verze 2.03 (2013-12-09)
[2.03,1.12,1.14,2.04,2.02,2.02,2.03,2.03,2.02,0,1.03]

Kapitola 7

Kovariantní derivace

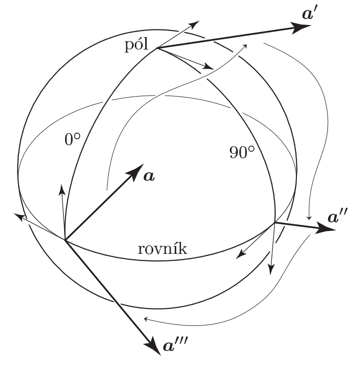
Při zkoumání tenzorových polí na varietách bychom rádi uměli charakterizovat změny těchto polí. Aparát diferenciální geometrie by nám měl umožňovat derivovat obecná tenzorová pole. Jak jsme se však již zmínili v kapitole 3, naivní definice derivace tenzorového pole $\boldsymbol{A}$ podél parametrizované křivky $z(\tau)$

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\Big(\boldsymbol{A}\big(z(\tau)\big) - \boldsymbol{A}\big(z(0)\big)\Big) \tag{7.1}$$

naráží na problém, že v ní odčítáme tenzory v různých bodech – tenzory patřící do různých tečných prostorů. Korektně zavedená derivace musí tedy obsahovat informaci, jak tento rozdíl provést, jak přenést tenzor z jednoho tečného prostoru do prostoru druhého, ve kterém již tenzory odčítat umíme.

V kapitole 3 v definici Lieovy derivace D3.11 jsme tento přenos provedli pomocí difeomorfismu indukovaného vektorovým polem podél kterého derivujeme. V této kapitole nás bude zajímat přenos definovaný geometricky, zobecňující pojem *rovnoběžnosti*.

M7.1 Neexistence globální rovnoběžnosti



Jednoduchou evidenci, že v případě zakřiveného prostoru nemáme globální rovnoběžnost, získáme na příkladu dvoudimenzionální sféry S^2. Přenášíme-li vektor $\boldsymbol{a}$ rovnoběžně z rovníku na pól podél nultého poledníku, poté podél 90-tého poledníku opět na rovník, a nakonec po rovníku zpět do výchozího bodu, zjistíme, že výsledný vektor $\boldsymbol{a}'''$ není rovnoběžný s vektorem původním – rovnoběžný přenos vektoru z bodu do bodu záleží na cestě, po které vektor přenášíme. (Pod rovnoběžným přenosem vektoru podél *poledníku či rovníku na kouli* zde míníme přenos, který zachovává velikost vektoru a úhel mezi vektorem a poledníkem či vektorem a rovníkem. Více viz zavedení paralelního přenosu.)

7.1 Paralelní přenos

V předchozí kapitole jsme obecnou diferencovatelnou varietu vybavili velmi silnou geometrickou strukturou – metrikou. Ta nám umožňuje definovat vzdálenost, měřit úhly, a jak uvidíme později, zavést i pojem rovnoběžnosti. Naším cílem je však popisovat obecný *zakřivený* prostor a jeho základní odlišnost od prostoru *rovného* (*plochého*) je neexistence *globální* rovnoběžnosti.

V plochém prostoru můžeme globálně a invariantně říci, které vektory patřící do tečných prostorů *různých bodů* jsou navzájem rovnoběžné. V křivém prostoru tak učinit nelze. Globální rovnoběžnost je význačná vlastnost právě plochých variet.

V zakřiveném prostoru lze definovat pouze slabší strukturu - *rovnoběžný* či *paralelní přenos vektoru podél křivky*. Paralalní přenos umožňuje přenést rovnoběžně vektor z jednoho bodu do druhého podél konkrétní křivky. Výsledek však obecně závisí na cestě přenosu. Abychom vlastnostem paralelního přenosu lépe porozuměli, navrátíme se k varietě bez metrické struktury, tedy nebudeme předpokládat přítomnost metriky.

Definice D7.1 (Paralelní přenos podél křivky)
Nechť γ je orientovaná po částech hladká křivka spojující body x_z a x_k. *Paralelní přenos* $\mathrm{par}[\gamma]$ *podél* γ je zobrazení splňující následující vlastnosti:

$$\begin{aligned}&\mathrm{par}[\gamma]\ :\ \boldsymbol{T}_{x_z}M \to \boldsymbol{T}_{x_k}M\ ,\\ &\mathrm{par}[\gamma](\boldsymbol{a}+r\boldsymbol{b}) = \mathrm{par}[\gamma]\,\boldsymbol{a} + r\,\mathrm{par}[\gamma]\,\boldsymbol{b} \qquad \text{(linearita)}\end{aligned}$$

pro $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{T}_{x_z}M$ a $r \in \mathbb{R}$. Navíc, pokud se křivka γ skládá z dvou částí γ_z a γ_k spojených v bodě x_o, tj. $\gamma = \gamma_z \odot \gamma_k$, a $-\gamma$ je křivka lišící se od γ orientací, paralelní přenos splňuje

$$\begin{aligned}&\mathrm{par}[\gamma] = \mathrm{par}[\gamma_k] \circ \mathrm{par}[\gamma_z]\ , && \text{(pravidlo pro skládání)}\\ &\mathrm{par}[-\gamma] = \mathrm{par}[\gamma]^{-1}\ , && \text{(přenos v inverzním směru)}\\ &\mathrm{par}[\gamma] = \mathrm{id} \qquad \text{pro } \gamma \text{ triviální}\ . && \text{(triviální přenos)}\end{aligned}$$

Paralelní přenos lze též naindukovat na obecný tečný tenzorový bundle $\boldsymbol{T}^l_k M$ požadavkem, že komutuje s tenzorovým násobením

$$\mathrm{par}[\gamma](\boldsymbol{AB}) = (\mathrm{par}[\gamma]\,\boldsymbol{A})\,(\mathrm{par}[\gamma]\,\boldsymbol{B})\ .$$
∘

Poznámka
Definice paralelního přenosu by ještě měla obsahovat další podmínky určující hladkost paralelního přenosu. Ty se však snáze formulují v lokální řeči kovariantní derivace. Jelikož již v příštím oddíle budeme chápat kovariantní derivaci jako primární objekt a paralelní přenos jako odvozenou strukturu, nebudeme definici paralelního přenosu dále rozvádět.

Zdůrazněme, že paralelní přenos závisí pouze na geometrické stopě křivky na varietě, nikoli na případné parametrizaci křivky. Pro parametrizované křivky je však výhodné zavést následující označení:

Definice D7.2
Mějme křivku γ reprezentovanou pomocí parametrizace $z : I \to M$, kde I je interval v $\mathbb{R}$ obsahující 0. Pro $\tau \in I$ definujeme

$$\mathrm{par}_\tau[z] = \mathrm{par}[\gamma_\tau]\ .$$

Zde γ_τ je křivka daná částí křivky γ mezi body $z(0)$ a $z(\tau)$ (pro $\tau < 0$ s opačnou orientací než γ). ∘

Paralelní přenos na obecné diferencovatelné varietě není určen jednoznačně. Můžeme definovat různé paralelní přenosy. Klasifikace všech možných paralelních přenosů však bude mnohem jednodušší, pokud namísto *globálního* paralelního přenosu zavedeme jeho *lokální* formu – kovariantní derivaci.

Než tak provedeme, zmiňme ještě krátce pojem *grupy holonomie*. Paralelní přenos podél uzavřené křivky, tj. křivky začínající a končící ve stejném bodě x, indukuje lineární zobrazení na tečném prostoru $\boldsymbol{T}_x M$. Všechna tato zobrazení generovaná všemi uzavřenými křivkami skrze x tvoří tzv. *grupu holonomie* $\mathrm{Hol}(x)$ *v bodě* x.

7.2 Kovariantní derivace

Paralelní přenos je globální struktura na varietě – svazuje spolu tečné prostory různých bodů spojených křivkou. Jeho geometrický význam je poměrně názorný. Není však nejvhodnější pro lokální popis rovnoběžnosti. Pro takový popis je výhodnější přejít k lokální veličině – *kovariantní derivaci*.

Paralelní přenos vektorů a tenzorů podél křivky nám totiž umožňuje dát význam vzorci (7.1) pro derivaci tenzorového pole. Tenzory z různých tečných prostorů přeneseme do společného prostoru právě pomocí paralelního přenosu. Definice kovariantní derivace pomocí paralelního přenosu má tak tvar:

Definice D7.3 (Kovariantní derivace pomocí paralelního přenosu)

Mějme tenzorové pole $\boldsymbol{A}$ definované v okolí bodu x a tečný vektor $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{T}_x M$. Kovariantní derivaci $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{A}$ pole $\boldsymbol{A}$ ve směru $\boldsymbol{a}$ defininujeme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{A} &= \frac{d}{d\tau}\Big(\mathrm{par}_{-\tau}[z]\,\boldsymbol{A}\Big)\Big|_{\tau=0}\\ &= \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\Big(\mathrm{par}_{\tau}[z]^{-1}\boldsymbol{A}\big(z(\tau)\big) - \boldsymbol{A}\big(z(0)\big)\Big)\ ,\end{aligned}$$

kde $z(\tau)$ je libovolná parametrizovaná křivka vedoucí ze $z(0) = x$ s tečným vektorem $\boldsymbol{a}$. ◦

POZNÁMKA

Kovariantní derivace nezávisí na volbě křivky $z(\tau)$, pouze na vektoru $\boldsymbol{a}$ v bodě x – rozdíl způsobený v odlišné volbě křivky $z(\tau)$ je vyššího řádu v τ.

Kovariantní derivace je natolik užitečný a významný geometrický objekt, že se většinou definuje ne jako druhotný objekt závisející na pojmu paralelního přenosu, ale přímo, jako objekt primární. Kovariantní derivace se definuje axiomaticky. Kdybychom vycházeli z definice D7.3, tyto vlastnosti by již byly jejím důsledkem. My je však zformulujeme jako definiční vlastnosti vymezující význam pojmu kovariantní derivace nezávisle na paralelním přenosu:

Definice D7.4 (Kovariantní derivace)

Kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}$ ve směru $\boldsymbol{a}$ v bodě x je operátor působící na tenzorová pole splňující

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{T}_{x}{}^{k}_{l} M \qquad \text{pro} \quad \boldsymbol{A} \in \mathfrak{T}^k_l M\ ,\\
&\boldsymbol{\nabla}_{(f\boldsymbol{a})}\boldsymbol{A} = f\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{A}\ , && \text{(ultralokalita ve směru)}\\
&\boldsymbol{\nabla}_{(\boldsymbol{a}+r\boldsymbol{b})}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{A} + r\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{A}\ , && \text{(linearita ve směru)}\\
&\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\big(\boldsymbol{A} + r\boldsymbol{B}\big) = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{A} + r\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{B}\ , && \text{(linearita v argumentu)}\\
&\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\big) = \big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{A}\big)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{B}\big)\ , && \text{(Leibniz)}\\
&\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\,\mathrm{C}\boldsymbol{A} = \mathrm{C}\,\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{A}\ , && \text{(komutace s kontrakcí)}\\
&\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} f = \boldsymbol{a}[f] = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} f\ , && \text{(působení na funkce)}
\end{aligned}$$

kde f je funkce a $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ tenzorová pole definované v okolí bodu x, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{T}_x M$, $r \in \mathbb{R}$ a $\mathrm{C}\boldsymbol{A}$ naznačuje libovolné zúžení tenzoru $\boldsymbol{A}$. ◦

POZNÁMKA

Kovariantní derivace je též často nazývána *lineární konexí.* Obdobu kovariantní derivace, kterou jsme zavedli na tečném bundlu, lze totiž definovat na každém lineárním fibre bundlu pomocí obecnějšího objektu *konexe*. Konexe je alternativní lokální popis paralelního přenosu vhodný pro obecné (ne nutně lineární) bundly. V případu lineárního bundlu je pak konexe ekvivalentní kovariantní derivaci.

Pro parametrizovanou křivku můžeme definovat kovariantní derivování tenzorových polí podle parametru křivky.

Definice D7.5 (Kovariantní derivování podél křivky)

Nechť $z : I \to M$ je parametrizovaná křivka a $\boldsymbol{A}$ tenzorové pole definované podél této křivky. *Kovariantní derivací pole $\boldsymbol{A}$ podle parametru křivky* τ nazýváme derivaci pole $\boldsymbol{A}$ ve směru tečného vektoru

$\boldsymbol{D}z/d\tau$,

$$\frac{\boldsymbol{\nabla}}{d\tau}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}_{\frac{\boldsymbol{D}z}{d\tau}}\boldsymbol{A}\ .$$ ◦

Kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}$ závisí na směru $\boldsymbol{a}$ ultralokálně – závisí pouze na vektoru $\boldsymbol{a}$ v bodě x a nevyžaduje znalost směru derivování v okolí bodu x (jak tomu naopak bylo u Lieovy derivace). Závislost na směru derivování je navíc lineární. To nám umožňuje reprezentovat tuto závislost tenzorově – jako kontrakci směru a tenzoru nazývaného kovariantní diferenciál. Kovariantní diferenciál je tak zobecněním operace gradientu funkce pro obecná tenzorová pole. V analogii k zavedení gradientu pomocí derivace ve směru (2.1) definujeme

Definice D7.6 (Kovariantní diferenciál)

Kovariantní diferenciál $\boldsymbol{\nabla A}$ tenzorového pole $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{T}^k_l M$ v bodě x je tenzor z $\boldsymbol{T}_x{}^k_{l+1} M$ splňující

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{m}\dots}_{\boldsymbol{n}\dots} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{c}}\, \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}}\, \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{m}\dots}_{\boldsymbol{n}\dots}\ .$$

Kovariantní diferenciál spočtený v každém bodě variety tak převádí tenzorové pole na tenzorové pole s jedním kovariantním indexem navíc. Tento index budeme umisťovat přímo u symbolu $\boldsymbol{\nabla}$ – viz index $\boldsymbol{c}$.

Kovariantní derivaci $\boldsymbol{\nabla}$ a příslušný kovariantní diferenciál nazýváme *hladké*, pokud pole $\boldsymbol{\nabla A}$ je hladké pro libovolné hladké pole $\boldsymbol{A}$. ◦

Poznámka

Zdůrazněme rozdíl mezi kovariantní derivací $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}$ ve směru vektoru $\boldsymbol{a}$ a kovariantním diferenciálem $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}}$ s abstrakním indexem $\boldsymbol{c}$. V prvním případě je vektor vysázen písmem běžné velikosti, v druhém případě je pro index použito písmo menší. V následujícím textu se většinou bude používat kovariantní diferenciál, derivace ve směru se objeví spíše výjimečně.

Z vlastností kovariantní derivace D7.4 přímočaře plyne

Věta V7.1 (Vlastnosti kovariantního diferenciálu)

Kovarinatní diferenciál splňuje následující vlastnosti

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nabla}\ :\ \mathfrak{T}^k_l M \rightarrow \mathfrak{T}^k_{l+1} M\ ,\\
&\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}}\big(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}\dots}_{\boldsymbol{m}\dots} + r\,\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{l}\dots}_{\boldsymbol{n}\dots}\big) = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}\dots}_{\boldsymbol{m}\dots} + r\,\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{l}\dots}_{\boldsymbol{n}\dots}\ ,\\
&\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}}\big(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}\dots}_{\boldsymbol{m}\dots}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{l}\dots}_{\boldsymbol{n}\dots}\big) = \big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}\dots}_{\boldsymbol{m}\dots}\big)\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{l}\dots}_{\boldsymbol{n}\dots} + \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}\dots}_{\boldsymbol{m}\dots}\big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{l}\dots}_{\boldsymbol{n}\dots}\big)\ ,\\
&\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{A}^{\dots\boldsymbol{n}\dots}_{\dots\boldsymbol{n}\dots} = \boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{l}}_{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{A}^{\dots\boldsymbol{k}\dots}_{\dots\boldsymbol{l}\dots}\ ,\\
&\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}} f = \mathbf{d}_{\boldsymbol{c}} f\ ,
\end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou tenzorová pole, f funkce a $r \in \mathbb{R}$. □

Definice D7.7 (Složky kovariantního diferenciálu)

Složky kovariantního diferenciálu $\boldsymbol{\nabla A}$ tenzorového pole $\boldsymbol{A}$ vzhledem ke zvolenému souřadnicovému systému x^j označujeme $A^{k\dots}_{l\dots;n}$:

$$\boldsymbol{\nabla A} = A^{k\dots}_{l\dots;n}\ \mathbf{d}x^n\,\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^k}\cdots\ \mathbf{d}x^l\cdots\ .$$ ◦

Poznámka

Výjimečně budeme používat pro složky $A^{k\dots}_{l\dots;n}$ kovariantního diferenciálu $\boldsymbol{\nabla A}$ též označení $\nabla_n A^{k\dots}_{l\dots}$. U tohoto označení je nutno mít na paměti, že se nejedná o derivaci skalárů $A^{k\dots}_{l\dots}$, tj. o složky gradientu $\boldsymbol{\nabla}\big(A^{k\dots}_{l\dots}\big)$, nýbrž o složky kovariantní derivace tenzoru $\boldsymbol{A}$. Pokud budeme někdy chtít napsat explicitně složky gradientu komponent $A^{k\dots}_{l\dots}$, použijeme přímo parciálních derivací $A^{k\dots}_{l\dots,n}$. Připomeňme, že zápis $\mathrm{d}_n\omega_{l\dots}$ by mohl mít jiný význam – pro antisymetrické formy $\boldsymbol{\omega}$ označuje složky vnější derivace $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}$ (viz definici D4.3).

