Kapitola 8

Kovariantní vnější derivace

V této sekci zobecníme vnější kalkulus z kapitoly 4 – operaci vnějšího součinu a vnější derivace – na obecnější tenzorové objekty. Tento materiál je poměrně pokročilý a je možné ho vynechat. V dalším textu se sice na zde zavedené operace budeme odvolávat, vždy ale jen jako na alternativní způsob zápisu vět a výrazů, které primárně zapíšeme jinak.

Užití kovariantní vnější derivace může zkrátit leckteré výrazy v riemanovské geometrii, její hlavní uplatnění je však až v kontextu vektorových bundlů. V tomto kontextu je zavedení kovariantní vnější derivace velmi přirozené a přímočaré. Zavedení kovariantní vnější derivace na tečných prostorech je pouze aplikace obecného konceptu ve speciální situaci, kdy vektorovým bundlem je tenzorový prostor $\boldsymbol{T}^k_l M$. V tento okamžik však nemáme ještě vybudovánu teorii fibrovaných prostorů a proto se zaměříme pouze na tečné kovariantní vnější derivace.

8.1 Tenzor-značné antisymetrické formy

Naším cílem je rozšířit vnější kalkulus definovaný pro antisymetrické formy, tj. pro antisymetrické tenzory typu $\boldsymbol{\Lambda}^p M = \boldsymbol{T}^0_{[p]} M$, na tenzory, které vedle antisymetrických indexů mají ještě další tenzorovou strukturu. Budeme tedy mluvit o tenzor-značných antisymetrických formách typu (k,l) stupně p – tenzorech z prostoru $\boldsymbol{\Lambda}^p \otimes \boldsymbol{T}^k_l M$, tj. tenzorech typu $(k, l+p)$, které mají p antisymetrických kovariantních indexů. Jinak řečeno, budeme užívat antisymetrické p-formy, které mají navíc k kontravariantních a l kovariantních indexů. Pro tyto tenzor-značné p-formy zavedeme vnější součin a vnější derivaci účinkující na antisymetrické indexy a 'ignorující' dodatečnou tenzorovou strukturu.

Navržená koncepce je jasná, nese s sebou však problémy s označením. Používané objekty mohou být poměrně složité a může dojít k nejasnostem, které tenzorové indexy odpovídaji antisymetrické formě a které dodatečné tenzorové struktuře. Například tenzor $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_p}$ může být chápán jako p-forma z $\boldsymbol{\Lambda}^p M$ či $(0,1)$ značná $(p-1)$-forma z prostoru $\boldsymbol{\Lambda}^{p-1} \otimes \boldsymbol{T}^0_1 M$. Abychom byli schopni tyto interpretace odlišit, zavedeme označení:

Definice D8.1 (Tenzor-značné antisymetrické formy)
Antisymetrickou tenzor-značnou formou typu (k,l) *stupně* p nazýváme tenzor z prostoru $\boldsymbol{T}^{k}_{l+p}M$, který je antisymetrický v p kovariantních indexech. Tyto indexy budeme nazývat *formové*. Rozdělení na p formových indexů a zbývající k a l indexů budeme indikovat následovně:

$$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\dots\boldsymbol{n}_p}{}^{a_1\dots a_k}{}_{a_1\dots a_l}\ .$$

Alternativně, pokud nebude hrozit nedorozumění a struktura dodatečných indexů bude jasná z kontextu, budeme dodatečné indexy zcela vynechávat:

$$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\dots\boldsymbol{n}_p}\ . \qquad\circ$$

Poznámka
Jak již bylo řečeno, jeden a týž tenzor může být chápán různě. Například tenzor $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{abc}} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}}_{[\boldsymbol{abc}]}$ lze chápat jako vektor-značnou 3-formu $\boldsymbol{A}^{n}_{\boldsymbol{abc}}$ nebo jako tenzor-značnou 2-formu typu $(1,1)$ – nabízejí se hned tři možnosti $\boldsymbol{A}^{n}_{\boldsymbol{ab}c}$ nebo $\boldsymbol{A}^{n}_{\boldsymbol{a}b\boldsymbol{c}}$ nebo $\boldsymbol{A}^{n}_{a\boldsymbol{bc}}$. Další možnost je 1-forma typu $(1,2)$ (např. $\boldsymbol{A}^{n}_{\boldsymbol{a}bc}$) a konečně $\boldsymbol{A}^{n}_{abc}$ – 0-forma typu $(1,3)$.

