na M do integrovatelných hustot na N:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\Lambda}^{\star n}_x M \to \boldsymbol{H}_x M\ , \\ &\quad \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_n} \to \mathfrak{a} = \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_n}\ \tilde{\boldsymbol{dS}}_{N\,\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_n}\ . \end{aligned} \qquad \circ$$

V souřadnicích x^i přizpůsobených podvarietě N můžeme psát

$$\tilde{\boldsymbol{dS}}_N = \frac{1}{n!}\,\big(d^d x\big)^{-1}\ d^{d-n}x\ \mathbf{d}x^1 \wedge\dots\wedge \mathbf{d}x^n\ . \tag{5.27}$$

Pokud označíme $\alpha^{r_1\dots r_n}$ komponentu tenzorové hustoty $\boldsymbol{\alpha}$ vůči souřadnicím x^i,

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha^{r_1\dots r_n}\,\mathcal{A}\Big(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^r_1}\cdots\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^r_n}\Big)\ d^d x\ , \tag{5.28}$$

pro indukovanou hustotu $\mathfrak{a}$ na N dostaneme

$$\mathfrak{a} = \alpha^{1\dots n}\ d^{d-n}x\ . \tag{5.29}$$

Normálový objemový element tak vybírá z tenzorové hustoty směry normálové k podvarietě a mění charakter hustoty na varietě M na hustotu na podvarietě N. Speciálně pro nadplochu Σ kodimenze $n=1$ $\tilde{\boldsymbol{dS}}_{\Sigma\,\boldsymbol{a}}$ odpovídá plošnému elementu jehož směr je kolmý k nadploše Σ.

Mezi tečným a normálovým objemovým elementem platí následující vztahy:

Lemma V5.9

$$\big({}^{\star}\boldsymbol{\omega}\big)^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_n}\ \tilde{\boldsymbol{dS}}_{N\,\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_n} = \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_{n+1}\dots\boldsymbol{a}_d}\ \boldsymbol{d\Sigma}_N^{\boldsymbol{a}_{n+1}\dots\boldsymbol{a}_d} \tag{i}$$

$$\boldsymbol{d\Sigma}_N^{\boldsymbol{a}_{n+1}\dots\boldsymbol{a}_n} = \frac{1}{(d-n)!}\ \tilde{\varepsilon}^{-1\,\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d}\ \tilde{\boldsymbol{dS}}_{N\,\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_n} \tag{ii}$$

$$\tilde{\boldsymbol{dS}}_{N\,\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_n} = \frac{1}{n!}\ \tilde{\varepsilon}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d}\ \boldsymbol{d\Sigma}_N^{\boldsymbol{a}_{n+1}\dots\boldsymbol{a}_d}\ . \tag{iii}$$

□

Normálový objemový element umožňuje integrovat tok tenzorových hustot stupně n přes $d-n$-dimenzionální podvarietu

Definice D5.25 (Integrování tenzorových hustot přes podvarietu)

Mějme orientovatelnou podvarietu N dimenze $d-n$ orientovatelné variety M dimenze d. Integrál tenzorové hustoty $\boldsymbol{\alpha} \in \operatorname{Sect} \boldsymbol{\Lambda}^{\star n} M$ definované na varietě M přes oblast Ω v podvarietě N je definován

$$\int_\Omega \boldsymbol{\alpha} = \int_\Omega \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_n}\ \tilde{\boldsymbol{dS}}_{N\,\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_n}\ . \qquad \circ$$

Pro nadplochu Σ kodimenze $n=1$ tak můžeme definovat tok vektorové hustoty $\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{a}}$ skrze tuto nadplochu jako integrál

$$\int_\Sigma \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{a}}\ \tilde{\boldsymbol{dS}}_{\Sigma\,\boldsymbol{a}}\ . \tag{5.30}$$

Tento integrál je přímočaré zobecnění plošného integrálu s normálovým plošným elementem $\boldsymbol{dS} = \boldsymbol{n}dS$ užívaným pro dvoudimenzionální plochy vnořené do třídimenzionálního prostoru.

Příklad P5.7 (Integrace přes podvarietu II)

V kontextu příkladu P5.6 má normálový objemový element tvar:

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{S}_S &= (drd\vartheta d\varphi)^{-1}\, d\vartheta d\varphi\;\; \mathbf{d}r\\ &= (drd\vartheta d\varphi)^{-1}\, d\vartheta d\varphi\, \left(\frac{x}{r}\,\mathbf{d}x + \frac{y}{r}\,\mathbf{d}y + \frac{z}{r}\,\mathbf{d}z\right)\end{aligned}$$

Budeme integrovat vektorovou hustotu

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} z}\, dxdydz = \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} z}\, r^2 \sin\vartheta\, drd\vartheta d\varphi$$

přes oblast Ω danou podmínkou $\vartheta < \pi/2$. Zúžením s normálovým objemovým elementem na sféře S (a použitím $z/r = \cos\vartheta$) dostaneme

$$\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{a}}\; \tilde{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{S}_{S\,\boldsymbol{a}} = R^2 \sin\vartheta \cos\vartheta\; d\vartheta d\varphi\;.$$

Integrál této hustoty na S je již totožný s integrálem počítaným v příkladě P5.6.

To, že výsledek je totožný, není náhoda. Platí totiž

$$\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} z}\, dxdydz = {}^{\star}\big(\,\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y\big)\;,$$

čili s využitím (i) lemmatu V5.9 vidíme, že hustota indukovaná na S musí být v obou příkladech P5.6 a P5.7 stejná.