PŘÍKLAD P7.1

Derivováním vztahu $\boldsymbol{a}^n = \boldsymbol{\delta}^n_m \boldsymbol{a}^m$ platném pro libovolné vektorové pole $\boldsymbol{a}$ obdržíme, že pro libovolnou kovariantní derivaci platí

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\delta} = 0 \;.$$

Kovariantní derivace anihiluje i libovolný tenzor vytvořený z jednotkového tenzoru tenzorovým násobením a permutací indexů. Např. anihiluje projektory na symetrické a antisymetrické tenzory (definice D1.8 a D1.3)

$$\boldsymbol{\nabla}\,^{(p)}\boldsymbol{\delta} = 0 \;, \quad \boldsymbol{\nabla}\,^{[p]}\boldsymbol{\delta} = 0 \;.$$

V definici D7.4 jsme zavedli kovariantní derivaci jako primární objekt, nezávislý na paralelním přenosu diskutovaném na začátku kapitoly. Kovariantní derivace naopak umožňuje definovat pojem paralelního přenosu – tenzor je paralelně přenášen podél křivky, pokud se podél křivky 'nemění', tj. pokud jeho kovariantní derivace ve směru křivky je nulová. Můžeme tedy zformulovat definici komplementární k definici D7.3:

Definice D7.8 (Paralelní přenos pomocí kovariantní derivace)

Mějme kovariantní derivaci $\boldsymbol{\nabla}$ a křivku γ vedoucí z bodu x_{z} do bodu x_{k}.

O tenzorovém poli $\boldsymbol{A}$ definovaném podél křivky γ řekneme, že je *konstantní ve smyslu derivace* $\boldsymbol{\nabla}$, pokud v každém bodě křivky platí

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{A} = 0 \;,$$

kde $\boldsymbol{a}$ je vektor tečný ke křivce.

Tenzor $\boldsymbol{A}_{\mathrm{k}} \in \boldsymbol{T}_{x_{\mathrm{k}}}{}^k_l M$ je *paralelní přenos tenzoru* $\boldsymbol{A}_{\mathrm{z}} \in \boldsymbol{T}_{x_{\mathrm{z}}}{}^k_l M$ *podél křivky* γ *ve smyslu derivace* $\boldsymbol{\nabla}$,

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{k}} = \mathrm{par}[\gamma]\,\boldsymbol{A}_{\mathrm{z}} \;,$$

pokud existuje konstantní pole $\boldsymbol{A}$ definované podél γ takové, že $\boldsymbol{A}_{\mathrm{z}} = \boldsymbol{A}|_{x_{\mathrm{z}}}$ a $\boldsymbol{A}_{\mathrm{k}} = \boldsymbol{A}|_{x_{\mathrm{k}}}$. ∘

Takto definovaný paralelní přenos splňuje podmínky z definice D7.1.

Pro křivku γ reprezentovanou parametrizací $z : I \to M$ jsme v definici D7.2 zavedli přenos $\mathrm{par}_\tau[\gamma]$ z bodu $z(0)$ do bodu $z(\tau)$. Tento přenos zřejmě generuje konstantní pole podél křivky γ:

$$\frac{\boldsymbol{\nabla}}{d\tau}\boldsymbol{A}_\tau = 0 \;, \quad \text{kde} \quad \boldsymbol{A}_\tau = \mathrm{par}_\tau[\gamma]\,\boldsymbol{A}_0 \in \boldsymbol{T}_{z(\tau)}{}^k_l M \;. \tag{7.2}$$

Kovariantní derivace není vlastnostmi v definici D7.4 určena jednoznačně. Před tím, než charakterizujeme prostor všech kovariantních derivací, zavedeme v následujícím oddíle důležité příklady kovariantních derivací – tzv. *souřadnicové kovariantní derivace*.

7.3 Souřadnicová kovariantní derivace

V kapitole 2 jsme si v případě kdy máme na okolí $U \subset M$ definované souřadnice x^j zavedli parciální derivace $f_{,j}$ funkce f definované na U. Též jsme viděli, že při změně souřadnic se parciální derivace funkce transformují jako složky složky 1-formy – konkrétně jako složky gradientu $\mathbf{d}f$. Obecně se však parciální derivace komponent tenzorových polí netransformují jako složky tenzoru. Přesto však můžeme z parciálních derivací složek tenzorového pole vytvořit tenzorový objekt.

M7.2 Transformace parciálních derivací
To že se parciální derivace složek tenzoru netransformují při změně souřadného systému jako složky tenzoru lehce nahlédneme na příkladu vektorového pole. Mějme dva souřadné systémy x^j a $x'^{j'}$ definované na stejné oblasti. Parciální derivace složek vektorového pole $\boldsymbol{a}$ se transformují následovně (viz kapitolu 2 ohledně značení):

$$a'^{j'}{}_{,k'} = a^m{}_{,n}\, x'^{j'}{}_{,m}\, x^n{}_{,k'} + a^m\, x'^{j'}{}_{,mn}\, x^n{}_{,k'} \;.$$

(Dokažte!)

Definice D7.9 (Souřadnicová kovariantní derivace)
Mějme souřadnice x^j na oblasti $U \subset M$. S tímto souřadnicovým systémem asociujeme *souřadnicovou kovariantní derivaci* $\boldsymbol{\partial}$ jednoznačně určenou podmínkami

$$\boldsymbol{\partial}\,\mathbf{d}x^j = 0 \quad \text{nebo} \qquad \boldsymbol{\partial}\tfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^j} = 0\ .$$

Obě podmínky jsou díky dualitě bází $\mathbf{d}x^j$ a $\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^j}$ ekvivalentní. ∘

Takto definovaná derivace tenzorového pole má jasnou reprezentaci pokud vyjádříme pole v souřadnicovém systému x^m. Zřejmě platí

Lemma V7.2

$$\boldsymbol{\partial_k A^{m\ldots}_{n\ldots}} = A^{p\ldots}_{q\ldots,r}\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{k}}x^r\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}}x^q\cdots\frac{\boldsymbol{\partial^m}}{\boldsymbol{\partial}x^p}\cdots\ .$$ □

Důkaz:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\partial_k A^{m\ldots}_{n\ldots}} &= \boldsymbol{\partial_k}\Big(A^{p\ldots}_{q\ldots}\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}}x^q\cdots\frac{\boldsymbol{\partial^m}}{\boldsymbol{\partial}x^p}\cdots\Big)\\ &= \big(\boldsymbol{\partial_k}A^{p\ldots}_{q\ldots}\cdots\big)\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}}x^q\cdots\frac{\boldsymbol{\partial^m}}{\boldsymbol{\partial}x^p}\cdots\\ &= A^{p\ldots}_{q\ldots,r}\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{k}}x^r\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}}x^q\cdots\frac{\boldsymbol{\partial^m}}{\boldsymbol{\partial}x^p}\cdots\ .\end{aligned}$$

■

Komponenty souřadnicové kovariantní derivace pole jsou tedy parciální derivace komponent pole. Přesněji, vezmeme-li souřadnicovou kovariantní derivaci asociovanou se souřadnicemi $\{x^j\}$ a provedeme-li pomocí ní derivaci tenzorového pole, pak její komponenty vzhledem k $\{x^j\}$ jsou parciální derivace komponent pole vzhledem k $\{x^j\}$. Vyjádříme-li však souřadnicovou kovarinatní derivaci pole v jiném souřadnicovém systému, než se kterým je tato derivace asociována, výsledný vztah bude složitější.

Lehce nahlédneme, že každá souřadnicová kovariantní derivace splňuje

Lemma V7.3
Nechť f je hladká funkce, $\boldsymbol{A}$ hladké tenzorové pole a $\boldsymbol{\partial}$ souřadnicová kovariantní derivace. Pak

$$\boldsymbol{\partial_a\partial_b}f = \boldsymbol{\partial_b\partial_a}f\ , \qquad \text{(torze)}$$

$$\boldsymbol{\partial_a\partial_b A} = \boldsymbol{\partial_b\partial_a A}\ . \qquad \text{(křivost)}$$

□

Důkaz:
V souřadnicích x^j, se kterým je derivace $\boldsymbol{\partial}$ asociována, platí

$$\boldsymbol{\partial_a\partial_b}f = f_{,lk}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}}x^k\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{b}}x^l\ .$$

Druhé parciální derivace funkce f jsou však symetrické. Důkaz pro derivace $\boldsymbol{A}$ je obdobný. ■

Souřadnicové kovariantní derivace asociované s různými souřadnicovými systémy jsou samozřejmě obecně různé. Souřadnicové kovariantní derivace však nevyčerpávají všechny kovariantní derivace. Dalšími speciálními představitely kovariantních derivací jsou derivace asociované s obecnou bází $\{\boldsymbol{e}_j\}$ v tečném prostoru.

Definice D7.10 (n-ádová kovariantní derivace)

Mějme systém hladkých vektorových polí $\boldsymbol{e}_j$, $j = 1, \dots, n$ tvořící v každém bodě bázi (tj., mějme zadán systém tzv. n-ád). S tímto systémem asociujeme *n-ádovou kovariantní derivaci* $\eth$ jednoznačně určenou podmínkou

$$\eth \boldsymbol{e}_j = 0 \,.$$

Ekvivalentně bychom zde mohli použít duální bázi 1-forem $\boldsymbol{e}^j$. ◦

Poznámka

Opět, pro různé systémy n-ád dostáváme různé kovariantní derivace. Derivace tohoto typu hrají roli zejména při zkoumání metrických variet, kdy typicky pracujeme s ortornormálními tetrádami.

Poznámka

“n-ádová kovariantní derivace” není zrovna ‘nejšťastnější’ název – ze stejných důvodů jako samotný pojem n-áda. Podivné slovo n-áda se v češtině neohýbá zrovna nejlépe a navíc dimenze variety nemusí být zrovna n. Jenže zkuste vyslovit “d-ádová derivace”. Nabízely by se názvy “reperová” či “frejmová” nebo dlouhé “neholonomní souřadnicová kovariantní derivace.” Raději však zůstaneme u n-ádové derivace, ať už je dimenze označená jakkoli, a v konkrétních případech utečeme k běžnému “tetrádová,” popřípadě “triádová” a “diádová” kovariantní derivace pro $d = 4$, 3 a 2.

Pro kovariantní derivaci asociovanou se systémem n-ád neplatí obecně obdoba lemmatu V7.3. To ukazuje, že tyto derivace jsou obecně odlišné od souřadnicových kovariantních derivací. Ani n-ádové derivace však nevyčerpávají všechny kovariantní derivace.

Příklad P7.2 (Derivace asociované s polárními souřadnicemi)

Mějme v euklidovské rovině zadané pravoúhlé souřadnice $\{x, y\}$ a polární souřadnice $\{\rho, \varphi\}$ svázané vztahy $x = \rho \cos\varphi$ a $y = \rho \sin\varphi$. Jednotkové vektory tečné k souřadnicovým čarám polárních souřadnic jsou $\boldsymbol{e}_\rho = \boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial}\rho$ a $\boldsymbol{e}_\varphi = \rho^{-1}\, \boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial}\varphi$, jednotkové 1-formy mají tvar $\boldsymbol{e}^\rho = \mathbf{d}\rho$ a $\boldsymbol{e}^\varphi = \rho\, \mathbf{d}\varphi$.

Souřadnicovou kovariantní derivaci $\boldsymbol{\partial}$ asociovanou s polárními souřadnicemi definujeme vztahy

$$\boldsymbol{\partial} \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\rho} = 0 \,, \quad \boldsymbol{\partial} \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\varphi} = 0 \,, \quad \text{případně} \quad \boldsymbol{\partial}\, \mathbf{d}\rho = 0 \,, \quad \boldsymbol{\partial}\, \mathbf{d}\varphi = 0 \,.$$

Pro derivaci např. vektoru $\boldsymbol{e}_\varphi$ pak dostáváme

$$\boldsymbol{\partial} \boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{\partial}\Big(\frac{1}{\rho} \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\varphi}\Big) = -\frac{1}{\rho^2}\, \mathbf{d}\rho \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\varphi} = -\frac{1}{\rho}\, \boldsymbol{e}^\rho \boldsymbol{e}_\varphi \,.$$

Obdobně, diádová kovariantní derivace $\eth$ je dána podmínkami

$$\eth \boldsymbol{e}_\rho = 0 \,, \quad \eth \boldsymbol{e}_\varphi = 0 \,, \quad \text{případně} \quad \eth \boldsymbol{e}^\rho = 0 \,, \quad \eth \boldsymbol{e}^\varphi = 0 \,.$$

Druhá diádová derivace funkce f je

$$\begin{aligned} \eth\eth f &= \eth\, \mathbf{d} f = \eth\big(f_{,\rho}\, \mathbf{d}\rho + f_{,\varphi}\, \mathbf{d}\varphi\big) = \eth\big(f_{,\rho} \boldsymbol{e}^\rho + \rho^{-1} f_{,\varphi} \boldsymbol{e}^\varphi\big) \\ &= \big(\mathbf{d} f_{,\rho}\big)\, \boldsymbol{e}^\rho + \rho^{-1}\big(\mathbf{d} f_{,\varphi}\big)\, \boldsymbol{e}^\varphi + f_{,\varphi}\big(\mathbf{d}\rho^{-1}\big)\, \boldsymbol{e}^\varphi \\ &= f_{,\rho\rho} \boldsymbol{e}^\rho \boldsymbol{e}^\rho + \rho^{-2} f_{,\varphi\varphi} \boldsymbol{e}^\varphi \boldsymbol{e}^\varphi + \rho^{-1} f_{,\rho\varphi}\big(\boldsymbol{e}^\rho \boldsymbol{e}^\varphi + \boldsymbol{e}^\varphi \boldsymbol{e}^\rho\big) \\ &\qquad - \rho^{-2} f_{,\varphi} \boldsymbol{e}^\rho \boldsymbol{e}^\varphi \,. \end{aligned}$$

Vidíme, že antisymetrická část je nenulová

$$\eth_{\boldsymbol{a}} \eth_{\boldsymbol{b}} f - \eth_{\boldsymbol{b}} \eth_{\boldsymbol{a}} f = -\rho^{-2} f_{,\varphi}\, \boldsymbol{e}^\rho_{\boldsymbol{a}} \wedge \boldsymbol{e}^\varphi_{\boldsymbol{b}} \,.$$

Pro kovariantní derivaci asociovanou s diádou $\boldsymbol{e}_\rho$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ vskutku neplatí analogie prvního vztahu lemmatu V7.3.

M7.3 Globální rovnoběžnost derivace $\eth$

n-ádové kovariantní derivace jsou specifické tím, že definují globální rovnoběžnost.

Je-li $\eth$ asociovaná s n-ádou $\{\boldsymbol{e}_j\}$, derivace vektorového pole $\boldsymbol{a}$ lze jednoduše vyjádřit v souřadnicích vzhledem k této tetrádě

$$\eth \boldsymbol{a} = \eth(a^n \boldsymbol{e}_n) = (\,\mathbf{d} a^n) \boldsymbol{e}_n = (\boldsymbol{e}_j[a^n])\, \boldsymbol{e}^j \boldsymbol{e}_n \,.$$

Souřadnice derivace $\eth \boldsymbol{a}$ jsou tedy derivace $\boldsymbol{e}_j[a^n]$ souřadnic a^n ve směrech $\boldsymbol{e}_j$.

Globálně rovnoběžné vektorové pole je pole splňující $\eth \boldsymbol{a} = 0$. Tuto rovnici zřejmě splňují všechny pole s konstními souřadnicemi a^j vzhledem k bázi $\{\boldsymbol{e}_j\}$. Libovolný vektor v jednom bodě můžeme tedy jednoduše roznést po varietě užitím stejných komponent a^j vzhledem k $\{\boldsymbol{e}_j\}$.

To však v obecnosti neznamená, že by derivace $\eth$ definovala triviální plochou strukturu. V oddíle 7.5 o torzi níže se vrátíme k otázce, čím se globální rovnoběžnost definovaná pomocí $\eth$ liší od ‘triviální’ rovnoběžnosti afinního prostoru.

7.4 Složky kovariantní derivace

V předchozích odstavcích jsme se seznámili s příklady kovariantních derivací. Nyní se zaměříme na to, jak popsat obecnou kovariantní derivaci.

Nejdříve zformulujeme lemma osvětlující vztah dvou různých kovariantních derivací:

Lemma V7.4

Rozdíl dvou kovariantních derivací $\boldsymbol{\nabla}$ a $\tilde{\boldsymbol{\nabla}}$

$$\boldsymbol{\mathsf{\Gamma}} = \tilde{\boldsymbol{\nabla}} - \boldsymbol{\nabla}$$

je pseudoderivace typu $(0,1)$ ve smyslu definice D2.4. □

DŮKAZ:

Linearita $\boldsymbol{\mathsf{\Gamma}}$, platnost pravidla pro derivování součinu a komutativita s kontrakcí jsou důsledkem jejich platnosti pro obě kovariantní derivace. Akce na funkce plyne z faktu, že obě kovariantní derivace působí na funkce jako obyčejný gradient. ■

POZNÁMKA

Pokud budeme chtít explicitně naznačit, že rozdíl $\boldsymbol{\mathsf{\Gamma}}$ přidává jeden kovariantní index (jedná se o pseudoderivaci typu $(0,1)$), budeme psát $\boldsymbol{\mathsf{\Gamma}}_{\boldsymbol{a}} = \tilde{\boldsymbol{\nabla}}_{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}$.