Tenzor-značné formy typu (k,l) můžeme chápat jako antisymetrické formy, jejichž souřadnice jsou tenzory typu (k,l). Obdobně k rovnice (4.6) můžeme psát

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}{}^{b\dots}{}_{c\dots} &= \boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p}{}^{b\dots}{}_{c\dots}\ \boldsymbol{e}^{n_1}_{\boldsymbol{a}_1}\cdots\boldsymbol{e}^{n_p}_{\boldsymbol{a}_p}\\ &= \sum_{1\le n_1<\dots<n_p\le d}\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p}{}^{b\dots}{}_{c\dots}\ \boldsymbol{e}^{n_1}_{\boldsymbol{a}_1}\wedge\dots\wedge\boldsymbol{e}^{n_p}_{\boldsymbol{a}_p}\ ,\end{aligned}\tag{8.1}$$

kde $\{\boldsymbol{e}^j\}$ je báze v kotečném prostoru $\boldsymbol{T}^0_1M$.

Rozlišení na formové a dodatečné tenzorové indexy nemění význam samotného tenzoru. Jedná se pořád o tentýž tenzor. Rozlišení na dva typy indexů však může ovlivnit operace, které s daným tenzorem budeme provádět. Na tenzor-značné formy nyní totiž zobecníme běžné operace s antisymetrickými tenzory s tím, že tyto operace budou 'ignorovat' dodatečné indexy – budou pracovat pouze s indexy formovými. Rozlišením indexů na dvě skupiny můžeme tedy ovlivnit, jak se tenzor 'účastní' různých operací.

První takovou operací je vnější součin. Vnější součin se na tenzor-značných antisymetrických formách definuje přesně stejně jako v kapitole 4 s tím, že tento součin bude ignorovat dodatečnou tenzorovou strukturu.

Definice D8.2 (Vnější násobení)
Nechť $\boldsymbol{\omega}^j\in\boldsymbol{\Lambda}^{p_j}\otimes\boldsymbol{T}^{k_j}_{l_j}M$, $j=1,\dots,n$, jsou tenzor-značné antisymetrické formy stupnů p_j typu (k_j,l_j). Vnější součin $\boldsymbol{\omega}^1\wedge\boldsymbol{\omega}^2\wedge\dots\wedge\boldsymbol{\omega}^n$ těchto forem je tenzor-značná antisymetrická forma $\boldsymbol{\omega}$ stupně $p=p_1+\dots+p_n$ typu $(k,l)=(k_1+\dots+k_n, l_1+\dots+l_n)$ daná antisymetrizací tenzorového součinu forem $\boldsymbol{\omega}^j$ ve formových indexech.

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}^1\wedge\dots\wedge\boldsymbol{\omega}^n=\frac{p\,!}{p_1!\cdots p_n!}\ \mathcal{A}(\boldsymbol{\omega}^1\cdots\boldsymbol{\omega}^n)\ .$$

Přesněji, pomocí indexů má definice tvar

$$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}{}^{b_1\dots b_l}{}_{c_1\dots c_k}=\frac{p\,!}{p_1!\cdots p_n!}\ \boldsymbol{\omega}^1{}_{[\boldsymbol{a}_1\dots|}{}^{b_1\dots}{}_{c_1\dots|}\cdots\boldsymbol{\omega}^n{}_{\dots\boldsymbol{a}_p]}{}^{\dots b_l}{}_{\dots c_k}\ .\qquad\circ$$

