Kapitola 6

Metrika

Jedna z nejdůležitějších a nejbohatších geometrických struktur je *metrická struktura* – schopnost v prostoru proměřovat délky, plochy, objemy, případně úhly. Metrická struktura naplňuje v nejširší možné míře význam slova *geometrie*. Pomocí měření délek lze zachytit všechny lokální geometrické vlastnosti prostoročasu. Z tohoto důvodu hrají prostory s metrickou strukturou klíčovou roli jak v geometrii, tak i ve fyzice.

6.1 Metrika

Měření délky křivek, velikosti ploch a objemů, úhlů a dalších veličin lze převést na proměřování elementárních délek, které lze charakterizovat pomocí tzv. metrického tenzoru. Metrická struktura tak lze zachytit a popsat pomocí lokální tenzorové veličiny.

Definice D6.1 (Metrika)

Metrickým tenzorem či krátce *metrikou* v bodě $x \in M$ budeme rozumět symetrický nedegenerovaný tenzor typu $(0,2)$. Tj., $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{T}_x{}^0_2 M$ je metrika, pokud

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{g_{mn}} = \boldsymbol{g_{nm}}\,, && \text{(symetrie)}\\
&\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{T}_x M,\ \boldsymbol{a} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{g_{mn}} \boldsymbol{a^n} \neq 0\,. && \text{(nedegenerovanost)}
\end{aligned}
$$

Metrikou na varietě M je míněno pole z $\mathfrak{T}^0_2 M$, které je v každém bodě metrikou.

Symetrický nedegenerovaný tenzor $\boldsymbol{g}^{-1}$ typu $(2,0)$ splňující

$$\boldsymbol{g}^{-1\,\boldsymbol{an}} \boldsymbol{g_{nb}} = \boldsymbol{\delta^a_b}$$

se nazývá *inverzní metrikou*. ◦

Poznámka

Pokud není splněna podmínka nedegenerovanosti, mluvíme někdy o *degenerované metrice*.

Geometrický význam metriky spočívá v tom, že definuje *skalární součin* dvou vektorů – viz definici D6.4 níže. Pomocí vektorů však můžeme charakterizovat elementární úsečky či oblouky: např. malý úsek parametrizované křivky $z(\tau)$ mezi hodnotami parametru τ_o a $\tau_o + d\tau$ je určen vektorem $\frac{\boldsymbol{D}z}{d\tau} d\tau$. Metrika nám umožní změřit délku těchto malých úseků a jejich integrací délku konečné křivky – viz definici D6.12 níže.

Poznamenejme však nejdříve, že v definici metriky nevyžadujeme podmínku *positivity*. Ve fyzice hrají podstanou roli i metriky, které nejsou positivně definitní a proto jsme je připustili v obecné definici. To však komplikuje geometrický význam metriky – obvyklý pojem vzdálenosti potřebuje positivitu skalárního součinu. Pro metriky, které nejsou positivně definitní jejich geometrická interpretace bude mírně odlišná.

Abych mohli zavést jemnější klasifikaci metrik, potřebujeme pojem *signatury* metriky. Tu zavedeme pomocí ortonormální báze.

Definice D6.2 (Ortonormální báze)

Mějme v bodě x metriku $\boldsymbol{g}$. *Ortonormální báze* či *ortonormální n-áda* vektorů $\{\boldsymbol{e}_j\}_{j=1,\dots,d}$ (kde $d = \dim M$) je báze vektorů splňující

$$\boldsymbol{e}_i^{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{e}_j^{\boldsymbol{l}}\,\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{kl}} = \begin{cases} \pm 1 & \text{pro} \quad i = j\ , \\ 0 & \text{pro} \quad i \neq j\ . \end{cases}$$

Duální bázi $\{\boldsymbol{e}^j\}$ nazýváme ortonormální bází v prostoru 1-forem. Vektory se záporným ‘*kvadrátem velikosti*’ $\boldsymbol{e}_i^{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{e}_i^{\boldsymbol{l}}\,\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{kl}}$ obvykle řadíme před vektory s ‘kvadrátem velikosti’ kladným ◦