Nyní můžeme použít naše znalosti o pseudoderivaci z věty V2.4: (i) jedná se o operaci reprezentovatelnou tenzorem a (ii) její akce na obecných tenzorech je dána jednoznačně akcí na vektorech.

Věta V7.5 (Rozdíl kovariantních derivací)

Mějme dvě kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$ a $\tilde{\boldsymbol{\nabla}}$. Jejich rozdíl $\boldsymbol{\mathsf{\Gamma}}$ je jednoznačně určen svojí akcí na vektorových polích, kde lze reprezentovat pomocí tenzoru $\boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{bc}}$ typu $(1,2)$:

$$\boldsymbol{\mathsf{\Gamma}}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{b}} = \tilde{\boldsymbol{\nabla}}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{\Gamma}^{\;\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{an}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}\ .$$

Akce rozdílu $\boldsymbol{\mathsf{\Gamma}} = \mathbf{tens}[\boldsymbol{\Gamma}]$ na obecné tenzorové pole $\boldsymbol{A}$ pak explicitně je

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathsf{\Gamma}}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\dots}_{\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2\dots} = \boldsymbol{\Gamma}^{\;\boldsymbol{b}_1}_{\boldsymbol{an}} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}\boldsymbol{b}_2\dots}_{\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2\dots} + \boldsymbol{\Gamma}^{\;\boldsymbol{b}_2}_{\boldsymbol{an}} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{n}\dots}_{\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2\dots} + \cdots \\ - \boldsymbol{\Gamma}^{\;\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{ac}_1} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\dots}_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{c}_2\dots} - \boldsymbol{\Gamma}^{\;\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{ac}_2} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\dots}_{\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{n}\dots} - \cdots\ .\end{aligned}$$
□

Definice D7.11 (Rozdílový tenzor)

Tenzor $\boldsymbol{\Gamma}$ z předchozí věty budeme nazývat *rozdílový tenzor* mezi dvěmi kovariantními derivacemi. ◦

Touto větou jsme získali nástroj k zadávání obecné kovariantní derivace. Vidíme totiž, že každá kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$ se liší od zvolené *souřadnicové derivace* $\boldsymbol{\partial}$ lineární (ultralokální) operací danou tenzorem $\boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{bc}}$. Tento tenzor (případně jeho složky) můžeme chápat jako 'souřadnice' $\boldsymbol{\nabla}$ vzhledem $\boldsymbol{\partial}$. Věta V7.5 pak určuje, jak $\boldsymbol{\nabla}$ působí na obecné tenzorové pole.

Definice D7.12 (Složky kovariantní derivace [konexe])

Složky kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$ (též *koeficienty konexe* či *Christoffelovy symboly*) vzhledem k souřadnicím $\{x^j\}$ nazýváme souřadnice $\Gamma^{\;j}_{kl}$ rozdílového tenzoru $\boldsymbol{\Gamma}$ mezi $\boldsymbol{\nabla}$ a souřadnicovou kovariantní derivací $\boldsymbol{\partial}$ asociovanou se systémem $\{x^j\}$. Platí tedy

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\partial} + \boldsymbol{\mathsf{\Gamma}}\ , \quad \text{kde} \quad \boldsymbol{\mathsf{\Gamma}} = \mathbf{tens}\big[\boldsymbol{\Gamma}\big]\ , \quad \boldsymbol{\Gamma} = \Gamma^{\;j}_{kl}\, \mathbf{d}x^k\, \mathbf{d}x^l\, \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^l}\ .$$
◦

M7.4 Transformace složek konexe

Poznamenejme, že souřadnicový systém $\{x^j\}$ vstupuje do definice složek kovariantní derivace dvěma způsoby. Za prvé, $\Gamma^{\;j}_{kl}$ jsou složky tenzoru $\boldsymbol{\Gamma}$ vzhledem ke zvolenému systému. Za druhé, $\boldsymbol{\Gamma}$ udává rozdíl mezi $\boldsymbol{\nabla}$ a souřadnicovou derivací $\boldsymbol{\partial}$ spojenou se systémem $\{x^j\}$. Komponenty $\Gamma^{\;j}_{kl}$ jsou sice složky tenzoru $\boldsymbol{\Gamma}$ a jako takové se transformují při změně souřadnic od $\{x^j\}$ k $\{x'^{j'}\}$:

$$\Gamma^{\;a'}_{b'c'} = \Gamma^{\;j}_{kl}\, x'^{a'}_{\;,j}\, x^k_{\;,b'}\, x^l_{\;c'}\ . \qquad (*)$$

Při transformaci komponent kovariantní derivace však musíme navíc změnit 'počátek', vůči kterému kovariantní derivaci odečítáme, tj. musíme místo souřadnicové derivace $\boldsymbol{\partial}$ asociované s $\{x^j\}$ použít souřadnicovou derivaci $\boldsymbol{\partial}'$ asociovanou s $\{x'^{j'}\}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} &= \boldsymbol{\partial} + \boldsymbol{\mathsf{\Gamma}} = \boldsymbol{\partial}' + \boldsymbol{\mathsf{\Gamma}}'\ ,\\ \boldsymbol{\mathsf{\Gamma}}' &= \mathbf{tens}\Big[\Gamma'^{\;j'}_{k'l'}\, \mathbf{d}x'^{k'}\, \mathbf{d}x'^{l'}\, \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x'^{l'}}\Big]\ .\end{aligned}$$

Pseudoderivace $\boldsymbol{\mathsf{\Gamma}}$ a $\boldsymbol{\mathsf{\Gamma}}'$ se od sebe liší rozdílem $\mathbf{tens}[\gamma] = \boldsymbol{\partial}' - \boldsymbol{\partial}$, pro tenzory generující tyto pseudoderivace tedy dostáváme $\boldsymbol{\Gamma}' = \boldsymbol{\Gamma} - \boldsymbol{\gamma}$. Vyjdříme-li tento vztah v souřadnicích, dostaneme s užitím lemmatu V7.6 transformační vztah pro složky kovariantní derivace

$$\begin{aligned}\Gamma'^{\;j'}_{k'l'} &= \Gamma^{\;n}_{mn}\, x'^{j'}_{\;,n}\, x^m_{\;,k'}\, x^n_{\;,l'} - x'^{j'}_{\;,mn}\, x^m_{\;,k'}\, x^n_{\;,l'}\\ &= \Gamma^{\;n}_{mn}\, x'^{j'}_{\;,n}\, x^m_{\;,k'}\, x^n_{\;,l'} + x'^{j'}_{\;,n}\, x^n_{\;,k'l'}\ .\end{aligned}$$

Složky $\Gamma^{\;a'}_{b'c'}$ v (*) tedy značí čárkované souřadnice nečárkovaného rozdílového tenzoru $\boldsymbol{\Gamma}$, $\Gamma'^{\;j'}_{k'l'}$ v předchozí rovnici značí čárkované souřadnice čárkovaného rozdílového tenzoru $\boldsymbol{\Gamma}'$.

Nejprve nalezneme složky souřadnicové kovariantní derivace.

Lemma V7.6

Mějme dva systémy souřadnic $\{x^j\}$, $\{x'^{j'}\}$ a s nimi asociované derivace $\boldsymbol{\partial}$ a $\boldsymbol{\partial}'$. Označme γ^j_{kl} složky kovariantní derivace $\boldsymbol{\partial}'$ vzhledem k $\{x^j\}$ a $\gamma'^{j'}_{k'l'}$ složky $\boldsymbol{\partial}$ vzhledem k $\{x'^{j'}\}$. Tyto složky lze vyjádřit pomocí derivací transformačních vztahů mezi oběma systémy souřadnic

$$\gamma^j_{kl} = x'^{i'}_{,kl}\, x^j_{,i'} = -x^j_{,m'n'}\, x'^{m'}_{,k}\, x'^{n'}_{,l}\ ,$$
$$\gamma'^{j'}_{k'l'} = x^i_{,k'l'}\, x'^{j'}_{,i} = -x'^{j'}_{,mn}\, x^m_{,k'}\, x^n_{,l'}\ .$$

Pro tenzory $\boldsymbol{\gamma}$ a $\boldsymbol{\gamma}'$ vytvořené z těchto komponent platí

$$\boldsymbol{\gamma} = -\boldsymbol{\gamma}'\ . \qquad \square$$

DŮKAZ:
Derivováním vztahu $\mathbf{d}x'^{j'} = x'^{j'}_{,i}\,\mathbf{d}x^i$, využitím definice D7.9 a vztahu $\boldsymbol{\partial}' = \boldsymbol{\partial} + \mathbf{tens}[\boldsymbol{\gamma}]$ dostaneme

$$0 = \boldsymbol{\partial}'_{\boldsymbol{a}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{b}} x'^{j'} = \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{a}}\big(x'^{j'}_{,l}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{b}} x^l\big) - x'^{j'}_{,i}\,\boldsymbol{\gamma}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{ab}}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} x^i$$
$$= \Big(x'^{j'}_{,kl} - x'^{j'}_{,i}\,\gamma^i_{kl}\Big)\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} x^k\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{b}} x^l\ ,$$

což dokazuje první rovnost pro γ^j_{kl}. Druhou rovnost dostaneme obdobně derivováním vztahu $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial} x'^{j'} = x^i_{,j'}\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial} x^i$. Výrazy pro $\gamma'^{j'}_{k'l'}$ jsou analogické. Poslední vztah plyne přímočaře z

$$\mathbf{tens}[\gamma] = \boldsymbol{\partial}' - \boldsymbol{\partial}\ ,\quad \mathbf{tens}[\gamma'] = \boldsymbol{\partial} - \boldsymbol{\partial}'\ . \qquad \blacksquare$$

Složky kovariantní derivace mají jasný geometrický význam – udávají derivace souřadnicových vektorů a 1-forem. Přímou aplikací $\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\partial} + \boldsymbol{\Gamma}$ totiž dostáváme

Věta V7.7 (Kovariantní derivace vektorové a formové báze)

Nechť $\boldsymbol{\nabla}$ je kovariantní derivace určená vzhledem k souřadnicím $\{x^j\}$ složkami Γ^j_{kl}. Pak platí

$$\boldsymbol{\nabla}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^j} = \Gamma^l_{kj}\ \mathbf{d}x^k\,\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^l}\ ,$$
$$\boldsymbol{\nabla}\,\mathbf{d}x^j = -\Gamma^j_{kl}\ \mathbf{d}x^k\,\mathbf{d}x^l\ . \qquad \square$$

Pomocí složek kovariantní derivace také můžeme vyjádřit explicitně souřadnice derivace obecného tenzorového pole. Přímá aplikace věty V7.5 na případ derivace $\boldsymbol{\nabla}$ a souřadnicové derivace $\boldsymbol{\partial}$ spolu s užitím definice D7.12 vede k tomu, že souřadnice kovariantního diferenciálu $\boldsymbol{\nabla A}$ tenzorového pole $\boldsymbol{A}$ jsou

$$A^{k\dots}_{l\dots;a} = A^{k\dots}_{l\dots,a} + \Gamma^k_{an}A^{a\dots}_{k\dots} + \dots - \Gamma^n_{al}A^{k\dots}_{n\dots} - \dots\ . \tag{7.3}$$

7.5 Torze

Na příkladu n-ádové kovarianí derivace jsme viděli, že antisymetrická část druhé kovariantní derivace funkce nemusí být obecně nulová. Ukazuje se však, že nemůže být zcela libovolná – musí být proporcionální gradientu funkce. Než nalezneme tuto závislost explicitně, dokažme nejdříve následující lemma:

M7.5 Složky n-ádové kovariantní derivace
n-ádová derivace hraje důležitou roli hlavně v kontextu ortonormálních bází na metrické varietě (viz kapitoly 6 a 9). V typické situaci se používá n-áda asociovaná s nějakým systémem souřadnic $\{x^j\}$, jejíž vektory $\boldsymbol{e}_j$ se od souřadnicových vektorů $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial} x^j$ liší pouze škálováním

$$\boldsymbol{e}_j = \frac{1}{h_{(j)}}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^j}\ ,\quad \boldsymbol{e}^j = h_{(j)}\,\mathbf{d}x^j \qquad (*)$$
(přes j se nesčítá) .

(V tomto kontextu se vyskytují výrazy, ve kterých se nesčítá přes opakující se index. Zejména index u koeficientu $h_{(j)}$ se nechová jako souřadnicový a nebude se přes něj sčítat. Na zbývající situace, kdy nebude použita sčítací konvence, budeme vždy upozorňovat.)
Spočtěme nyní složky γ^j_{kl} n-ádové kovariantní derivace $\boldsymbol{\eth}$ asociované s takto definovanou n-ádou. Derivováním vztahu (*), využitím D7.10 a vztahu $\boldsymbol{\eth} = \boldsymbol{\partial} + \mathbf{tens}[\boldsymbol{\gamma}]$ dostaneme

$$0 = \boldsymbol{\eth}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{e}^j_{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{a}}\big(h_{(j)}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{b}}x^j\big) - h_{(j)}\gamma^{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{ab}}\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{c}}x^j$$
$$= h_{(j),n}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}}x^n\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{b}}x^j - h_{(j)}\gamma^j_{kl}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}}x^k\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{b}}x^l$$
(přes j se nesčítá) .

Odtud

$$\gamma^j_{kl} = \begin{cases} \frac{1}{h_{(j)}}h_{(j),k} & \text{pro } j = l\ ,\\ 0 & \text{pro } j \neq l\ .\end{cases}$$

Lemma V7.8

Nechť $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ jsou hladká vektorová pole a $\boldsymbol{\nabla}$ kovariantní derivace. Pak výraz

$$\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{m}} - \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}} - [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]^{\boldsymbol{m}}$$

závisí na $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ lineárně a ultralokálně (lineárně vůči násobení funkcí). □

DŮKAZ:
Linearita vůči sčítání je zřejmá. Zbývá tedy dokázat ultralokalitu, tj. linearitu vůči násobení funkcí f:

$$\begin{aligned}&(f\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}})\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{m}} - \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}(f\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}) - [f\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]^{\boldsymbol{m}}\\ &\quad= f\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{m}} - f\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}} - (\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}}f)\,\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}} - f[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]^{\boldsymbol{m}} + \boldsymbol{b}[f]\,\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}\\ &\quad= f\,\big(\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{m}} - \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}} - [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]^{\boldsymbol{m}}\big)\end{aligned}$$ ■

Z věty V2.3 vyplývá, že výraz z lemmatu V7.8 lze reprezentovat pomocí tenzoru. Tento tenzor se nazývá torzí:

Definice D7.13 (Torze)

Ke kovariantní derivaci $\boldsymbol{\nabla}$ můžeme přiřadit tenzorové pole $\boldsymbol{T}$ typu $(1,2)$ vztahem

$$\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{mn}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{c}} - [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]^{\boldsymbol{c}}$$

platným pro libovolná hladká vektorová pole $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. Tento tenzor nazýváme *torzí kovariantní derivace* $\boldsymbol{\nabla}$ a píšeme

$$\boldsymbol{T} = \mathbf{Tor}[\boldsymbol{\nabla}]\ .$$

Zavedeme též bilineární vektor-značné zobrazení na tečných vektorech

$$\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{kl}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{l}}$$ ○

ekvivalentní tenzoru torze.

Nyní se můžeme vrátit ke zkoumání druhé kovariantní derivace funkce.