8.2 Kovariantní vnější derivace

Vnější kalkulus pro antisymetrické formy má velký význam zejména proto, že vnější derivaci $\mathbf{d}$ můžeme zavést i bez znalosti kovariantní derivace či jiné dodatečné struktury. Toto již není pravda pro vnější kalkulus s tenzor-značnými antisymetrickými formami. V tomto případě lze zavést vnější derivaci pouze s pomocí silnější struktury, která určí, jak zacházet s dodatečnými tenzorovými indexy. Touto silnější strukturou je kovariantní derivace. Zavedeme tedy tzv. *kovariantní vnější derivaci*, která na formových indexech funguje jako obyčejná vnější derivace a na dodatečných indexech jako derivace kovariantní.

Definice D8.3 (Kovariantní vnější derivace)

Kovariantní vnější derivace ${}^{\nabla}\mathbf{d}$ (asociovaná s kovariantní derivací $\boldsymbol{\nabla}$) je zobrazení z prostoru antisymetrických tenzor-značných p-forem do prostoru tenzor-značných $(p+1)$-forem stejného typu splňující následující vlastnosti:

$$
\begin{aligned}
&{}^{\nabla}\mathbf{d} \,:\, \mathrm{Sect}\big(\boldsymbol{\Lambda}^p \otimes \boldsymbol{T}^k_l M\big) \to \mathrm{Sect}\big(\boldsymbol{\Lambda}^{p+1} \otimes \boldsymbol{T}^k_l M\big)\,, \\
&{}^{\nabla}\mathbf{d}(\boldsymbol{\alpha} + r\,\boldsymbol{\beta}) = {}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha} + r\,{}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{\beta}\,, \qquad r \in \mathbb{R}\,, && \text{(i)}\\
&{}^{\nabla}\mathbf{d}(\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}) = {}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta} + (-1)^p\,\boldsymbol{\alpha}\wedge{}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{\beta}\,, && \text{(ii)}\\
&{}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} \qquad \text{pro}\quad \boldsymbol{\sigma}\in\mathcal{A}^p M\,,\quad \text{tj. } k,l=0\,, && \text{(iii)}\\
&{}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A} \qquad \text{pro}\quad \boldsymbol{A}\in\mathfrak{T}^k_l M\,,\quad \text{tj. } p=0\,. && \text{(iv)}
\end{aligned}
$$

pro $\boldsymbol{\omega}\in\mathcal{A}^p M$ a $\boldsymbol{\sigma}\in\mathcal{A}^q M$.

Při použití tenzorových indexů budeme výsledek vnějšího derivování zapisovat ${}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_0}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}{}^{b_1\dots b_k}_{c_1\dots c_l}$. Jeho složky budeme označovat ${}^{\nabla}\mathrm{d}_{a_0}\omega_{a_1\dots a_p}{}^{b_1\dots b_k}_{c_1\dots c_l}$. ∘

Tato definice určuje již vnější derivaci jednoznačně. Vskutku, užijeme-li rozpis do souřadnic (8.1), definice D8.3 dává

$$
\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = \sum_{n_1<\dots<n_p} \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p} \wedge \mathbf{d}x^{n_1}\wedge\dots\wedge\mathbf{d}x^{n_p}\,, \tag{8.2}
$$

případně s tenzorovými indexy

$$
\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_0}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}{}^{b\dots}_{c\dots} = \sum_{n_1<\dots<n_p} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}_0}\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p}{}^{b\dots}_{c\dots}\wedge\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_1}x^{n_1}\wedge\dots\wedge\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_p}x^{n_p}. \tag{8.3}
$$

Zde $n_1,\dots,n_p$ jsou souřadnicové indexy. Objekty $\boldsymbol{\omega}_{n_1\dots n_p}{}^{b\dots}_{c\dots}$ však nejsou skalární funkce (jak tomu je u komponent antisymetrické formy), ale tensory typu (k,l) – zbývají jim neformové abstraktní indexy $a, b, \dots$.