Poznámka

Slovo “n-áda” je trochu nešťasné ‘zobecní’ užívaných slov “*triáda*” a “*tetráda*” v případě tří a čtyř dimenzí. Alternativně se též užívají názvy “*reper*”, “*frejm*” (anglicky “frame”) či “*neholonomní báze*” (pokud se jedná o bázi, která není tečná k souřadnicovým čarám nějakých souřadnic). V tomto textu budeme používat buď “báze vektorů” nebo “n-áda” a to ať už bude název dimenze jakýkoli (tj. vyhneme se např. nečitelnému “d-áda”).

Lemma V6.1 (Existence ortonormální báze)

Ke každé metrice existuje ortonormální báze.

Pro zadanou metriku je počet vektorů v ortonormální bázi se záporným ‘kvadrátem velikosti’ nezávislý na volbě ortonormální báze. □

Důkaz:

Důkaz přenecháme čtenáři k vyhledání v učebnicích z lineární algebry. Jedná se o aplikaci Gramovy-Schmidtovy ortonormalizační metody a o elementární vlastnost kvadratických forem. ■

Díky tomuto lemmatu můžeme definovat:

Definice D6.3 (Signatura metriky)

Počty n a p vektorů se záporným a kladným ‘kvadrátem velikosti’ v ortonormální bázi se nazývají *signatura metriky*. Signatura se obvykle zapisuje ve formě (n, p) či

$$(\underbrace{-\cdots-}_{n\text{-krát}}\underbrace{+\cdots+}_{p\text{-krát}})\ .$$

Pod $\operatorname{sign}\boldsymbol{g}$ budeme chápat součin znamének v signatuře. Tj. pro metriku signatury (n, p) máme

$$\operatorname{sign}\boldsymbol{g} = (-1)^n\ .$$

Metrika se signaturou $(+\cdots+)$ se nazývá *riemanovská*, metrika se signaturou $(-+\cdots+)$ se nazývá *lorentzovská*. Obecně, pokud signatura obsahuje znaménka minus, budeme ji nazývat *smíšenou*. ◦

Zřejmě, $\operatorname{sign}\boldsymbol{g}$ je znaménko hustoty $\operatorname{Det}\boldsymbol{g}$:

$$\operatorname{Det}\boldsymbol{g} = (\operatorname{sign}\boldsymbol{g})\,|\operatorname{Det}\boldsymbol{g}|\ . \tag{6.1}$$

6.2 Riemannovské a lorentzovské metriky

Riemanovské metriky jsou pozitivně definitní a definují standardní skalární součin, velikost a úhel vektorů.

Definice D6.4 (Skalární součin)

Riemanovská metrika definuje *skalární součin* předpisem

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^m \boldsymbol{b}^n \boldsymbol{g}_{mn}\,. \qquad \text{(skalární součin)}$$

Velikost vektoru $|\boldsymbol{a}|$ a *úhel* γ dvou vektorů jsou definovány následovně:

$$|\boldsymbol{a}| = \left(\boldsymbol{a}^k\, \boldsymbol{g}_{kl}\, \boldsymbol{a}^l\right)^{1/2}\,, \qquad \text{(velikost)}$$

$$\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{a}^m\, \boldsymbol{g}_{mn}\, \boldsymbol{b}^n}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}\,. \qquad \text{(úhel)}$$

∘

Lorentzovská metriku zavádí bohatší strukturu. V první řadě definujeme tzv. *kauzální strukturu*, která rozděluje vektory podle znaménka ‘kvadrátu velikosti’ vektoru.