Věta V7.9 (Komutátor funkce)

Nechť $\boldsymbol{\nabla}$ je kovariantní derivace s torzí $\boldsymbol{T}$. Pak pro libovolnou hladkou funkci f platí

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}f - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}f = -\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{mn}}\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{c}}f\ .$$ □

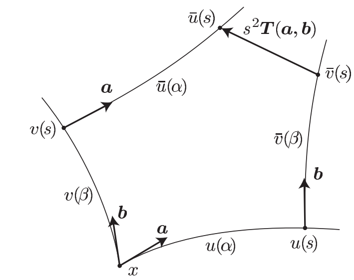
DŮKAZ:
Výrazem z definice torze zapůsobíme na gradient funkce f

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{mn}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{c}}f =\\ &\quad= \big(\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}\big)\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}}f - \big(\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}\big)\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}}f\\ &\qquad - \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{m}}\big(\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}}f\big) + \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{m}}\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{m}}\big(\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}}f\big)\\ &\quad= \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}f - \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}f\ ,\end{aligned}$$

kde jsem užili definice Lieovy závorky D2.3 a faktu, že gradient funkce lze zapsat jako kovariantní derivace. Přejmenováním indexů a zkrácením libovolně zvolených vektorových polí $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ dostaneme tvrzení věty. ■

V lemmatu V7.3 jsme si již ukázali, že souřadnicová derivace má nulovou torzi:

M7.6 Geometrický význam torze



Tenzor torze má názorný geometrický význam – charakterizuje, nakolik se neuzavírá ‘rovnoběžník’ složený z čtyř po dvou stejných ‘úseček’. Konkrétně, mějme v bodě x vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. Ve směru těchto vektorů protáhneme ‘úsečky’ u a v (části geodetik $u(\alpha)$ a $v(\beta)$ s tečnými vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ parametrizované afinním parametrem – viz definici D7.15 níže). ‘Délky’ obou ‘úseček’ zvolíme úměrné ‘velikosti’ vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ s koeficientem s (tj. zvolíme úseky geodetik charakterizované stejným afinním parametrem s). Podél ‘úsečky’ u přeneseme rovnoběžně vektor $\boldsymbol{b}$ z bodu $u(0) = x$ do bodu $u(s)$. Odtud vedeme další přímou linii $\bar{v}$ ve směru přeneseného vektoru $\boldsymbol{b}$, opět o úsek úměrný vektoru $\boldsymbol{b}$ koeficientem s, až do bodu $\bar{v}(s)$ (vedeme další geodetiku $\bar{v}(\beta)$ tečnou k $\boldsymbol{b}$ až do bodu daného afinním parametrem $\beta = s$). Obdobně vedeme úsečku v z x do $v(s)$ a odtud úsečku $\bar{u}$ do $\bar{u}(s)$. Takto zkonstruovaný rovnoběžník se obecně neuzavírá, $\bar{v}(s) \neq \bar{u}(s)$. Rozdíl mezi body $\bar{v}(s)$ a $\bar{u}(s)$, tj. jistá ‘nekomutativita paralelního přenosu’, je dán právě tenzorem torze. Nepořádně zapsáno totiž platí

$$\bar{v}(s) - \bar{u}(s) \approx -s^2\,\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\ .$$

Tento intuitivní vztah lze zpřesnit použitím libovolné skalární funkce f

$$f(\bar{v}(s)) - f(\bar{u}(s)) \approx -s^2\,\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}(a,b)\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}}f(x)\ .$$

Tato geometrická interpretace torze je úzce spojena s podobnou diskusí týkající se Lieových závorek – viz marginálie M3.1. Ukázali jsme, že nekomutativita přenosu podél dvou vektorových polí $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ je dána jejich Lieovou závorkou $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$. Nyní pouze pracujeme se speciálními vektorovými poli, které získáme z vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{T}_x M$ jejich rovnoběžným roznesením podél geodetik $v(\beta)$ a následně $\bar{u}(\alpha)$ (pole $\boldsymbol{a}$), případně podél geodetik $u(\alpha)$ a $\bar{v}(\beta)$ (pole $\boldsymbol{b}$). Pro takto zkonstruovaná pole můžeme definovat jejich Lieovu závorku. Z definičního vztahu pro tenzor torze (definice D7.13) uvážením, že vektorové pole $\boldsymbol{a}$ je paralelně přenášené ve směru $\boldsymbol{b}$ a naopak, $\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{m}} = 0$, dostaneme

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = -\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\ .$$

Nekomutativita přenosu podél geodetik ve směrech $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ je tak dána vektorem $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$. (Poznamenejme ještě, že geodetiky užité výše jsou v následujícím vztahu ke křivkám definovaným v dodatku 3.A: $u(\alpha) = u_0(\alpha)$, $\bar{u}(\alpha) = u_s(\alpha)$, $v(\beta) = v_0(\beta)$, $\bar{v}(\beta) = v_s(\beta)$.)

Lemma V7.10 (Torze souřadnicové kovariantní derivace)
Nechť $\boldsymbol{\partial}$ je souřadnicová kovariantní derivace. Pak

$$\mathbf{Tor}[\boldsymbol{\partial}] = 0\ .$$ □

Pro n-ádovou kovariantní derivaci máme vztah

Lemma V7.11 (Torze n-ádové kovariantní derivace)
Nechť $\boldsymbol{\eth}$ je n-ádová kovariantní derivace asociovaná s n-ádou $\{\boldsymbol{e}_j\}$ a označme $\boldsymbol{t} = \mathbf{Tor}[\boldsymbol{\eth}]$. Pak

$$t^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{mn}}\ e_k^{\boldsymbol{m}} e_l^{\boldsymbol{n}} = -[\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l]^{\boldsymbol{a}}\ , \tag{i}$$

případně, v n-ádových složkách,

$$t^j_{kl} = -\big[\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l\big]^j\ .$$

Dále platí

$$t^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{mn}}\ e^j{}_{\boldsymbol{a}} = \mathbf{d}_{\boldsymbol{m}} e^j{}_{\boldsymbol{n}}\ . \tag{ii}$$

Pole $\{\boldsymbol{e}^j\}$ jsou 1-formy báze duální k vektorové n-ádě $\{\boldsymbol{e}_j\}$. □

Důkaz:
První výraz plyne přímo z definice torze D7.13 dosazením $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_k$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_l$ a využitím $\boldsymbol{\eth}\boldsymbol{e}_j = 0$. Rovnost (ii) plyne z vyjádření vnější derivace pomoci derivace kovariantní (viz rovnici (8.4) níže) a užití $\boldsymbol{\eth}\boldsymbol{e}^j = 0$. ■

n-ádová kovariantní derivace $\boldsymbol{\eth}$ tak sice definuje globální rovnoběžnost způsobem popsaném v marginálii M7.3, nejedná se však o triviální plochou derivaci. Difeomorfismy indukované vektorovými poli $\boldsymbol{e}_j$ spolu obecně nekomutují (pro $[\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l] \neq 0$) a geodetiky ve smyslu $\boldsymbol{\eth}$ se proto neuzavírají do souřadnicových čar. Tato *nekomutativita* je zachycena právě v torzi $\boldsymbol{t}$.

Máme-li dvě kovariantní derivace, rozdíl jejich torzí je dán rozdílovým tenzorem:

Věta V7.12 (Vztah torzí dvou kovariantních derivací)
Mějme dvě kovariantní derivace $\tilde{\boldsymbol{\nabla}}$ a $\boldsymbol{\nabla}$. Rozdíl jejich torzí $\tilde{\boldsymbol{T}}$ a $\boldsymbol{T}$ je dán antisymetrickou částí jejich rozdílového tenzoru $\boldsymbol{\Gamma}$:

$$\tilde{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{ab}} - T^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{ab}} = \Gamma^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{ab}} - \Gamma^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{ba}} = 2\,\Gamma^{\boldsymbol{n}}_{[\boldsymbol{ab}]}\ ,$$

kde $\mathbf{tens}[\boldsymbol{\Gamma}] = \tilde{\boldsymbol{\nabla}} - \boldsymbol{\nabla}$. □

Důkaz:
Aplikujeme vztah $\tilde{\boldsymbol{\nabla}} = \boldsymbol{\nabla} + \mathbf{tens}[\boldsymbol{\Gamma}]$ ve výrazu pro komutátor funkce z věty V7.9:

$$\begin{aligned}\tilde{T}^{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{mn}}\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{c}} f &= -\nabla_{\boldsymbol{m}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} f + \Gamma^{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{mn}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{c}} f + \nabla_{\boldsymbol{n}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{m}} f - \Gamma^{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{nm}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{c}} f\\ &= T^{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{mn}}\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{c}} f + \Big(\Gamma^{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{mn}} - \Gamma^{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{nm}}\Big)\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{c}} f\ .\end{aligned}$$

Jelikož funkce f byla zvolena libovolně, můžeme $\mathbf{d}f$ 'zkrátit' a obdržíme požadovaný vztah. ■

Speciálně dostáváme

Lemma V7.13 (Rozdíl kovariantních derivací bez torze)
Tenzor $\boldsymbol{\Gamma}$ charakterizující rozdíl dvou kovariantních derivací bez torze je symetrický:

$$\mathbf{Tor}[\tilde{\boldsymbol{\nabla}}] = \mathbf{Tor}[\boldsymbol{\nabla}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{bc}} = \Gamma^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{cb}}\ ,$$

kde $\mathbf{tens}[\boldsymbol{\Gamma}] = \tilde{\boldsymbol{\nabla}} - \boldsymbol{\nabla}$. □

Uvážíme-li, že torze souřadnicové derivace $\boldsymbol{\partial}$ je nulová, dostáváme jako přímočarý důsledek věty V7.12 též vyjádření tenzoru torze obecné derivace $\boldsymbol{\nabla}$ pomocí jejích složek vzhledem k souřadnicovému systému $\{x^j\}$.

Lemma V7.14 (Torze pomocí složek kovariantní derivace)

Nechť $\boldsymbol{\nabla}$ je kovariantní derivace určená vzhledem k souřadnicím $\{x^j\}$ složkami Γ^j_{kl}, respective příslušným rozdílovým tenzorem $\boldsymbol{\Gamma}$. Torze $\boldsymbol{T}$ je pak určena antisymetrickou částí rozdílového tenzoru $\boldsymbol{\Gamma}$

$$\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{bc}} = \boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{bc}} - \boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{cb}} = 2\,\boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{a}}_{[\boldsymbol{bc}]}\ . \qquad \square$$

PŘÍKLAD P7.3 (POKRAČOVÁNÍ PŘÍKLADU P7.2 – TORZE)

Nyní můžeme spočíst torzi diádové kovariantní derivace $\boldsymbol{\eth}$ spojené s polárními souřadnicemi definované v příkladu P7.2. Podle lemmatu V7.11, využitím $[\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi] = -\rho^{-1}\boldsymbol{e}_\varphi$, dostáváme

$$\boldsymbol{t} = \frac{1}{\rho}\, \boldsymbol{e}^\rho \wedge \boldsymbol{e}^\varphi\, \boldsymbol{e}_\varphi\ .$$

Neboli, jediné nenulové komponenty tenzoru torze jsou

$$t^{\,\varphi}_{\rho\varphi} = -t^{\,\varphi}_{\varphi\rho} = \frac{1}{\rho}\ .$$

7.6 Prostor kovariantních derivací

Nyní prozkoumáme, jakou strukturu má prostor všech kovariantních derivací.

Definice D7.14 (Prostor kovariantních derivací)

Prostor kovariantních derivací označíme $\mathfrak{G}M$. Prostor kovariantních derivací bez torze označíme $\mathfrak{G}_0 M$. ◦

Z věty V7.5 víme, že rozdíl mezi dvěmi kovariantními derivacemi je charakterizován rozdílovým tenzorem. Všechny možné rozdílové tenzory (tenzory typu $(1,2)$) tvoří vektorový prostor. Prostor všech kovariantních derivací $\mathfrak{G}M$ však vektorový prostor není. Mezi kovariantními derivacemi nelze vydělit nulový prvek – v prostoru kovariantních derivací nelze vybrat jednoznačně počátek.

Jelikož však umíme dvě kovariantní derivace odčítat a rozdíl leží ve vektorovém prostoru, prostor $\mathfrak{G}M$ má strukturu afinního prostoru. Zaměření tohoto afinního prostoru je isomorfní prostoru všech rozdílových tenzorů, tj. prostoru $\mathfrak{T}^1_2 M$.

V prostoru $\mathfrak{G}M$ si můžeme zvolit počátek a ostatní kovariantní derivace popisovat pomocí jejich 'průvodičů' vzhledem k tomuto počátku. Pokud za počátek zvolíme souřadnicovou kovariantní derivaci $\boldsymbol{\partial}$, 'průvodič' obecné kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$ není nic jiného než pseudoderivace $\boldsymbol{\Gamma}$ charakterizovaná složkami Γ^j_{kl}. Určení obecné kovariantní derivace pomocí jejích složek Γ^j_{kl} znamená tak zadání složek jejího 'průvodiče' vzhledem k 'počátku' $\boldsymbol{\partial}$.

Ačkoli nelze v prostoru kovariantních derivací $\mathfrak{G}M$ vybrat kanonicky počátek, existuje v něm význačný podprostor – prostor $\mathfrak{G}_0 M$ kovariantních derivací s nulovou torzí. Tento prostor má opět strukturu afinního prostoru. Podle lemmatu V7.13 je rozdílový tenzor dvou kovariantních derivací bez torze symetrický. Prostor $\mathfrak{T}^1_{(2)} M$ symetrických tenzorů typu $(1,2)$ je opět vektorový prostor a tvoří zaměření afinního prostoru $\mathfrak{G}_0 M$.

Na podprostor $\mathfrak{G}_0 M$ můžeme dokonce definovat projektor. ‘Odchylka’ kovariantní derivace od podprostoru $\mathfrak{G}_0 M$ je právě její torze. Pokud od kovariantní derivace její torzní část odečteme, dostaneme derivaci z podprostoru $\mathfrak{G}_0 M$.

Lemma V7.15 (Beztorzní část kovariantní derivace)
Nechť $\tilde{\boldsymbol{\nabla}}$ je kovariantní derivace s torzí $\tilde{\boldsymbol{T}}$. Kovariantní derivace

$$\boldsymbol{\nabla} = \tilde{\boldsymbol{\nabla}} - \mathbf{tens}\big[\tfrac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{T}}\big]$$

má nulovou torzi a nazveme ji *beztorzní část* derivace $\tilde{\boldsymbol{\nabla}}$.
Mají-li dvě kovariantní derivace stejnou beztorzní část, jejich rozdílový tenzor je antisymetrický. □

Obecnou kovariantní derivaci můžeme tedy kanonicky rozdělit na její beztorzní část (z afinního prostoru $\mathfrak{G}_0 M$) a torzi (z vektorového prostoru $\mathfrak{T}^1_{[2]} M$). Z tohoto hlediska je dostatečné zkoumat vlastnosti kovariantních derivací bez torze. Derivace s torzí se pak dostanou ‘posunem’ určeným obyčejným tenzorovým polem – torzí. Ve fyzikálních aplikacích se skutečně používají hlavně kovariantní derivace bez torze. Nicméně, jak jsme viděli v lemmatu V7.11, kovariantním derivacím s torzí se nevyhneme při užití n-ádových kovariantních derivací.

Podprostor kovariantních derivací se stejnou beztorzní částí lze chrakterizovat i přímo geometricky. Trochu předběhneme a prozradíme, že kovariantní derivace z tohoto prostoru definují stejné geodetiky – viz následující oddíl.

Třída beztorzních derivací je stále velmi široký prostor obsahující jak obecné, tak poměrně ‘triviální’ kovariantní derivace. Příkladem těch ‘triviálních’ jsou souřadnicové kovariantní derivace. Po zavedení pojmu křivosti níže budeme schopni vymezit tuto ‘trivialitu’ přesněji – bude se jednat o tzv. *ploché* kovariantní derivace, derivace, které mají nulový Riemannův tenzor křivosti. V prostoru beztorzních kovariantních derivací $\mathfrak{G}_0 M$ tak můžeme identifikovat podprostor $\mathfrak{G}_{\mathrm{F}} M$ plochých kovariantních derivací. Lokálně lze každá plochá kovariantní derivace identifikovat jako souřadnicová derivace vhodně zvoleného systému souřadnic. Konstrukce takového systému je založena na obecnější konstrukci tzv. *normálních souřadnic*.

7.7 Geodetiky a normální okolí

Kovariantní derivace a s ní spojený paralelní přenos nám umožňuje zobecnit pojem ‘přímky’, ‘přímé čáry’. Křivku nazveme přímou, pokud její tečný vektor bude podél ní paralelní.

Definice D7.15 (Geodetika)
Parametrizovaná křivka $w(\tau)$ se nazývá *geodetika* s *afinním parametrem* τ (ve smyslu kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$), pokud platí

$$\frac{\boldsymbol{\nabla}}{d\tau}\frac{\boldsymbol{D}w}{d\tau} = 0\,,$$

tj. pokud je tečný vektor $\boldsymbol{D}w/d\tau$ podél křivky paralelně přenášen.∘

Je-li kovariantní derivace specifikována vzhledem k souřadnicovému systému x^j pomocí složek Γ^j_{kl}, případně pomocí rozdílového tenzoru $\boldsymbol{\Gamma}$, rovnice pro geodetiku lze zapsat

$$\frac{\boldsymbol{\partial}}{d\tau}\frac{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{n}}w}{d\tau} + \boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{kl}}\,\frac{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{k}}w}{d\tau}\,\frac{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{l}}w}{d\tau} = 0\,, \tag{7.4}$$

respektive, v souřadnicích $w^j(\tau) = x^j(w(\tau))$

$$\frac{d^2w^n}{d\tau^2} + \Gamma^n_{kl}\,\frac{dw^k}{d\tau}\,\frac{dw^l}{d\tau} = 0\ . \tag{7.5}$$

Dostáváme tak obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu s koeficienty danými složkami konexe. Standardní věty o existenci a jednoznačnosti řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic nám zaručují, že k daným počátečním podmínkám – počátečnímu bodu x a počátečnímu tečnému vektoru $\boldsymbol{a}$ – existuje jednoznačně maximálně prodloužená geodetika.

Definice D7.16

Geodetika se nazývá *úplná*, pokud je definována pro plnou škálu hodnot afinního parametru $\tau \in \mathbb{R}$. Varieta se nazývá *geodeticky úplná*, pokud každá geodetika lze prodloužit na úplnou geodetiku. ◦

Poznámka

Pojem geodetické úplnosti hraje důležitou roli v obecné teorii relativity, kde se pomocí existence geodetik neprodloužitelných na úplné detekuje přítomnost singularit.

Rozdílový tenzor je v (7.4) zúžen symetricky s tečným vektorem. Rovnice pro geodetiku tak není citlivá na antisymetrickou část rozdílového tenzoru. Ta je však podle věty V7.14 dána torzí. Jak jsme již zmínili výše, geodetiky proto závisí pouze na beztorzní části kovariantní derivace.

Při změně parametrizace geodetiky je potřeba rovnici geodetiky z definice D7.15 modifikovat.

Lemma V7.16 (Obecná parametrizace geodetiky)

Parametrizovaná křivka $w(\eta)$ je geodetika (ve smyslu kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$), splňuje-li

$$\frac{\boldsymbol{\nabla}}{d\eta}\frac{\boldsymbol{D}w}{d\eta} \propto \frac{\boldsymbol{D}w}{d\eta}\ .$$

Afinní parametr geodetiky je dán až na lineární transformaci. □

Důkaz:

Přímým dosazením $\tau = \tau(\eta)$ do D7.15 dostáváme

$$\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2 \frac{\boldsymbol{\nabla}}{d\eta}\frac{\boldsymbol{D}w}{d\eta} + \frac{d^2\eta}{d\tau^2}\,\frac{\boldsymbol{D}w}{d\eta} = 0\ ,$$

což dává požadovanou proporcionalitu.