Analogicky výrazům z předchozí kapitoly můžeme vyjádřit kovariantní vnější derivaci čistě pomocí příslušné kovariantní derivace. Tentokrát uvedeme vztah v plné obecnosti – pro kovariantní derivaci s obecně nenulovou torzí (srovnej s marginálií M7.7).

Věta V8.1 (${}^{\nabla}\mathbf{d}$ pomocí $\boldsymbol{\nabla}$)

Nechť $\boldsymbol{\nabla}$ je libovolná kovariantní derivace s torzí $\boldsymbol{T}$. Pak kovariantní vnější derivace p-formy $\boldsymbol{\omega}$ typu (k,l) lze vyjádřit pomocí $\boldsymbol{\nabla}$ následovně:

$$
\begin{aligned}
{}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_0}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}{}^{b\dots}_{c\dots} &= \\
&= \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}_0}\wedge\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}{}^{b\dots}_{c\dots} + \boldsymbol{T}^{n}_{\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{a}_1}\wedge\boldsymbol{\omega}_{n\boldsymbol{a}_3\dots\boldsymbol{a}_p}{}^{b\dots}_{c\dots}\\
&= (p+1)\,\boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{a}_0}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p]}{}^{\boldsymbol{b}\dots}_{\boldsymbol{c}\dots} + \binom{p+1}{2}\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{[\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{a}_1}\boldsymbol{\omega}_{|\boldsymbol{n}|\boldsymbol{a}_3\dots\boldsymbol{a}_p]}{}^{\boldsymbol{b}\dots}_{\boldsymbol{c}\dots}
\end{aligned}
$$

M8.1 Vnější kalkulus na n-ádových složkách

Vnější kalkulus zobecněný na tenzor-značné formy se často používá v n-ádovém formalismu. V případě, že máme na varietě v každém bodě zvolenou n-ádu $\{\boldsymbol{e}_j\}$ a k ní duální bázi $\{\boldsymbol{e}^j\}$, můžeme zobecnit vnější kalkulus na tenzor-značné formy jednodušším způsobem. Dodatečných tenzorových indexů se zbavíme tak, že je vyjádříme vzhledem ke zvolené n-ádě, tj. že budeme počítat s n-ádovými složkami. Místo p-formy $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}{}^{b\dots}_{c\dots}$ typu (k,l) pak budeme mít soubor antisymetrických p-forem $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}{}^{b\dots}_{c\dots}$ číslovaných indexy $b,c=1,\dots,n$. Jelikož se jedná již o obyčejné antisymetrické formy, můžeme na ně aplikovat běžné operace vnějšího kalkulu. Samozřejmě, při změně n-ády se tetrádové složky mění a budou se měnit i naše antisymetrické formy $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}{}^{b\dots}_{c\dots}$.
Takto zobecněný vnější kalkulus na tenzor-značné formy však je jen speciální případ našeho obecného přístupu. Je zřejmé, že u vnějšího součinu je cesta přes zavedení n-ádových složek jen jiný způsob jak říci, že vnější součin ‘ignoruje’ dodatečné tenzorové indexy. Problematická operace je vnější derivace. V našem formalismu odpovídá vnější derivování tetrádových složek speciální volbě kovariantní vnější derivace. Stačí zvolit kovariantní vnější derivaci ${}^{\mathfrak{d}}\mathbf{d}$ asociovanou s n-ádovou vnější derivací $\boldsymbol{\mathfrak{d}}$. Jelikož $\boldsymbol{\mathfrak{d}}$ anihiluje n-ádové vektory, působí ${}^{\mathfrak{d}}\mathbf{d}$ právě jen na n-ádové složky. Neboli, vnější derivace n-ádových složek je rovna n-ádovým složkám kovariantní vnější derivace $\boldsymbol{\mathfrak{d}}$:

$$
\begin{aligned}
&{}^{\mathfrak{d}}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_0}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}{}^{b\dots}_{c\dots}\\
&\qquad = \big(\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}_0}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}{}^{r\dots}_{s\dots}\big)\, \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{b}}_r\cdots\boldsymbol{e}^{s}_{\boldsymbol{c}}\cdots\,.
\end{aligned}
$$