Definice D6.5 (Kauzální struktura)

Nechť $\boldsymbol{g}$ je metrika lorentzovské signatury $(-,+,\dots,+)$. Vektor $\boldsymbol{a}$ nazýváme v závislosti na znaménku ‘kvadrátu jeho velikosti’ *časupodobný*, *prostorupodobný* či *nulový* (někdy též *světelný*):

$$\boldsymbol{a}^k\, \boldsymbol{a}^l\, \boldsymbol{g}_{kl} \begin{cases} < 0 & \boldsymbol{a} \text{ je časupodobný}\,, \\ = 0 & \boldsymbol{a} \text{ je nulový}\,, \\ > 0 & \boldsymbol{a} \text{ je prostorupodobný}\,. \end{cases}$$

Dva neprostorupodobné vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ nazýváme *(kauzálně) shodně orientované*, pokud $\boldsymbol{a}^i \boldsymbol{b}^j \boldsymbol{g}_{ij} < 0$ nebo pokud si jsou úměrny s kladným koeficentem $\boldsymbol{a} = r\boldsymbol{b}$, $r > 0$.

Lineární podprostor vektorů z $\boldsymbol{T}_x M$ nazýváme *prostorupodobný*, pokud obsahuje pouze prostorupodobné vektory, *nulový*, pokud obsahuje právě jeden nulový vektor a jinak samé prostorupodobné vektory, a konečně *časupodobný*, pokud obsahuje alespoň jeden vektor časupodobný. ∘

Poznámka

Názvosloví je motivováno teorií relativity, ve které lorentzovská metrika popisuje vlastnosti prostoročasu. V případě vektorů můžeme stejné názvosloví zobecnit i pro metriku obecné smíšené signatury. Pro lineární podprostory by však pro obecnou metriku bylo potřeba zavést více typů a to podle signatury metriky indukované na podprostor.

Definice D6.6 (Kauzální orientovatelnost variety)

Shodnost orientace dvou časupodobných (případně nulových) vektorů v daném bodě je ekvivalence, která rozděluje časupodobné (resp. nulové) vektory na dvě třídy. Vektory jedné z nich konvenčně nazýváme vektory *orientované do budoucnosti*, vektory druhé třídy nazýváme *orientované do minulosti*. Pokud lze vydělení vektorů orientovaných do budoucnosti provést globálně a hladce na celé varietě (tj. pokud časupodobný vektor orientovaný do budoucnosti zůstává při spojitém přenosem po varietě pořád orientován do budoucnosti), nazýváme varietu *kauzálně orientovatelnou* a volbu vektorů orientovaných do budoucnosti nazýváme *kauzální orientací*. ∘

Shodně orientované časupodobné vektory tvoří konvexní množinu ohraničenou shodně orientovanými nulovými vektory. Množinu nulových vektorů též nazýváme *světelný kužel.*

Pro lorentzovskou metriku zavádíme následující veličiny

Definice D6.7 (Pseudoskalární součin)

Lorentzovská metrika definuje *pseudoskalární součin* předpisem

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^m \boldsymbol{b}^n \boldsymbol{g}_{mn} \,.$$

Tento součin není positivně definitní.

Dva vektory nazýváme *kolmé* (též *ortogonální*), pokud mají nulový pseudoskalární součin.

Velikost vektoru $\boldsymbol{a}$ definujeme předpisem

$$|\boldsymbol{a}| = \left|\boldsymbol{a}^k \, \boldsymbol{g}_{kl} \, \boldsymbol{a}^l\right|^{1/2} \,.$$

∘

Vztah dvou vektorů může být z hlediska lorentzovské metriky různého typu. Než zavedeme analogie úhlu, podívejme se podrobněji na nejjednodušší případ dvoudimenzionálního vektororového prostoru s lorentzovskou metrikou. Označme $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q}$ ortonormální bázi s časupodobným vektorem $\boldsymbol{t}$ a prostorupodobným vektorem $\boldsymbol{q}$. Analogií jednotkové sféry tvoří vektory normalizované pomocí lorentzovské metriky. Jednotkovou pseudokružnici tvořenou prostorupodobnými vektory $\boldsymbol{a}$ definujeme podmínkou

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 1 \,, \tag{6.2}$$

jednotkovou pseudokružnici tvořenou časupodobnými vektory $\boldsymbol{n}$ pak podmínkou