Vidíme též, že parametr geodetiky zůstává afinním parametrem, pokud je faktor $\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^{-2}\frac{d^2\eta}{d\tau^2}$ nulový. Závislost jednoho afinního parametru na jiném tak musí být lineární. ■

Geodetiky můžeme využít při reprezentaci bodů blízkých danému bodu x pomocí tečných vektorů – reprezentaci, která se často zapisuje heuristickým výrazem $x + \varepsilon\boldsymbol{a} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

Definice D7.17 (Geodetické zobrazení)

Geodetické zobrazení geod_x je zobrazení z tečného prostoru $\boldsymbol{T}_x M$ do okolí bodu x přiřazující vektoru $\boldsymbol{a}$ bod s afinním parametrem 1 geodetiky vedoucí z x ve směru $\boldsymbol{a}$:

$$\operatorname{geod}_x \boldsymbol{a} = w(1)\ ,\quad \text{kde } w(\tau) \text{ je geodetika splňující}$$
$$w(0) = x\ ,\quad \frac{\boldsymbol{D}w}{d\tau}(0) = \boldsymbol{a}\ .$$

Pro $z = \operatorname{geod}_x \boldsymbol{a}$ budeme též psát $\boldsymbol{a} = \operatorname{geod}_x^{-1} z$. ◦

Geodetické zobrazení geod_x není obecně definováno na celém tečném prostoru $\boldsymbol{T}_x M$, protože geodetiky obecně nelze prodloužit na geodetiky úplné. Nicméně vždy existuje okolí $N_0 \subset \boldsymbol{T}_x M$ nulového vektoru $\mathbf{0}$, na kterém je geodetické zobrazení geod_x difeomorfismus zobrazující N_0 jednoznačně a hladce na okolí $N_x \subset M$ bodu x.

Definice D7.18 (Normální okolí)

Okolí N_x bodu x, na kterém je zobrazení geod_x^{-1} difeomorfismus, se nazývá *normální okolí bodu* x.

Normální okolí N_x ze nazývá *konvexní*, pokud každé jeho dva body lze spojit právě jednou geodetikou celou patřící do N_x. ∘

Ke každému bodu existuje konvexní normální okolí.

V konvexním normálním okolí lze zvolit tzv. *normální souřadnice*

Definice D7.19

Nechť N_x je konvexní normální okolí bodu x. Mějme dále v bodě x zvolenou n-ádu vektorů $\{\boldsymbol{e}_j\}$. Na okolí N_x definujeme *normální souřadnice* $\{\bar{x}^j\}$ pomocí komponent vektoru asociovaného s bodem pomocí geodetického zobrazení:

$$\bar{x}^j(z) = z^j \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \mathrm{geod}_x\big(z^j \boldsymbol{e}_j\big) \ .$$

Bod x nazýváme počátek systému $\{\bar{x}^j\}$. Zřejmě $\bar{x}^j(x) = 0$. ∘

Normální souřadnice jsou nejbližší analogií lineárních souřadnic známým z afinního prostoru. Připomeňme, že na afinním prostoru máme globální rovnoběžnost určující plochou kovariantní derivaci. Složky této derivace vzhledem k lineárním souřadnicím jsou nulové. Rozvineme-li na obecné varietě v blízkosti bodu x složky obecné konexe vzhledem k normálním souřadnicím, zjistíme, že jsou v prvním řádu nulové a v dalším řádu dány křivostí variety. Trochu předběhneme a uvedeme zde tento rozvoj explicitně. Křivost v něm bude popsána pomocí tzv. Riemannova tenzoru – pojmem křivosti včetně Riemannova tenzoru se budeme zevrubně zabývat níže.

Věta V7.17 (Složky konexe v normálních souřadnicích)

Mějme v okolí bodu x_0 normální souřadnice $\{\bar{x}^j\}$ zkonstruované pomocí geodetik ve smyslu beztorzní kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$. Složky $\bar{\Gamma}^j_{kl}$ této kovariantní derivace vzhledem k systému $\{\bar{x}^j\}$ jsou v blízkosti x_0 dány rozvojem

$$\bar{\Gamma}^n_{kl}\big|_x = -\frac{1}{3}\,\big(\bar{R}_{jk}{}^n{}_l + \bar{R}_{jl}{}^n{}_k\big)\big|_{x_0}\,\bar{x}^j + \mathcal{O}\big((\bar{x}^i)^2\big) \ ,$$

kde $\bar{x}^j$ jsou souřadnice bodu x. Zde $\bar{R}_{kl}{}^n{}_j$ jsou složky *Riemannova tenzoru* (v systému $\{\bar{x}^j\}$), který charakterizuje křivost kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$ – viz definici D7.21 a po ní následující text.

Pro kovariantní derivaci s torzí má rozvoj složek tvar

$$\bar{\Gamma}^n_{kl}\big|_x = \frac{1}{2}\,\bar{T}^n_{kl}\big|_{x_0} + \Big(\frac{1}{2}\,\bar{T}^n_{kl,j} - \frac{2}{3}\,\bar{R}_{j(k}{}^n{}_{l)}\Big)\Big|_{x_0}\,\bar{x}^j + \mathcal{O}\big((\bar{x}^i)^2\big) \ ,$$

kde $\bar{T}^n_{kl}$ jsou složky torze v normálních souřadnicích. □

DŮKAZ:

Začneme důkazem vztahu pro *beztorzní* derivaci. Rozvoj složek konexe má obecně tvar

$$\bar{\Gamma}^n_{kl}\big|_x = \bar{\Gamma}^n_{kl}\big|_{x_0} + \bar{\Gamma}^n_{kl,j}\big|_{x_0}\,\bar{x}^j + \mathcal{O}\big((\bar{x}^i)^2\big) \ . \qquad \text{(o)}$$

přičemž díky předpokladu o nulové torzi jsou všechny členy symetrické v indexech k a l. Křivka $w(\varepsilon) = \mathrm{geod}_{x_0}(\varepsilon \boldsymbol{a})$ je geodetika jdoucí z x_0 ve směru $\boldsymbol{a}$. Její souřadnice jsou $\bar{x}^j(w(\varepsilon)) = \varepsilon a^j$, kde $\boldsymbol{a} = a^j \boldsymbol{e}_j$. Tečný vektor $\frac{\boldsymbol{D}w}{d\varepsilon}(\varepsilon)$ má podél celé geodetiky konstantní souřadnice a^j. Rovnice geodetiky má tak tvar

$$a^k\, a^l\, \bar{\Gamma}^n_{kl}\big|_{w(\varepsilon)} = 0\ .$$

V bodě x_0 (tj. $\varepsilon = 0$, $\bar{x}^j = 0$) tedy máme $a^k\, a^l\, \bar{\Gamma}^n_{kl}\big|_{x_0} = 0$, přičemž vektor $\boldsymbol{a}$ zde můžeme zvolit libovolně. Jelikož jsou však složky $\bar{\Gamma}^n_{kl}\big|_{x_0}$ v k a l symetrické, dostáváme

$$\bar{\Gamma}^n_{kl}\big|_{x_0} = 0\ . \tag{i}$$

V dalším řádu v ε dostáváme podmínku $a^k\, a^l\, a^j\, \bar{\Gamma}^n_{kl,j}\big|_{x_0} = 0$ platící opět pro libovolné $\boldsymbol{a}$. Z toho plyne, že symetrická část koeficientů $\bar{\Gamma}^n_{kl,j}\big|_{x_0}$ vymizí:

$$\bar{\Gamma}^n_{(kl,j)}\big|_{x_0} = 0\ . \tag{*}$$

Část koeficientu $\bar{\Gamma}^n_{kl,j}\big|_{x_0}$ antisymetrická v posledních dvou indexech je dána Riemannovým tenzorem. Vskutku, z věty V7.27 níže užitím rovnice (i) dostaneme

$$\left(\bar{\Gamma}^n_{jl,k} - \bar{\Gamma}^n_{jk,l}\right)\big|_{x_0} = \bar{R}_{kl}{}^n{}_j\big|_{x_0} \tag{**}$$

Přímým vyjádřením symetrizace a antisymetrizace lehce nahlédneme, že pro libovolný tenzor s třemi kovariantními indexy symetrický v prvním páru indexů platí

$$\bar{\Gamma}^n_{kl,j} = \bar{\Gamma}^n_{(kl,j)} + \frac{2}{3}\Big(\bar{\Gamma}^n_{k[l,j]} + \bar{\Gamma}^n_{l[k,j]}\Big)\ .$$

Užitím (*) a (**) dostáváme koeficient dalšího řádu rozvoje (o)

$$\bar{\Gamma}^n_{kl,j}\big|_{x_0} = -\frac{1}{3}\left(\bar{R}_{jk}{}^n{}_l + \bar{R}_{jl}{}^n{}_k\right)\big|_{x_0}\ . \tag{ii}$$

Dosazením (i) a (ii) do (o) dostaneme dokazované tvrzení.

V případě kovariantní derivace s torzí definice geodetiky a konstrukce normálních souřadnic na torzi nezávisí. Stejné odvození tedy dává beztorzní symetrickou část složek kovariantní derivace. Antisymetrická část složek konexe je naopak určena právě torzí – viz lemma V7.14. Máme tedy

$$\bar{\Gamma}^n_{kl} = \bar{\Gamma}^n_{(kl)} + \frac{1}{2}\,\bar{T}^n_{kl}\ .$$

Rozvinutím v souřadnicích $\bar{x}^j$ a užitím předchozího výsledku pro symetrickou část dostaneme dokazované tvrzení. ■

7.8 Vztah mezi kovariantní a Lieovou derivací

Pomocí kovariantní derivace můžeme vyjádřit Lieovu derivaci zavedenou v kapitole 3. Lieova derivace je definována podél vektorového pole $\boldsymbol{a}$ (definujícího jednoparametrickou grupu difeomorfismů). V případě její akce na vektorových polích je vztah k (libovolně zvolené) kovariantní derivaci $\boldsymbol{\nabla}$ založen na definici torze D7.13 a vyjádření Lieovy derivace pomocí Lieovy závorky (věta V3.7)

Lemma V7.18

Nechť $\boldsymbol{\nabla}$ je kovariantní derivace s torzí $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ jsou vektorová pole. Pak

$$\pounds_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b}^n = \big[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\big]^n = \boldsymbol{a}^k\, \boldsymbol{\nabla}_k \boldsymbol{b}^n - \big(\boldsymbol{\nabla}_l \boldsymbol{a}^n + \boldsymbol{a}^k\, \boldsymbol{T}^{\,n}_{kl}\big)\, \boldsymbol{b}^l\ . \qquad \square$$

Akci Lieovy derivace na obecné tenzorové pole pak dostaneme na základě pozorování, že rozdíl mezi $\pounds_{\boldsymbol{a}}$ a $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}$ je pseudoderivace.

Věta V7.19 (Lieova derivace pomocí kovariantní derivace)

Nechť $\boldsymbol{\nabla}$ je kovariantní derivace s torzí $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{a}$ vektorové pole. Pak $\pounds_{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}$ je pseudoderivace a můžeme psát

$$\pounds_{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} + \mathsf{L}_{\boldsymbol{a}}\ , \quad \text{kde} \quad \mathsf{L}_{\boldsymbol{a}} = \mathbf{tens}\big[-\boldsymbol{\nabla}_l \boldsymbol{a}^k - \boldsymbol{a}^n\, \boldsymbol{T}^{\,k}_{nl}\big]\ . \qquad \square$$

DŮKAZ:

Linearita vůči součtu a působení na součin tenzorů rozdílu $\mathsf{L}_{\boldsymbol{a}} = \pounds_{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}$ plyne z vlastností Lieovy a kovariantní derivace. Ultralokalita plyne z faktu, že jak Lieova, tak kovariantní derivace působí na funkce jako obyčejná derivace ve směru. Rozdíl $\mathsf{L}_{\boldsymbol{a}}$ je tak pseudoderivace a jeho působení je dáno podle věty V2.4 jeho akcí na vektorech, která je dána lemmatem V7.18. ∎

Speciálně, pro vektor $\boldsymbol{b}$, 1-formu $\boldsymbol{\omega}$ a metriku $\boldsymbol{g}$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\pounds_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{b}^n &= \boldsymbol{a}^k\, \boldsymbol{\nabla}_k \boldsymbol{b}^n - \big(\boldsymbol{\nabla}_l \boldsymbol{a}^n + \boldsymbol{a}^k\, \boldsymbol{T}^{\,n}_{kl}\big)\, \boldsymbol{b}^l\ ,\\
\pounds_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{\omega}_n &= \boldsymbol{a}^k\, \boldsymbol{\nabla}_k \boldsymbol{\omega}_n + \big(\boldsymbol{\nabla}_n \boldsymbol{a}^l + \boldsymbol{a}^k\, \boldsymbol{T}^{\,l}_{kn}\big)\, \boldsymbol{\omega}_l\\
\pounds_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{g}_{mn} &= \boldsymbol{a}^k\, \boldsymbol{\nabla}_k \boldsymbol{g}_{mn} + \big(\boldsymbol{\nabla}_m \boldsymbol{a}^l\big)\boldsymbol{g}_{ln} + \big(\boldsymbol{\nabla}_n \boldsymbol{a}^l\big)\boldsymbol{g}_{ml}\\
&\qquad + \boldsymbol{a}^k\, \boldsymbol{T}^{\,l}_{km}\, \boldsymbol{g}_{ln} + \boldsymbol{a}^k\, \boldsymbol{T}^{\,l}_{kn}\, \boldsymbol{g}_{ml}\ .
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Všimněme si, že ač kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}$ závisí na směru $\boldsymbol{a}$ ultralokálně, Lieova derivace $\pounds_{\boldsymbol{a}}$ již na $\boldsymbol{a}$ ultralokálně nezávisí. Rozdíl mezi $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}$ a $\pounds_{\boldsymbol{a}}$ totiž obsahuje *derivaci* $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{a}$, která je citlivá na chování vektorového pole $\boldsymbol{a}$ v okolí bodu, ve kterém derivace počítáme.

V kapitole 3 jsme viděli, že vztah pro Lieovu derivaci se výrazně zjednodušuje, pokud derivujeme podél souřadnicového pole – řekněme podle $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial} x^1$ systému souřadnic $\{x^j\}$. Rovnici (3.6) můžeme znovu odvodit pomocí souřadnicové kovariantní derivace $\boldsymbol{\partial}$ asociované se systémem $\{x^j\}$. Využitím věty V7.19 a vlastností $\boldsymbol{\partial}$ okamžitě dostáváme

$$\pounds_{\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^1}} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\partial}_{\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^1}}\, \boldsymbol{A}\ , \tag{7.7}$$

případně v souřadnicích

$$\big(\pounds_{\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^1}} A\big)^{m\ldots}_{n\ldots} = A^{m\ldots}_{n\ldots\,,1}\ . \tag{7.8}$$

POZNÁMKA

Připomeňme, že $\big(\pounds_{\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial} x^1} A\big)^{m\ldots}_{n\ldots}$ v poslední rovnici značí souřadnice Lieovy derivace tenzoru, ne Lieovu derivaci souřadnic tenzoru – i když to v tomto případě vede ke stejnému výsledku.

7.9 Vztah mezi kovariantní a vnější derivací

V kapitole 4 o antisymetrických formách jsme se zmínili, že vnější derivace je antisymetrizací kovariantní derivace. Nyní již kovariantní derivaci máme k dispozici a můžeme toto tvrzení zformulovat přesně.

Věta V7.20 (Vnější derivace pomocí kovariantní derivace)
Nechť $\boldsymbol{\nabla}$ je libovolná kovariantní derivace bez torze, $\mathbf{Tor}[\boldsymbol{\nabla}] = 0$.
Pak vnější derivace p-formy $\boldsymbol{\omega}$ lze vyjádřit

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{\omega}\ ,$$

případně, užitím tenzorových indexů,

$$\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_0} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}_0} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p} = (p+1)\, \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}_0} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p]}$$

Formálně můžeme též psát $\mathbf{d} = \boldsymbol{\nabla}\wedge$. □

(Viz důkaz za rovnicí (7.12).) Zde jsme použili označení motivované definicí vnějšího součinu:

Definice D7.20 (Antisymetrizovaná kovariantní derivace)
Nechť $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{A}^p M$. Pak budeme užívat označení

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}_0} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p} = (p+1)\, \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}_0} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p]}\ . \qquad \circ$$

Konkrétně, pro 0-formu (funkci) f, 1-formu $\boldsymbol{\gamma}$ a 2-formu $\boldsymbol{\sigma}$ dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} f &= \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} f\ , \\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \gamma_{\boldsymbol{b}} &= 2\boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}} \gamma_{\boldsymbol{b}]} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} \gamma_{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}} \gamma_{\boldsymbol{a}}\ , \\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{bc}} &= 3\boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{bc}]} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{bc}} + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{ca}} + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{ab}}\ . \end{aligned} \tag{7.9}$$

Vidíme, že antisymetrická část beztorzní kovariantní derivace p-formy nezávisí na kovariantní derivaci – je proporcionální vnější derivaci. Vnější derivaci můžeme vyjádřit pomocí libovolné kovariantní derivace. Užitečné je například zvolit souřadnicovou kovariantní derivaci $\boldsymbol{\partial}$ asociovanou se systémem $\{x^j\}$. Pro souřadnice vnější derivace $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}$ pak dostáváme

$$\mathrm{d}_{a_0} \omega_{a_1 \dots a_p} = (p+1)\, \omega_{[a_1 \dots a_p, a_0]}\ . \tag{7.10}$$

Speciálně

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_a f &= f_{,a}\ , \\ \mathrm{d}_a \gamma_b &= 2\gamma_{[b,a]} = \gamma_{b,a} - \gamma_{a,b}\ , \\ \mathrm{d}_a \sigma_{bc} &= 3\sigma_{[bc,a]} = \sigma_{bc,a} + \sigma_{ca,b} + \sigma_{ab,c}\ . \end{aligned} \tag{7.11}$$

Vztah vnější derivace ke kovariantní derivaci s torzí je složitější. K výrazům ze (7.9) přibudou navíc členy obsahující tenzor torze. Pro 1-formu a 2-formu lze vnější derivace vyjádřit následovně:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} f &= \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} f\ , \\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \gamma_{\boldsymbol{b}} &= \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} \gamma_{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}} \gamma_{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{ab}}\, \gamma_{\boldsymbol{n}}\ , \\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{bc}} &= \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{bc}} + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{ca}} + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{ab}} \\ &\qquad + \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{bc}}\, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{na}} + \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{ca}}\, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{nb}} + \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{ab}}\, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{nc}}\ . \end{aligned} \tag{7.12}$$

Obecný výraz pro formy vyššího stupně viz marginálie M7.7.