(Složky $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}{}^{r\dots}_{s\dots}$ jsou zde samozřejmě vyjádřeny vzhledem k bázi $\boldsymbol{e}_j$.)
Speciálně, jelikož n-ádová složka v horním indexu jednotkového tenzoru je přímo 1-forma báze, $\boldsymbol{\delta}^j_{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{e}^j{}_{\boldsymbol{a}}$, vztah pro torzi z lemmatu V8.2 vede na vztah (ii) lemmatu V7.11

$$
\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{ab}} = {}^{\mathfrak{d}}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\delta}^{n}_{\boldsymbol{b}} = \big(\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{e}^{j}{}_{\boldsymbol{b}}\big)\,\boldsymbol{e}_j^{\boldsymbol{n}}\,.
$$

$$= \sum_{0\le k\le p} (-1)^k \nabla_{a_k} \omega_{\underbrace{a_1\dots a_p}_{\text{mimo } a_k}}{}^{b\dots}_{c\dots}$$
$$+ \sum_{0\le k<l\le p} (-1)^{k+l+1} T^{n}_{a_k a_l} \omega_{n\underbrace{a_1\dots a_p}_{\text{mimo } a_k,\, a_l}}{}^{b\dots}_{c\dots} .$$

□

Speciálně, pro $p = 0, 1, 2$ dostáváme vztahy analogické rovnici (7.12).

$$\begin{aligned}
{}^{\nabla}\mathrm{d}_a A^{r\dots}_{s\dots} &= \nabla_a A^{r\dots}_{s\dots} ,\\
{}^{\nabla}\mathrm{d}_a \gamma_{b}{}^{r\dots}_{s\dots} &= \nabla_a \gamma_{bs\dots}^{r\dots} - \nabla_b \gamma_{as\dots}^{r\dots} + T^{n}_{ab}\, \gamma_{ns\dots}^{r\dots} ,\\
{}^{\nabla}\mathrm{d}_a \sigma_{bc}{}^{r\dots}_{s\dots} &= \nabla_a\, \sigma_{bc\,s\dots}^{\;\;r\dots} + \nabla_b\, \sigma_{ca\,s\dots}^{\;\;r\dots} + \nabla_c\, \sigma_{ab\,s\dots}^{\;\;r\dots}\\
&\quad + T^{n}_{bc}\, \sigma_{na\,s\dots}^{\;\;r\dots} + T^{n}_{ca}\, \sigma_{nb\,s\dots}^{\;\;r\dots} + T^{n}_{ab}\, \sigma_{nc\,s\dots}^{\;\;r\dots} .
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Lehce nahlédneme, že pro kovariantní derivaci bez torze je kovariantní vnější derivace (až na numerický faktor) antisymetrizací kovariantní derivace ve formových indexech

$$\begin{aligned}
{}^{\nabla}\mathrm{d}\omega &= \nabla \wedge \omega , \quad \text{tj.}\\
{}^{\nabla}\mathrm{d}_{a_0} \omega_{a_1\dots a_p}{}^{b\dots}_{c\dots} &= (p+1)\, \nabla_{[a_0} \omega_{a_1\dots a_p]}{}^{b\dots}_{c\dots}\\
&= \sum_{0\le k\le p} (-1)^k\, \nabla_{a_k} \omega_{\underbrace{a_1\dots a_p}_{\text{mimo } a_k}}{}^{b\dots}_{c\dots} .
\end{aligned} \tag{8.5}$$

Pomocí kovariantní vnější derivace můžeme napsat explicitní vzorec pro torzi příslušné kovariantní derivace. Aplikací druhého vztahu z (8.4) na jednotkový tenzor chápaný jako 1-forma typu $(1, 0)$ dostaneme