DŮKAZ:
Dokážeme si tvrzení pro 1-formu $\boldsymbol{\gamma}$, důkaz pro formy vyššího stupně je analogický. Vnější derivaci $\mathbf{d}\boldsymbol{\gamma}$ zúžíme s dvěma libovolnými vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, použijeme vztah z příkladu P4.3, a v něm nahradíme gradienty skalárů kovariantními derivacemi:

$$\boldsymbol{a}^m \boldsymbol{b}^n\, \mathbf{d}_m \gamma_n = \boldsymbol{a}^m \boldsymbol{\nabla}_m \big(\boldsymbol{b}^n \gamma_n\big) - \boldsymbol{b}^n \boldsymbol{\nabla}_n \big(\boldsymbol{a}^m \gamma_m\big) - [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]^c\, \gamma_c\ .$$

M7.7 Vztah d a $\boldsymbol{\nabla}$ s torzí
Pro kovariantní derivaci $\boldsymbol{\nabla}$ s nenulovou torzí $\boldsymbol{T}$ je potřeba větu V7.20 modifikovat. Ve výrazu pro vnější derivaci přibudou členy obsahující torzi:

$$\begin{aligned} &\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_0} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p} = \\ &\quad = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}_0} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p} + \boldsymbol{T}^{n}_{\boldsymbol{a}_0 \boldsymbol{a}_1} \wedge \boldsymbol{\omega}_{n \boldsymbol{a}_2 \dots \boldsymbol{a}_p} \\ &\quad = (p+1)\, \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}_0} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p]} \\ &\qquad + \tbinom{p+1}{2} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{[\boldsymbol{a}_0 \boldsymbol{a}_1} \boldsymbol{\omega}_{|\boldsymbol{n}| \boldsymbol{a}_2 \dots \boldsymbol{a}_p]}\ . \end{aligned}$$

Význam ‘zvýraznění’ indexu $\boldsymbol{n}$ bude objasněn v příští kapitole v definici D8.1 – zde nám postačí vědět, že se jedná o ekvivalentní zápis posledního výrazu užívajícího pouze ‘obyčejné’ tenzorové operace. Formálně bychom mohli též psát snadněji zapamatovatelný výraz bez indexů: $\mathbf{d} = \boldsymbol{\nabla} \wedge + \boldsymbol{T} \wedge$.
Rozepíšeme-li antisymetrizaci explicitně (viz marginálie M4.2), dostaneme

$$\begin{aligned} &\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_0} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p} = \\ &\quad = \sum_{0 \le k \le p} (-1)^k \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}_k} \boldsymbol{\omega}_{\underbrace{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo } \boldsymbol{a}_k}} \\ &\qquad + \sum_{0 \le k < l \le p} (-1)^{k+l+1} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{a}_k \boldsymbol{a}_l} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n} \underbrace{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p}_{\text{mimo } \boldsymbol{a}_k,\, \boldsymbol{a}_l}}\ . \end{aligned}$$

Speciálně, pro $p = 0, 1, 2$ dostáváme rovnici (7.12). Důkaz probíhá analogicky důkazu pro $p = 1$ uvedenému za rovnicí (7.12), pouze místo vztahu z příkladu P4.3 je potřeba použít obecný vztah z marginálie M4.5.

Užitím pravidla pro derivování součinu dostaneme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^m \boldsymbol{b}^n\, \mathbf{d}_m \gamma_n &= \boldsymbol{a}^m \boldsymbol{b}^n \boldsymbol{\nabla}_m \gamma_n - \boldsymbol{a}^n \boldsymbol{b}^m \boldsymbol{\nabla}_m \gamma_n \\ &\quad + \boldsymbol{a}^m \left(\boldsymbol{\nabla}_m \boldsymbol{b}^n\right) \gamma_n - \boldsymbol{b}^n \left(\boldsymbol{\nabla}_n \boldsymbol{a}^m\right) \gamma_n - [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]^c\, \gamma_c \;.\end{aligned}$$

Srovnáním s definicí torze D7.13 nalezneme

$$\boldsymbol{a}^m \boldsymbol{b}^n\, \mathbf{d}_m \gamma_n = \boldsymbol{a}^m \boldsymbol{b}^n \Big(\boldsymbol{\nabla}_m \gamma_n - \boldsymbol{\nabla}_n \gamma_m + \boldsymbol{T}^{\,c}_{mn}\, \gamma_c \Big) \;,$$

což je požadovaný výraz. ■

7.10 Křivost

Nyní zavedeme nejdůležitější charakteristiku kovariantní derivace – její *křivost*. Křivost kovariantní derivace charakterizuje její nekomutativitu. Charakterizuje, jak moc se příslušný paralelní přenos odlišuje od globální rovnoběžnosti.

Nejdříve definujeme Riemannův tenzor křivosti

Definice D7.21 (Riemannův tenzor křivosti)

Riemannův tenzor křivosti $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{ab}}{}^{\boldsymbol{c}}{}_{\boldsymbol{d}}$ kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$ je tenzor typu $(1,3)$ splňující pro libovolná vektorová pole $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ vztah

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{kl}}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{m}}\, \boldsymbol{a}^k \boldsymbol{b}^l\, \boldsymbol{c}^m = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{c}^n\big) - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}}\big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{c}^n\big) - \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}\, \boldsymbol{c}^n \;.$$

Zavedeme též bilineární tenzor-značné zobrazení na tečných vektorech typu $(1,1)$

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{a}^k \boldsymbol{b}^l\, \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{kl}}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{m}} \;,$$

které je ekvivalentní Riemannovu tenzoru.

Konečně, budeme-li chtít zdůraznit asociaci Riemannova tenzoru s kovariantní derivací, budeme psát $\boldsymbol{R} = \mathbf{Riem}[\boldsymbol{\nabla}]$. ∘

Výraz na pravé straně definičního vztahu pro Riemannův tenzor obsahuje druhé kovariantní derivace a není a priori jasné, že jej lze reprezentovat tenzorově. Aby byla definice konzistentní, musí tento výraz záviset na vektorových polích ultralokálně. Vskutku platí

Lemma V7.21

Výraz

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{c}^n\big) - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}}\big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{c}^n\big) - \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}\, \boldsymbol{c}^n \;.$$

závisí na $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ ultralokálně a lineárně. □

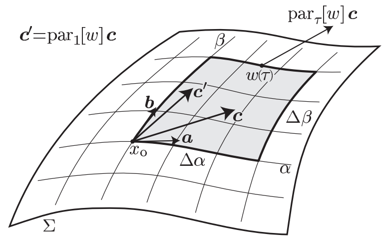
Důkaz:

Linearita vůči sčítání plyne z linearity kovariantní derivace a Lieovy závorky. Zbývá dokázat, že výraz je též lineární vůči násobení funkcí. Začněme ultralokalitou v argumentu $\boldsymbol{a}$ (obdobně pro $\boldsymbol{b}$):

$$\begin{aligned}& f\boldsymbol{a}^k \boldsymbol{\nabla}_k\big(\boldsymbol{b}^l \boldsymbol{\nabla}_l \boldsymbol{c}^n\big) - \boldsymbol{b}^k \boldsymbol{\nabla}_k\big(f\boldsymbol{a}^l \boldsymbol{\nabla}_l \boldsymbol{c}^n\big) - [f\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]^m \boldsymbol{\nabla}_m \boldsymbol{c}^n \\ &\quad = f\boldsymbol{a}^k \boldsymbol{\nabla}_k\big(\boldsymbol{b}^l \boldsymbol{\nabla}_l \boldsymbol{c}^n\big) - f\boldsymbol{b}^k \boldsymbol{\nabla}_k\big(\boldsymbol{a}^l \boldsymbol{\nabla}_l \boldsymbol{c}^n\big) - \big(\boldsymbol{b}^k \boldsymbol{\nabla}_k f\big)\, \boldsymbol{a}^l \boldsymbol{\nabla}_l \boldsymbol{c}^n \\ &\qquad - f[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]^m \boldsymbol{\nabla}_m \boldsymbol{c}^n - \big(\boldsymbol{b}^k\, \mathbf{d}_k f\big)\, \boldsymbol{a}^m \boldsymbol{\nabla}_m \boldsymbol{c}^n \\ &\quad = f\Big(\boldsymbol{a}^k \boldsymbol{\nabla}_k\big(\boldsymbol{b}^l \boldsymbol{\nabla}_l \boldsymbol{c}^n\big) - \boldsymbol{b}^k \boldsymbol{\nabla}_k\big(\boldsymbol{a}^l \boldsymbol{\nabla}_l \boldsymbol{c}^n\big) - [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]^m \boldsymbol{\nabla}_m \boldsymbol{c}^n\Big) \;.\end{aligned}$$

Pro argument $\boldsymbol{c}$ je rozderivování součinů delší, ale s použitím definice Lieovy závorky D2.3 vede opět k ultralokalitě. ■

M7.8 Geometrický význam křivosti
Riemannův tenzor má názorný geometrický význam. Jedná se o 'plošnou hustotu netriviálnosti' paralelního přenosu podél uzavřené křivky. Přeneseme-li v křivém prostoru paralelně vektor podél uzavřené smyčky zpět do počátečního bodu, nedostaneme obecně stejný vektor. Odchylka od původního vektoru je pro malou smyčku úměrná 'ploše' smyčky s koeficientem daným právě Riemannovým tenzorem.



Konkrétně, mějme dvoudimenzionální plochu Σ parametrizovanou souřadnicemi α, β s počátkem v bodě x_{o} (tj. $\alpha(x_{\text{o}}) = \beta(x_{\text{o}}) = 0$). Souřadnicové vektory v bodě x_{o} označme $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. V této ploše zvolme podél souřadnicových čar malou 'obdélníkovou' křivku $w(\tau)$ o rozměrech $\Delta\alpha$ a $\Delta\beta$. Vektor $\boldsymbol{c}' = \mathrm{par}_1[w]\, \boldsymbol{c}$ paralelně přenesený podél této smyčky se bude obecně lišit od původního vektoru $\boldsymbol{c}$ a pro malou smyčku tato odchylka bude řádu $\Delta\alpha\Delta\beta$:

$$\mathrm{par}_1[w]\, \boldsymbol{c}^{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{c}^{\boldsymbol{k}} \approx \Delta\alpha\, \Delta\beta\, \boldsymbol{R}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{k}}{}_{\boldsymbol{l}}\, \boldsymbol{c}^{\boldsymbol{l}} \;.$$

Riemannův tenzor je zde vyčíslen v bodě x_{o}.

Poznamenejme, že vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ v uvedeném vztahu určují pouze plochu, ve které smyčka leží, a 'jednotky', ve kterých se měří rozměry smyčky. Není důležité, aby smyčka začínala a končila ve směru těchto vektorů. Vskutku, v dodatku 7.A dokážeme obecnější verzi tvrzení: Zvolíme-li v ploše Σ libovolnou malou křivku $w_s(\tau)$ lineárního rozměru řádu $\mathcal{O}(s)$ ohraničující plošku o obsahu $S \sim \mathcal{O}(s^2)$ (měřeno v souřadnicích α, β), vektor paralelně přenesený podél w_s je dán vztahem

$$\mathrm{par}_1[w_s]\, \boldsymbol{c}^{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{c}^{\boldsymbol{k}} - S\, \boldsymbol{R}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{k}}{}_{\boldsymbol{l}}\, \boldsymbol{c}^{\boldsymbol{l}} + \mathcal{O}(s^3) \;.$$

Definice Riemannova tenzoru D7.21 se odkazuje pouze na akci kovariantní derivace na tečném bundlu, tj. pouze na vektorových polích. Nepotřebuje rozšíření derivace na celou tenzorovou algebru. My však vždy toto rozšíření předpokládáme a můžeme proto v definici D7.21 provést rozderivování součinů typu $\boldsymbol{b}^l \boldsymbol{\nabla}_l \boldsymbol{c}^n$. Užitím definice torze D7.13 okamžitě dostáváme

Lemma V7.22 (Komutátor působící na vektorové pole)
Nechť $\boldsymbol{R} = \mathbf{Riem}[\boldsymbol{\nabla}]$ a $\boldsymbol{c} \in \mathfrak{T}M$. Pak

$$\boldsymbol{\nabla}_k \boldsymbol{\nabla}_l\, \boldsymbol{c}^n - \boldsymbol{\nabla}_l \boldsymbol{\nabla}_k\, \boldsymbol{c}^n + \boldsymbol{T}^m_{kl} \boldsymbol{\nabla}_m\, \boldsymbol{c}^n = \boldsymbol{R}_{kl}{}^n{}_m\, \boldsymbol{c}^m \;. \qquad \square$$

Vidíme, že Riemannův tenzor charakterizuje nesymetrii kovariantní derivace působící na vektorová pole. Jedná se o analogii vztahu z věty V7.9 pro komutátor kovariantní derivace působící na funkce. Nabízí se samozřejmě otázka, zda komutátor kovariantní derivace působící na složitějších tenzorové veličiny vede k dalším veličinám charakterizujícím kovariantní derivace. Odpověď je záporná, komutátor libovolné tenzorové veličiny je již jednoznačně dán Riemannovým tenzorem a torzí.

Definice D7.22 (Operátor křivosti)
Komutátor kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$ ve směrech $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ (s opravou na nekomutativitu vektorových polí $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$),

$$\mathsf{R}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b}]} \;,$$

působící na obecné tenzorové pole, nazýváme *operátor křivosti*.
Stejně jako při působení na vektorová pole (definice D7.21, lemma V7.21) můžeme závislost na vektorech $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ reprezentovat tenzorově. K tomu účelu zavedeme tenzor-značný (typu $(0,2)$) operátor křivosti R_{kl}:

$$\mathsf{R}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^k \boldsymbol{b}^l\, \mathsf{R}_{kl} \;. \qquad \circ$$

POZNÁMKA
Zdůrazněme, že oba operátory křivosti jsou vskutku *operátory*, působící doprava na tenzorové algebře – např.

$$\begin{aligned}\mathsf{R}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\, \boldsymbol{A}^{m\ldots}_{n\ldots} &= \boldsymbol{a}^k \boldsymbol{b}^l\, \mathsf{R}_{kl}\, \boldsymbol{A}^{m\ldots}_{n\ldots} \\ &= \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{A}^{m\ldots}_{n\ldots}) - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{A}^{m\ldots}_{n\ldots}) - \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b}]}\, \boldsymbol{A}^{m\ldots}_{n\ldots} \;.\end{aligned}$$

Analogicky lemmatu V7.22 můžeme operátor křivosti napsat explicitně.

Věta V7.23 (Antisymetrická část druhé kovariantní derivace)
Operátor křivosti R_{kl} kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$ lze vyjádřit

$$\mathsf{R}_{kl} = \boldsymbol{\nabla}_k \boldsymbol{\nabla}_l - \boldsymbol{\nabla}_l \boldsymbol{\nabla}_k + \boldsymbol{T}^n_{kl} \boldsymbol{\nabla}_n \;. \qquad \square$$

Věta V7.24 (Působení operátoru křivosti)
Operátor křivosti $\mathsf{R}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ derivace $\boldsymbol{\nabla}$ je pseudoderivace typu $(0,0)$ charakterizovaná tenzorem $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$. Respektive, operátor křivosti R_{kl} je pseudoderivace typu $(0,2)$ charakterizovaná přímo Riemannovým tenzorem $\boldsymbol{R}$:

$$\begin{aligned}\mathsf{R}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) &= \mathbf{tens}[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^n{}_m] \;, \\ \mathsf{R}_{kl} &= \mathbf{tens}[\boldsymbol{R}_{kl}{}^n{}_m] \;. \qquad \square\end{aligned}$$

Důkaz:
Musíme ověřit vlastnosti pseudoderivace z definice D2.4. Linearita komutátoru plyne z linearity kovariantní derivace. Podobně je zaručena komutativita s kontrakcí. Anihilace funkce (ultralokalita) plyne z věty V7.9. Zbývá ověřit, že platí pravidlo pro derivování součinu. Opakovaným použitím Leibnizova pravidla zjistíme, že členy s prvními derivacemi polí $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ se navzájem vyruší a dostaneme

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\nabla}_a\boldsymbol{\nabla}_b\big(\boldsymbol{A}^{k\dots}_{l\dots}\boldsymbol{B}^{m\dots}_{n\dots}\big)-\boldsymbol{\nabla}_b\boldsymbol{\nabla}_a\big(\boldsymbol{A}^{k\dots}_{l\dots}\boldsymbol{B}^{m\dots}_{n\dots}\big)+\boldsymbol{T}^c_{ab}\boldsymbol{\nabla}_c\big(\boldsymbol{A}^{k\dots}_{l\dots}\boldsymbol{B}^{m\dots}_{n\dots}\big)\\&\quad=\boldsymbol{A}^{k\dots}_{l\dots}\big(\boldsymbol{\nabla}_a\boldsymbol{\nabla}_b\boldsymbol{B}^{m\dots}_{n\dots}-\boldsymbol{\nabla}_b\boldsymbol{\nabla}_a\boldsymbol{B}^{m\dots}_{n\dots}+\boldsymbol{T}^c_{ab}\boldsymbol{\nabla}_c\boldsymbol{B}^{m\dots}_{n\dots}\big)\\&\qquad+\big(\boldsymbol{\nabla}_a\boldsymbol{\nabla}_b\boldsymbol{A}^{k\dots}_{l\dots}-\boldsymbol{\nabla}_b\boldsymbol{\nabla}_a\boldsymbol{A}^{k\dots}_{l\dots}+\boldsymbol{T}^c_{ab}\boldsymbol{\nabla}_c\boldsymbol{A}^{k\dots}_{l\dots}\big)\boldsymbol{B}^{m\dots}_{n\dots}\ .\end{aligned}$$

Tím jsme ověřili, že komutátor (s opravou na torzi) je pseudoderivací a je tedy dán svojí akcí na vektorových polích. Ta je však podle definice D7.21, případně lemmatu V7.22, dána Riemannovým tenzorem. ∎

Pro vektorová pole, 1-formy, oprátory a tenzory typu $(0,2)$ tak pro R_{kl} explicitně dostáváme

$$\begin{aligned}&\mathsf{R}_{kl}\,\boldsymbol{c}^n=\boldsymbol{R}_{kl}{}^n{}_m\,\boldsymbol{c}^m\ ,\\&\mathsf{R}_{kl}\,\boldsymbol{\omega}_n=-\boldsymbol{R}_{kl}{}^m{}_n\,\boldsymbol{\omega}_m\ ,\\&\mathsf{R}_{kl}\,\boldsymbol{A}^a{}_b=\boldsymbol{R}_{kl}{}^a{}_n\boldsymbol{A}^n{}_b-\boldsymbol{R}_{kl}{}^n{}_b\boldsymbol{A}^a{}_n\ ,\\&\mathsf{R}_{kl}\,\boldsymbol{g}_{ab}=-\boldsymbol{R}_{kl}{}^n{}_a\,\boldsymbol{g}_{nb}-\boldsymbol{R}_{kl}{}^n{}_b\,\boldsymbol{g}_{an}\,.\end{aligned}\tag{7.13}$$

Souřadnicové a n-ádové kovariantní derivace jsou z hlediska křivosti triviální. Platí

Lemma V7.25 (Křivost souřadnicové a n-ádové derivace)
Nechť $\boldsymbol{\partial}$ je souřadnicová kovariantní derivace asociovaná se souřadným systémem $\{x^\mu\}$ a $\boldsymbol{\eth}$ n-ádovaná kovariantní souřadnice n-ády $\{\boldsymbol{e}_j\}$. Pak

$$\mathbf{Riem}[\boldsymbol{\partial}]=0\ ,\qquad \mathbf{Riem}[\boldsymbol{\eth}]=0\ .$$ □

Důkaz:
Operátor křivosti derivace $\boldsymbol{\eth}$ působící na vektorové pole $\boldsymbol{a}$ dává $\mathsf{R}\,\boldsymbol{a}=a^n\mathsf{R}\,\boldsymbol{e}_n$. Ovšem $\boldsymbol{\eth}\boldsymbol{e}_j=0$, tedy i $\mathsf{R}\,\boldsymbol{e}_j=0$ a tedy $\mathsf{R}\,\boldsymbol{a}=0$. Z věty V7.24 pak dostáváme $\mathbf{Riem}[\boldsymbol{\eth}]=0$. $\boldsymbol{\partial}$ je speciální případ n-ádové derivace. ∎

Ani definice Riemannova tenzoru křivosti D7.21, ani věta V7.24 o komutátoru kovariantní derivace nedávají explicitní předpis pro výpočet Riemannova tenzoru. Jak jsme diskutovali v předchozím textu, kovariantní derivaci typicky zadáváme pomocí jejích složek vůči nějakému souřadnému systému (viz definice D7.12). Rádi bychom vyjádřili Riemannův tenzor pomocí těchto složek. Složky kovariantní derivace jsme zavedli jako souřadnice rozdílového tenzoru mezi $\boldsymbol{\nabla}$ a souřadnicovou derivací $\boldsymbol{\partial}$. Proto bude užitečné začít obecným vztahem mezi Riemannovými tenzory dvou kovariantních derivací.

Věta V7.26 (Vztah Riemannových tenzorů)
Nechť $\boldsymbol{\nabla}$ a $\tilde{\boldsymbol{\nabla}}$ jsou dvě kovariantní derivace (s torzí $\boldsymbol{T}$, respektive $\tilde{\boldsymbol{T}}$) lišící se rozdílovým tenzorem $\boldsymbol{\Gamma}$ (tj. $\tilde{\boldsymbol{\nabla}}-\boldsymbol{\nabla}=\mathbf{tens}[\boldsymbol{\Gamma}]$). Pak pro příslušné Riemannovy tenzory $\boldsymbol{R}$ a $\tilde{\boldsymbol{R}}$ platí

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{R}}_{ab}{}^k{}_l&=\boldsymbol{R}_{ab}{}^k{}_l+\boldsymbol{\nabla}_a\boldsymbol{\Gamma}^k_{bl}-\boldsymbol{\nabla}_b\boldsymbol{\Gamma}^k_{al}\\&\quad+\boldsymbol{T}^n_{ab}\,\boldsymbol{\Gamma}^k_{nl}+\boldsymbol{\Gamma}^k_{an}\,\boldsymbol{\Gamma}^n_{bl}-\boldsymbol{\Gamma}^k_{bn}\,\boldsymbol{\Gamma}^n_{al}\ .\end{aligned}$$ □

Důkaz:
Pomocí lemmatu V7.22 zapíšeme výraz $\tilde{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{ab}}{}^{\boldsymbol{k}}{}_{\boldsymbol{l}}\, \boldsymbol{c}^{\boldsymbol{l}}$. Derivaci $\tilde{\boldsymbol{\nabla}}$ pak nahradíme derivací $\boldsymbol{\nabla}$ pomocí věty V7.12 a torzi pomocí věty V7.5. Použitím pravidla pro derivování součinu a přímočarými úpravami se vyruší členy obsahující $\boldsymbol{\nabla c}$ a zbydou členy z pravé strany věty V7.26, vynásobené vektorem $\boldsymbol{c}$. ∎

Zvolíme-li za jednu z derivací souřadnicovou kovariantní derivaci asociovanou se systémem $\{x^j\}$, rozdílový tenzor dává složky druhé kovariantní derivace. Uvážíme-li navíc, že $\mathbf{Riem}[\boldsymbol{\partial}] = 0$ a $\mathbf{Tor}[\boldsymbol{\partial}] = 0$, dostaneme hledaný předpis pro složky Riemannova tenzoru

Lemma V7.27 (Složky Riemannova tenzoru)
Komponenty Riemannova tenzoru $\boldsymbol{R}$ kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$ s torzí $\boldsymbol{T}$ vzhledem k souřadnému systému $\{x^j\}$ vyjádřené pomocí složek kovariantní derivace Γ^k_{ab} jsou:

$$R_{ab}{}^k{}_l = \Gamma^k_{bl,a} - \Gamma^k_{al,b} + \Gamma^k_{an}\,\Gamma^n_{bl} - \Gamma^k_{bn}\,\Gamma^n_{al}\,.$$

Alternativně, můžeme zapsat Riemannův tenzor pomocí rozdílového tenzoru $\boldsymbol{\Gamma}$

$$\boldsymbol{R_{ab}{}^k{}_l} = 2\left(\boldsymbol{\partial}_{[\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{b}]\boldsymbol{l}} + \boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{k}}_{[\boldsymbol{a}|\boldsymbol{n}|}\,\boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{b}]\boldsymbol{l}}\right)\,.$$ □

Poznámka
Zdůrazněme, že tento výraz pro Riemannův tenzor platí i pro kovariantní derivace s nenulovou torzí. To se projeví v tom, že složky Γ^k_{ab} budou obecně nesymetrické v dolních dvou indexech.

Poznámka
Výraz pro Riemanův tenzor má jednoduchý tvar v řeči tzv. *vnější kovariantní derivace*, kterou zavedeme v příští kapitole – viz věta V8.3.

7.11 Vlastnosti tenzoru křivosti

Z definice Riemannova tenzoru je zřejmé, že je antisymetrický v prvních dvou indexech

$$\boldsymbol{R_{ab}{}^k{}_l} = -\boldsymbol{R_{ba}{}^k{}_l}\,. \tag{7.14}$$

Riemannův tenzor má však další symetrie, a to zejména v případě beztorzní kovariantní derivace.

Nejdůležitější jsou tzv. Bianchiho identity. První z nich se týká antisymetrické části Riemannova tenzoru $\boldsymbol{R}$, druhá antisymetrické části derivace $\boldsymbol{\nabla R}$.

Věta V7.28 (Bianchiho identity)
Nechť $\boldsymbol{\nabla}$ je kovariantní derivace s tenzorem křivosti $\boldsymbol{R}$ a torzí $\boldsymbol{T}$. Pak

$$\boldsymbol{R}_{[\boldsymbol{ab}}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{c}]} = \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}}\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{bc}]} - \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{k}}_{[\boldsymbol{ab}}\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{c}]\boldsymbol{k}}\,, \tag{Bianchi 1}$$
$$\boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}}\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{bc}]}{}^{\boldsymbol{k}}{}_{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{[\boldsymbol{ab}}\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{c}]\boldsymbol{n}}{}^{\boldsymbol{k}}{}_{\boldsymbol{l}}\,. \tag{Bianchi 2}$$

Konkrétně, pro kovariantní derivaci bez torze, $\boldsymbol{T} = 0$, dostáváme

$$\boldsymbol{R}_{[\boldsymbol{ab}}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{c}]} = 0\,, \tag{Bianchi 1}$$
$$\boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}}\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{bc}]}{}^{\boldsymbol{k}}{}_{\boldsymbol{l}} = 0\,, \tag{Bianchi 2}$$

tj., Riemanův tenzor a jeho derivace jsou v dolních třech indexech antisymetrické. □

DŮKAZ: (PRVNÍ BINACHIHO IDENTITA)
Máme dokázat

$$\boldsymbol{R}_{[ab}{}^{n}{}_{c]} = \boldsymbol{\nabla}_{[a}\boldsymbol{T}^{n}_{bc]} - \boldsymbol{T}^{k}_{[ab}\boldsymbol{T}^{n}_{c]k} \ .$$

Začneme antisymetrizací akce operátoru křivosti na 1-formu $\boldsymbol{\omega}$. Podle (7.13) máme

$$-\mathsf{R}_{[ab}\boldsymbol{\omega}_{c]} = \boldsymbol{R}_{[ab}{}^{n}{}_{c]}\,\boldsymbol{\omega}_{n} \ .$$

Podle věty V7.23 však platí

$$\begin{aligned}
-\,\mathsf{R}_{[ab}\boldsymbol{\omega}_{c]} &= -\boldsymbol{\nabla}_{[a}\boldsymbol{\nabla}_{b}\,\boldsymbol{\omega}_{c]} + \boldsymbol{\nabla}_{[b}\boldsymbol{\nabla}_{a}\,\boldsymbol{\omega}_{c]} - \boldsymbol{T}^{m}_{[ab}\boldsymbol{\nabla}_{|m|}\,\boldsymbol{\omega}_{c]}\\
&= -\frac{1}{3}\Big(\boldsymbol{\nabla}_{a}\big(\boldsymbol{\nabla}_{b}\,\boldsymbol{\omega}_{c} - \boldsymbol{\nabla}_{c}\,\boldsymbol{\omega}_{b}\big) + \boldsymbol{T}^{m}_{bc}\boldsymbol{\nabla}_{m}\,\boldsymbol{\omega}_{a}\\
&\qquad\qquad + \text{cyklické záměny indexů } a,\ b,\ c\Big)\\
&= -\frac{1}{3}\Big(\boldsymbol{\nabla}_{a}\big(\mathbf{d}_{b}\,\boldsymbol{\omega}_{c}\big) - \big(\boldsymbol{\nabla}_{a}\boldsymbol{T}^{n}_{bc}\big)\,\boldsymbol{\omega}_{n} - \boldsymbol{T}^{m}_{bc}\boldsymbol{\nabla}_{a}\,\boldsymbol{\omega}_{m} + \boldsymbol{T}^{m}_{bc}\boldsymbol{\nabla}_{m}\,\boldsymbol{\omega}_{a}\\
&\qquad\qquad + \text{cyklické záměny indexů } a,\ b,\ c\Big)\\
&= -\frac{1}{3}\Big(\boldsymbol{\nabla}_{a}\big(\mathbf{d}_{b}\,\boldsymbol{\omega}_{c}\big) - \big(\boldsymbol{\nabla}_{a}\boldsymbol{T}^{n}_{bc}\big)\,\boldsymbol{\omega}_{n} - \boldsymbol{T}^{n}_{bc}\,\mathbf{d}_{a}\boldsymbol{\omega}_{n} + \boldsymbol{T}^{m}_{bc}\,\boldsymbol{T}^{n}_{am}\,\boldsymbol{\omega}_{n}\\
&\qquad\qquad + \text{cyklické záměny indexů } a,\ b,\ c\Big)\\
&= -\Big(\boldsymbol{\nabla}_{[a}\big(\mathbf{d}_{b}\,\boldsymbol{\omega}_{c]}\big) + \boldsymbol{T}^{n}_{[bc}\,\mathbf{d}_{|n|}\boldsymbol{\omega}_{a]}\Big)\\
&\qquad\qquad + \big(\boldsymbol{\nabla}_{[a}\boldsymbol{T}^{n}_{bc]}\big)\,\boldsymbol{\omega}_{n} - \boldsymbol{T}^{m}_{[bc}\,\boldsymbol{T}^{n}_{a]m}\,\boldsymbol{\omega}_{n}\\
&= -\,\mathbf{d}_{a}\mathbf{d}_{b}\boldsymbol{\omega}_{c} + \big(\boldsymbol{\nabla}_{[a}\boldsymbol{T}^{n}_{bc]} - \boldsymbol{T}^{m}_{[ab}\,\boldsymbol{T}^{n}_{c]m}\big)\,\boldsymbol{\omega}_{n} \ .
\end{aligned}$$

Zde jsme opakovaně použili vztahy (7.12). Uvážíme-li, že $\mathbf{d}\,\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = 0$ a že forma $\boldsymbol{\omega}$ byla zvolena libovolně, je první Binachiho identita dokázána. ∎

DŮKAZ: (DRUHÁ BINACHIHO IDENTITA)
Chceme dokázat

$$\boldsymbol{\nabla}_{[a}\boldsymbol{R}_{bc]}{}^{k}{}_{l} = \boldsymbol{T}^{n}_{[ab}\boldsymbol{R}_{c]n}{}^{k}{}_{l} \ .$$

Užitím pravidla pro derivování součinu a vyjádření operátoru křivosti pomocí Riemannova tenzoru (7.13) dostáváme

$$\begin{aligned}
&\big(\boldsymbol{\nabla}_{a}\boldsymbol{R}_{bc}{}^{m}{}_{n}\big)\,\boldsymbol{a}^{n}\\
&\quad = \boldsymbol{\nabla}_{a}\big(\boldsymbol{R}_{bc}{}^{m}{}_{n}\,\boldsymbol{a}^{n}\big) - \boldsymbol{R}_{bc}{}^{m}{}_{n}\,\boldsymbol{\nabla}_{a}\boldsymbol{a}^{n}\\
&\quad = \boldsymbol{\nabla}_{a}\big(\mathsf{R}_{bc}\,\boldsymbol{a}^{m}\big) - \mathsf{R}_{bc}\,\boldsymbol{\nabla}_{a}\boldsymbol{a}^{m} - \boldsymbol{R}_{bc}{}^{n}{}_{a}\,\boldsymbol{\nabla}_{n}\boldsymbol{a}^{m}
\end{aligned}$$

Rozepíšeme-li nyní operátor křivosti podle věty V7.23, obdržíme

$$\begin{aligned}
&\big(\boldsymbol{\nabla}_{a}\boldsymbol{R}_{bc}{}^{m}{}_{n}\big)\,\boldsymbol{a}^{n}\\
&\quad = \ \boldsymbol{\nabla}_{a}\boldsymbol{\nabla}_{b}\boldsymbol{\nabla}_{c}\,\boldsymbol{a}^{m} - \boldsymbol{\nabla}_{a}\boldsymbol{\nabla}_{c}\boldsymbol{\nabla}_{b}\,\boldsymbol{a}^{m} + \boldsymbol{\nabla}_{a}\big(\boldsymbol{T}^{n}_{bc}\boldsymbol{\nabla}_{n}\,\boldsymbol{a}^{m}\big)\\
&\qquad - \boldsymbol{\nabla}_{b}\boldsymbol{\nabla}_{c}\boldsymbol{\nabla}_{a}\,\boldsymbol{a}^{m} + \boldsymbol{\nabla}_{c}\boldsymbol{\nabla}_{b}\boldsymbol{\nabla}_{a}\,\boldsymbol{a}^{m} - \boldsymbol{T}^{n}_{bc}\boldsymbol{\nabla}_{n}\boldsymbol{\nabla}_{a}\,\boldsymbol{a}^{m}\\
&\qquad - \boldsymbol{R}_{bc}{}^{n}{}_{a}\,\boldsymbol{\nabla}_{n}\boldsymbol{a}^{m}
\end{aligned}$$