Lemma V8.2 (Torze pomocí ${}^{\nabla}\mathrm{d}$)

$$T^{n}_{bc} = {}^{\nabla}\mathrm{d}_a \delta^n_b ,$$

kde T je torze kovariantní derivace ∇. □

8.3 Operátor křivosti a Bianchiho identity

Při porovnání definic obyčejné vnější derivace D4.3 a kovariantní vnější derivace D8.3 vidíme, že pro kovariantní vnější derivaci nemáme analogii vztahu $\mathrm{d}\,\mathrm{d}\omega = 0$. Vskutku, druhá kovariantní vnější derivace není obecně nulová. Přesto však pro ní platí speciální vztah. Ukazuje se, že ${}^{\nabla}\mathrm{d}{}^{\nabla}\mathrm{d}A$ sice není nulové, ale chová se ultralokálně, tj. lze reprezentovat tenzorově.

Věta V8.3 (Druhá kovariantní vnější derivace)
Mějme kovariantní derivaci ∇ s Riemannovým tenzorem R a s ní asociovanou kovariantní vnější derivaci ${}^{\nabla}\mathrm{d}$. Pak působení druhé kovariantní derivace na tenzorové pole A chápané jako tenzor-značná 0-forma je dáno operátorem křivosti R_{ab}, tj. jde o pseudoderivaci charakterizovanou Riemannovým tenzorem:

$${}^{\nabla}\mathrm{d}_a {}^{\nabla}\mathrm{d}_b\, A^{k\dots}_{l\dots} = \mathsf{R}_{ab} A^{k\dots}_{l\dots} .$$

Obecněji, působení na tenzor-značnou p-formu ω lze zapsat

$${}^{\nabla}\mathrm{d}_a {}^{\nabla}\mathrm{d}_b\, \omega_{c\dots}{}^{k\dots}_{l\dots} = \mathsf{R}_{ab} \wedge \omega_{c\dots}{}^{k\dots}_{l\dots} , \qquad \text{tj.} \qquad {}^{\nabla}\mathrm{d}{}^{\nabla}\mathrm{d} = \mathsf{R}\wedge .$$

M8.2 Křivost pomocí vnější derivace
Výraz z věty V7.26 lze zapsat pomocí vnější kovariantní derivace následovně:

$$\tilde{R}_{ab}{}^{k}{}_{l} = R_{ab}{}^{k}{}_{l} + {}^{\nabla}\mathrm{d}_a \Gamma^{k}_{b\,l} + \Gamma^{k}_{an} \wedge \Gamma^{n}_{b\,l} .$$

Zvolíme-li za jednu z derivací souřadnicovou derivaci ∂, dostaneme (viz lemma V7.27)

$$R_{ab}{}^{k}{}_{l} = {}^{\partial}\mathrm{d}_a \Gamma^{k}_{b\,l} + \Gamma^{k}_{an} \wedge \Gamma^{n}_{b\,l} ,$$

kde rozdílový tenzor Γ^{k}_{an} hraje roli tenzor-značné 1-formy potenciálu. Zápis v tomto tvaru je obvyklý zejména v analogických výrazech pro křivost kovariantních derivací na vektorových bundlech.

Zde pod $\mathsf{R}_{\boldsymbol{ab}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{c}\ldots}{}^{k\ldots}_{l}$ chápeme operaci, která se chová jako vnější násobení ve formových indexech $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots$ a jako operátor křivosti v dodatečných tenzorových indexech $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}, \ldots$. □

DŮKAZ:
Začněme druhou vnější derivací tenzorového pole $\boldsymbol{A}$. Pomocí vztahů 8.4 můžeme postupně psát

$$\begin{aligned} {}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}}{}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{A}^{k\ldots}_{l\ldots} &= {}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{A}^{k\ldots}_{l\ldots} \\ &= \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}\ldots}_{\boldsymbol{l}\ldots} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}\ldots}_{\boldsymbol{l}\ldots} + \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{ab}} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}\ldots}_{\boldsymbol{l}\ldots}\ , \end{aligned} \tag{*}$$

což je podle věty V7.23 přesně akce operátoru křivosti $\mathsf{R}_{\boldsymbol{ab}} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}\ldots}_{\boldsymbol{l}\ldots}$.

Obecnou tenzor-značnou p-formu $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}\ldots}{}^{k}_{l}$ můžeme vždy napsat jako součet členů v součinovém tvaru $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{a}\ldots}\, \boldsymbol{A}^{k}_{l}$. Druhá vnější derivace takových členů lze upravit

$$\begin{aligned} {}^{\nabla}\mathbf{d}{}^{\nabla}\mathbf{d}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}) &= {}^{\nabla}\mathbf{d}\Big(\boldsymbol{A}(\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}) + ({}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{A}) \wedge \boldsymbol{\alpha}\Big) \\ &= \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A} \wedge \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{A}\, \mathbf{dd}\boldsymbol{\alpha} + \big({}^{\nabla}\mathbf{d}{}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{A}\big) \wedge \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A} \wedge \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha} \\ &= \big({}^{\nabla}\mathbf{d}{}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{A}\big) \wedge \boldsymbol{\alpha} = \mathsf{R} \wedge \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\ . \end{aligned} \tag{8.6}$$

Zde jsme užili všech vlastností kovariantní vnější derivace z definice D8.3, identity $\mathbf{d}\,\mathbf{d} = 0$ a právě dokázaného vztahu (*). Platnost ${}^{\nabla}\mathbf{d}{}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = \mathsf{R} \wedge \boldsymbol{\omega}$ pro obecnou formu $\boldsymbol{\omega}$ pak plyne z linearity. ■

V řeči kovariantní vnější derivace mají pak Bianchiho identity tvar

Věta V8.4 (Bianchiho identity pomocí vnější derivace)
Bianchiho identity z věty V7.28 lze zapsat následovně:

$$\mathsf{R}_{\boldsymbol{ab}} \wedge \boldsymbol{\delta}^{n}_{\boldsymbol{c}} = {}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{bc}}\ , \tag{Bianchi 1}$$

$${}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \mathsf{R}_{\boldsymbol{bc}} = 0\ . \tag{Bianchi 2}$$

□

V první identitě operátor křivosti R (definice D7.22) působí pouze na index $\boldsymbol{n}$. Toto působení je podle (7.13) dáno přímo Riemannovým tenzorem. Výraz na levé straně je tak v podstatě Riemannův tenzor s operací $\wedge$ mezi prvními dvěma a třetím spodním indexem. To však nelze rozumně zapsat pomocí znaménka $\wedge$ a pokud bychom chtěli přepsat levou stranu explicitně pomocí Riemannova tenzoru $\boldsymbol{R}$, museli bychom si pomoci antisymetrizací podle definice D4.2:

$$\mathsf{R}_{\boldsymbol{ab}} \wedge \boldsymbol{\delta}^{n}_{\boldsymbol{c}} = 3\boldsymbol{R}_{[\boldsymbol{ab}}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{c}]}\ . \tag{8.7}$$

V druhé Bianchiho identitě nesmíme zapomenout, že operátor křivosti R je pseudoderivace, která působí doprava na libovolné tenzorové pole (věta V7.23). Výrazu ${}^{\nabla}\mathbf{d}\mathsf{R}$ z Bianchiho identity je nutno rozumět tak, že vnější derivace v něm působí pouze na R, tj. pouze na Riemanův tenzor $\boldsymbol{R}$, ze kterého lze R 'poskládat'. Mohli bychom psát ${}^{\nabla}\mathbf{d}\mathsf{R} = \mathbf{tens}[{}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{R}]$. Identita ${}^{\nabla}\mathbf{d}\mathsf{R} = 0$ je tedy ekvivalentní identitě přímo pro Riemanův tenzor

$${}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{bc}}{}^{k}{}_{l} = 0\ . \tag{8.8}$$