Pokud tento výraz antisymetrizujeme v indexech $a,\ b,\ c$, členy $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{a}$ se vyruší. Dále užitím první Bianchiho identity eliminujeme člen s derivací torze a dostaneme:

$$\begin{aligned}
&\big(\boldsymbol{\nabla}_{[a}\boldsymbol{R}_{bc]}{}^{m}{}_{n}\big)\,\boldsymbol{a}^{n}\\
&\quad = \big(\boldsymbol{\nabla}_{[a}\boldsymbol{T}^{n}_{bc]}\big)\,\boldsymbol{\nabla}_{n}\,\boldsymbol{a}^{m} - \boldsymbol{R}_{[ab}{}^{n}{}_{c]}\,\boldsymbol{\nabla}_{n}\boldsymbol{a}^{m}\\
&\qquad\qquad + \boldsymbol{T}^{n}_{[ab}\boldsymbol{\nabla}_{c]}\boldsymbol{\nabla}_{n}\,\boldsymbol{a}^{m} - \boldsymbol{T}^{n}_{[ab}\boldsymbol{\nabla}_{|n|}\boldsymbol{\nabla}_{c]}\,\boldsymbol{a}^{m}\\
&\quad = \boldsymbol{T}^{n}_{[ab}\boldsymbol{\nabla}_{c]}\boldsymbol{\nabla}_{n}\,\boldsymbol{a}^{m} - \boldsymbol{T}^{n}_{[ab}\boldsymbol{\nabla}_{|n|}\boldsymbol{\nabla}_{c]}\,\boldsymbol{a}^{m} + \boldsymbol{T}^{n}_{[ab}\,\boldsymbol{T}^{k}_{c]n}\boldsymbol{\nabla}_{k}\,\boldsymbol{a}^{m}
\end{aligned}$$

Zpětným vyjádřením operátoru křivosti pomocí Riemannova tenzoru (např. Lemma V7.22) dostaneme dokazované tvrzení

$$\big(\boldsymbol{\nabla}_{[a}\boldsymbol{R}_{bc]}{}^{m}{}_{n}\big)\,\boldsymbol{a}^{n} = \boldsymbol{T}^{n}_{[ab}\,\boldsymbol{R}_{c]n}{}^{m}{}_{n}\,\boldsymbol{a}^{n}$$ ∎

Poznámka
Obě Bianchiho identity odpovídají v podstatě triviálním tvrzením (viz věta V8.4) zapsaným v řeči vnější kovariantní derivace, kterou zavedeme v příští kapitole. Zde se k Bianchiho identitám znovu vrátíme a za pomoci bohatšího aparátu je dokážeme mnohem rychleji.

V některých aplikacích hrají roli ty části Riemannova tenzoru, které lze dostat jeho zúžením. Jelikož se jedná o tenzor typu $(1,3)$, můžeme provést tři různá zúžení, díky antisymetrii (7.14) ale pouze dvě z nich jsou nezávislá. Definujeme

Definice D7.23 (Ricciho tenzor a stopa Riemannova tenzoru)
Nechť $\boldsymbol{R}_{ab}{}^{k}{}_{l}$ je Riemannův tenzor kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$. Pak *Ricciho tenzor křivosti* nazýváme tenzor $\mathbf{Ric}$ typu $(0,2)$

$$\mathbf{Ric}_{ab} = \boldsymbol{R}_{na}{}^{n}{}_{b}\ ,$$

a budeme psát $\mathbf{Ric} = \mathbf{Ricci}[\boldsymbol{\nabla}]$.
Pod *stopou Riemannova tenzoru* budeme rozumět antisymetrický tenzor $\mathbf{TrR}$ typu $(0,2)$

$$\mathbf{TrR}_{ab} = \boldsymbol{R}_{ab}{}^{n}{}_{n}\ . \qquad \circ$$

Poznámka
Tenzor $\mathbf{TrR}$ je typicky nulový a proto se v literatuře obvykle nedefinuje. My se k otázce nulovosti stopy Riemannova tenzoru vrátíme v kontextu derivací zachovávajících objemový element – viz větu V10.12 a marginálii M10.3 v kapitole 10.

Nyní můžeme zformulovat důsledky Bianchiho identit pro zúžení Riemanova tenzoru

Věta V7.29 (Zúžené Bianchiho identity)
Pro kovariantní derivaci $\boldsymbol{\nabla}$ s Ricciho tenzorem $\mathbf{Ric}$, stopou Riemanova tenzoru $\mathbf{TrR}$ a torzí $\boldsymbol{T}$ platí

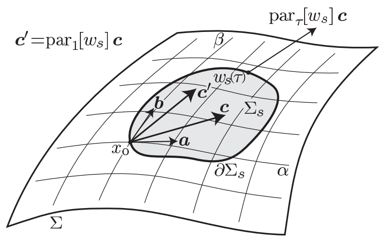
$$\begin{aligned} &2\mathbf{Ric}_{[ab]} + \mathbf{TrR}_{ab} = \mathbf{d}_a \boldsymbol{T}^{n}_{bn} + \boldsymbol{\nabla}_n \boldsymbol{T}^{n}_{ab}\ ,\\ &\mathbf{d}_a \mathbf{TrR}_{bc} = 0\ , \quad \text{tj.} \quad \boldsymbol{\nabla}_{[a} \mathbf{TrR}_{bc]} - \boldsymbol{T}^{n}_{[ab}\, \mathbf{TrR}_{c]n} = 0\ . \end{aligned}$$

Pro kovariantní derivaci bez torze dostáváme

$$\begin{aligned} &2\mathbf{Ric}_{[ab]} = -\mathbf{TrR}_{ab}\ ,\\ &\mathbf{d}_a \mathbf{TrR}_{bc} = 0\ , \quad \text{tj.} \quad \boldsymbol{\nabla}_{[a} \mathbf{TrR}_{bc]} = 0\ . \end{aligned} \qquad \square$$

Vidíme tedy, že stopa Riemannova tenzoru je uzavřená a lze ji alespoň lokálně napsat jako gradient nějaké 1-formy. V kapitole 10 si explicitně tuto 1-formu zkonstruujeme, viz věty V10.12 a V10.11. Ukáže se, že pokud příslušná kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$ zachovává nějaký objemový element, bude tato 1-forma uzavřená a $\mathbf{TrR}$ vymizí – viz marginálii M10.3. Je-li $\boldsymbol{\nabla}$ navíc bez torze, vidíme že Ricciho tenzor je pak symetrický.

7.A Geometrický význam křivosti



V marginálii M7.8 jsem uvedli, že odchylka vektoru paralelně přeneseného podél malé smyčky od původního vektoru je úměrná ploše smyčky s koeficientem daným Riemannovým tenzorem. V tomto dodatku toto tvrzení upřesníme a dokážeme.

Stejně jako v marginálii M7.8 zvolíme dvoudimenzionální plochu Σ parametrizovanou souřadnicemi α, β s počátkem v bodě x_o (tj. $\alpha(x_o) = \beta(x_o) = 0$). Označíme $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial}\alpha|_{x_o}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial}\beta|_{x_o}$. Nyní v této ploše chceme zvolit křivku 'lineárního rozměru řádu $\mathcal{O}(s)$'. Konkrétně, zvolíme sekvenci (očíslovanou parametrem s) křivek $w_s(\tau)$ s křivkovým parametrem $\tau \in \langle 0, 1\rangle$, které všechny začínají a končí v bodě x_o (tj. $w_s(0) = w_s(1) = x_o$). Tyto smyčky nazveme ***řádu*** $\mathcal{O}(s)$, pokud pro $s \to 0$ platí

$$\alpha(w_s) \sim \beta(w_s) \sim \mathcal{O}(s)\ , \quad \frac{d}{d\tau}\alpha(w_s) \sim \frac{d}{d\tau}\beta(w_s) \sim \mathcal{O}(s)\ . \tag{7.15}$$

Potom vektor $\boldsymbol{c}$ paralelně přenesený podél smyčky $w_s(\tau)$ z bodu x_o zpět do x_o je do řádu s^2 dán vztahem

$$\mathrm{par}_1[w_s]\, \boldsymbol{c^k} = \boldsymbol{c^k} - S\, \boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^{\boldsymbol{k}}{}_{\boldsymbol{l}}\, \boldsymbol{c^l} + \mathcal{O}(s^3)\ . \tag{7.16}$$

Zde je Riemannův tenzor vyčíslen v bodě x_o a S je obsah plošky $\Sigma_s \subset \Sigma$ ohraničené smyčkou w_s měřený v souřadnicích α, β:

$$S = \int_{\Sigma_s} d\alpha\, d\beta \ \sim\ \mathcal{O}(s^2)\ . \tag{7.17}$$

Pro 'obdélníkovou' křivku podél souřadnicových čar o rozměrech $\Delta\alpha$ a $\Delta\beta$ použitou v marginálii M7.8 samozřejmě dostaneme $S = \Delta\alpha\, \Delta\beta$.

Důkaz:
V okolí bodu x_o zvolíme souřadnice x^j přizpůsobené ploše Σ:

$$x^1 = \alpha\ , \quad x^2 = \beta\ , \quad x^j(\Sigma) = 0 \quad \text{pro } j = 3, 4, \dots \quad . \tag{7.18}$$

Souřadnice křivky $w_s(\tau)$ označíme $w_s^j(\tau)$ a souřadnice jejího tečného vektoru $\dot{w}_s^j(\tau)$. Zřejmě pouze komponenty $j = 1, 2$ jsou nenulové, a předpoklad, že křivka je řádu $\mathcal{O}(s)$, říká, že $w_s^j \sim \dot{w}_s^j \sim \mathcal{O}(s)$.

Pro zkrácení zápisu si operátor paralelního přenosu podél křivky w_s z bodu x_o do bodu $w_s(\tau)$ označíme $\boldsymbol{\Pi}_s(\tau)$:

$$\boldsymbol{\Pi}_s(\tau) = \mathrm{par}_\tau[w_s]\ . \tag{7.19}$$

Jedná se bi-tenzor – objekt z prostoru $\boldsymbol{T}^*_{x_o}M \otimes \boldsymbol{T}_{w_s(\tau)}M$. Vzhledem k souřadnému systému x^j bude reprezentován souřadnicemi $\Pi_s{}^k_l$ (pokud to nebude potřeba, nebudeme závislost na parametru τ explicitně psát). Počáteční podmínka dává $\boldsymbol{\Pi}_s(0) = \boldsymbol{\delta}$ a nás zejména zajímá koncová hodnota $\boldsymbol{\Pi}_s(1)$ odpovídající přenosu podél celé smyčky.

Podmínka paralelního přenosu říká $\frac{\boldsymbol{\nabla}}{d\tau}\boldsymbol{\Pi}_s = 0$. Pokud je kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$ vzhledem k systému x^j dána komponentami Γ^k_{jl}, dostáváme

$$\frac{d}{d\tau}\Pi_s{}^k_l + \dot{w}_s^n\, \Gamma^k_{nj}\big|_{w_s}\, \Pi_s{}^j_l = 0\ . \tag{7.20}$$

(Kovariantní derivování se zde týká pouze indexu k příslušejícímu vektoru v bodě $w_s(\tau)$. Index l odpovídá kovektoru v bodě x_o, který zůstává při derivování fixní.)

Nyní rozvineme složky kovariantní derivace v blízkosti bodu x_o

$$\Gamma^n_{kl} = \Gamma^n_{kl}\big|_{x_o} + \Gamma^n_{kl,j}\big|_{x_o} x^j + \mathcal{O}((x^j)^2) \,. \tag{7.21}$$

Druhý člen v rovnici (7.20) je řádu $\mathcal{O}(s)$ a proto bude výhodné hledat řešení $\Pi_s{}^k_l$ jako rozvoj v parametru s:

$$\Pi_s{}^k_l = \Pi_{(0)}{}^k_l + s\,\Pi_{(1)}{}^k_l + s^2\,\Pi_{(2)}{}^k_l + \mathcal{O}(s^3) \,. \tag{7.22}$$

Dosazením (7.21) a (7.22) do (7.20) v řádu $\mathcal{O}(s^0)$ obdržíme

$$\frac{d}{d\tau}\Pi_{(0)}{}^k_l = 0 \quad \Rightarrow \quad \Pi_{(0)}{}^k_l = \delta^k_l \,, \tag{7.23}$$

kde jsme uvážili počáteční podmínky $\Pi_s{}^k_l(0) = \delta^k_l$. Po dosazení zpět do (7.20) v řádu $\mathcal{O}(s)$ dostaneme

$$s\,\frac{d}{d\tau}\Pi_{(1)}{}^k_l = -\dot{w}^n_s\,\Gamma^k_{nl}\big|_{x_o} \quad \Rightarrow \quad s\,\Pi_{(1)}{}^k_l = -w^n_s\,\Gamma^k_{nl}\big|_{x_o} \,, \tag{7.24}$$

kde jsme užili triviálnost počátečních podmínek ve vyšších řádech, $\Pi_{(j)}{}^k_l(0) = 0$, $j = 1, 2, \ldots$. V dalším řádu rovnice (7.20) dává

$$s^2\,\frac{d}{d\tau}\Pi_{(2)}{}^k_l = -\dot{w}^m_s\,w^n_s\left(\Gamma^k_{ml,n}\big|_{x_o} - \Gamma^k_{mi}\big|_{x_o}\Gamma^i_{nl}\big|_{x_o}\right) . \tag{7.25}$$

Integrace podél celé smyčky vede na křivkový integrál, pro který lze použít vícedimenzionální analogii Stokesovy věty (viz větu V10.15 v kapitole 10):

$$\begin{aligned}
s^2\,\Pi_{(2)}{}^k_l\big|_{\tau=1} &= -\int_0^1 \dot{w}^m_s w^n_s\big(\Gamma^k_{ml,n} - \Gamma^k_{mi}\Gamma^i_{nl}\big)\big|_{x_o}\,d\tau \\
&= -\big(\Gamma^k_{ml,n} - \Gamma^k_{mi}\Gamma^i_{nl}\big)\big|_{x_o}\int_{\partial\Sigma_s} x^n\;\mathbf{d}x^m\big|_{\partial\Sigma_s} \\
&= -\big(\Gamma^k_{[m|l|,n]} + \Gamma^k_{[n|i|}\Gamma^i_{m]l}\big)\big|_{x_o}\int_{\Sigma_s} \mathbf{d}x^n \wedge \mathbf{d}x^m\big|_{\Sigma_s}
\end{aligned} \tag{7.26}$$

Podle lemmatu V7.27 je však výraz před integrálem dán složkami Riemannova tenzoru $-\frac{1}{2}R_{nm}{}^k{}_l$. Podintegrální výraz $\mathbf{d}x^n \wedge \mathbf{d}x^m\big|_{\Sigma_s}$ (případně $\mathbf{d}x^n\big|_{\partial\Sigma_s}$ v křivkovém integrálu) je restrikce 2-formy $\mathbf{d}x^n \wedge \mathbf{d}x^m$ na plochu Σ_s (respektive 1-formy $\mathbf{d}x^n$ na křivku $\partial\Sigma_s$). Restrikci 2-formy lze provést pomocí projektoru

$$\mathcal{A}\Big(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\alpha}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\beta}\Big)\;\mathbf{d}\alpha \wedge \mathbf{d}\beta \,, \tag{7.27}$$

přičemž v blízkosti x_o můžeme v nejvyšším řádu aproximovat $\frac{\boldsymbol{\partial}^n}{\boldsymbol{\partial}\alpha} \approx a^n$ a $\frac{\boldsymbol{\partial}^m}{\boldsymbol{\partial}\beta} \approx b^m$. Tzn.

$$\mathbf{d}x^n \wedge \mathbf{d}x^m\big|_{\Sigma_s} \approx 2a^{[n}b^{m]}\,\mathbf{d}\alpha \wedge \mathbf{d}\beta \,. \tag{7.28}$$

Dostáváme tak

$$s^2\,\Pi_{(2)}{}^k_l\big|_{\tau=1} = -R_{nm}{}^k{}_l\big|_{x_o} a^n b^m \int_{\Sigma_s} \mathbf{d}\alpha \wedge \mathbf{d}\beta \tag{7.29}$$

Dosazením vztahů pro $\Pi_{(0)}{}^k_l$, $\Pi_{(1)}{}^k_l$ a $\Pi_{(2)}{}^k_l$ do rozvoje (7.22) (přičemž díky $w_s(1) = x_o$ je $s\,\Pi_{(1)}{}^k_l\big|_{\tau=1} = 0$), dostáváme

$$\Pi_s{}^k_l\big|_{\tau=1} = \delta^k_l - S\,a^m b^n\,R_{mn}{}^k{}_l\big|_{x_o} + \mathcal{O}(s^3) \,, \tag{7.30}$$

kde $S = \int_{\Sigma_s} d\alpha\, d\beta$. Přejdeme-li od souřadnic zpět k tenzorovým veličinám, můžeme psát

$$\boldsymbol{\Pi}_s(1) = \boldsymbol{\delta} - S\,\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \mathcal{O}(s^3) \,, \tag{7.31}$$

Tím jsme tvrzení (7.16) dokázali. ∎