Vidíme, že díky druhé Bianchiho identitě se operátor křivosti R chová vůči kovariantnímu vnějšímu derivování jako konstanta:

$$\begin{aligned} {}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}}\big(\mathsf{R}_{\boldsymbol{bc}}\, \boldsymbol{A}^{k\ldots}_{l\ldots}\big) &= \mathsf{R}_{\boldsymbol{bc}} \wedge {}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{A}^{k\ldots}_{l\ldots}\ , \\ {}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}}\big(\mathsf{R}_{\boldsymbol{bc}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{c}\ldots}{}^{k\ldots}_{l\ldots}\big) &= \mathsf{R}_{\boldsymbol{bc}} \wedge {}^{\nabla}\mathbf{d}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{c}\ldots}{}^{k\ldots}_{l\ldots}\ . \end{aligned} \tag{8.9}$$

Upozorněme však znovu (viz větu V8.3), že zde R působí na ${}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{A}$ také jako pseudoderivace a to v neformových indexech; naopak, operace $\wedge$ bere v úvahu pouze formové indexy.

DŮKAZ: (VĚTA V8.4)
První Binachiho identita vyplývá z rovnosti rozpisů druhé vnější derivace jednotkového tenzoru ${}^{\nabla}\mathbf{d}_{a}{}^{\nabla}\mathbf{d}_{b}\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{c}}^{n}$ pomocí lemmatu V8.2 a pomocí věty V8.3.

Druhá Binachiho identita plyne z 'asociativity' vnějšího derivování. Třetí derivace libovolné tenzor-značné formy $\boldsymbol{\omega}$ lze totiž rozepsat podle věty V8.3 při použití různého ozávorkování dvěma způsoby

$$ {}^{\nabla}\mathbf{d}\big({}^{\nabla}\mathbf{d}{}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\big) = {}^{\nabla}\mathbf{d}\big(\mathsf{R}\wedge\boldsymbol{\omega}\big) = \big({}^{\nabla}\mathbf{d}\mathsf{R}\big)\wedge\boldsymbol{\omega} + \mathsf{R}\wedge\big({}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\big) $$

a

$$ {}^{\nabla}\mathbf{d}{}^{\nabla}\mathbf{d}\big({}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\big) = \mathsf{R}\wedge\big({}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\big)\;. $$

Odtud okamžitě dostáváme ${}^{\nabla}\mathbf{d}\mathsf{R} = 0$. ■

Nyní ukážeme, že Bianchiho identity ve tvaru věty V8.4 jsou ekvivalentní jejich standardní tenzorové reprezentaci z věty V7.28.

DŮKAZ: (VĚTA V7.28)
Rovnice (8.7) ukazuje, že levá strana obou prvních Bianchiho identit je až na triviální faktor stejná. Výraz ${}^{\nabla}\mathbf{d}\boldsymbol{T}$ na pravé straně lze rozepsat pomocí věty V8.1

$$ {}^{\nabla}\mathbf{d}_{a}\boldsymbol{T}_{bc}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\nabla}_{a}\wedge\boldsymbol{T}_{bc}^{n} + \boldsymbol{T}_{ab}^{k}\wedge\boldsymbol{T}_{kc}^{n}\;. $$

Nahrazením vnějšího násobení antisymetrizací a užitím antisymetrie torze dostaneme pravou stranu první Bianchiho identity věty V7.28.

Již jsme řekli, že ${}^{\nabla}\mathbf{d}\mathsf{R} = 0$ je ekvivalentní výrazu (8.8). Pokud vyjádříme vnější derivaci pomocí kovariantní derivace (věta V8.1), dostaneme

$$ 0 = {}^{\nabla}\mathbf{d}_{a}\boldsymbol{R}_{bc}{}^{k}{}_{l} = \boldsymbol{\nabla}_{a}\wedge\boldsymbol{R}_{bc}{}^{k}{}_{l} + \boldsymbol{T}_{ab}^{n}\wedge\boldsymbol{R}_{nc}{}^{k}{}_{l} $$

Opět nahrazením vnějšího násobení antisymetrizací násobení tenzorového a užitím antisymetrie Riemannova tenzoru v prvních dvou indexech dostaneme pravou stranu původního tvaru druhé Bianchiho identity. ■