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}) = -1 \,. \tag{6.3}$$

Vzhledem ke zvolené bázi mají vektory jednotkových pseudokružnic tvar

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \pm\big(\sinh\tau\, \boldsymbol{t} + \cosh\tau\, \boldsymbol{q}\big) \,, \\ \boldsymbol{n} &= \pm\big(\cosh\beta\, \boldsymbol{t} + \sinh\beta\, \boldsymbol{q}\big) \,. \end{aligned} \tag{6.4}$$

(Jedná se tedy o různé větve hyperbol s asymptotikami $\pm\boldsymbol{t} \pm \boldsymbol{q}$.) Parametry τ a β hrají roli úhlu mezi vektorem báze $\boldsymbol{q}$, případně $\boldsymbol{t}$ a vektorem $\boldsymbol{a}$, resp. $\boldsymbol{n}$. Tyto parametry totiž odpovídají délce oblouku jednotkové pseudokružnice mezi příslušnými dvěma vektory měřené pomocí lorentzovské metriky (viz definici D6.12). τ i β lze přímočaře získat ze skalárního součinu obou vektorů. Můžeme tak definovat

Definice D6.8 (Úhly a pseudoúhly)

Pro dva vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, jejichž lineární obal je prostorupodobný, definujeme vzájemný *úhel* γ obvyklým způsobem

$$\cos\gamma = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|} \,.$$

Pokud je lineární obal dvou prostorupodobných vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ časupodobný, definujeme jejich vzájemný *pseudoúhel* τ výrazem

$$\cosh\tau = \left|\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}\right| \,.$$

Pro dva shodně orientované časupodobné vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ definujeme jejich vzájemnou *rapiditu* β vztahem

$$\cosh\beta = -\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|} \,.$$

∘

6.3 Zvyšování a snižování indexů

Metrika umožňuje ztotožnit prostor vektorů a 1-forem. Toto ztotožnění lze rozšířit na tenzory a umožňuje převádět abstrakní indexy mezi dolní a horní pozicí.

Definice D6.9 (Zvyšování a snižování indexů)
Metrika $\boldsymbol{g}$ definuje operace *zvyšování* $\sharp$ a *snižování* $\flat$ *abstraktních indexů* tenzorů

$$\sharp \quad \boldsymbol{T}^0_k \to \boldsymbol{T}^k_0\,, \quad \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k} \to ({}^\sharp\boldsymbol{\omega})^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}\,,$$
$$\flat \quad \boldsymbol{T}^k_l \to \boldsymbol{T}^l_k\,, \quad \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k} \to ({}^\flat\boldsymbol{A})_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}$$

předpisem

$$({}^\sharp\boldsymbol{\omega})^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k} = \boldsymbol{g}^{-1\,\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{n}_1}\dots\boldsymbol{g}^{-1\,\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{n}_k}\,\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\dots\boldsymbol{n}_k}\,,$$
$$({}^\flat\boldsymbol{A})_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k} = \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{n}_1}\cdots\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{n}_k}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}_1\dots\boldsymbol{n}_k}\,.$$

Můžeme samozřejmě zavést i zvedání a snižování jednotlivých indexů zvlášť a to i u tenzorů se složitější indexovou strukturou. To však budeme již zapisovat vždy přímo pomocí indexů, bez užití značek $\sharp$ a $\flat$. ◦

Lehce lze ověřit, že

$$^{\flat\sharp}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}\,, \quad ^{\sharp\flat}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\,, \tag{6.5}$$
$$^{\sharp}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}^{-1}\,, \quad ^{\flat}\boldsymbol{g}^{-1} = \boldsymbol{g}\,. \tag{6.6}$$

Snížením indexů u vektorů ortonormální báze dostaneme 1-formy lišící se od prvků duální ortonormální báze nanejvýše znaménkem

$$^{\flat}\boldsymbol{e}_i = \pm\,\boldsymbol{e}^i\,, \quad ^{\sharp}\boldsymbol{e}^i = \pm\,\boldsymbol{e}_i\,, \tag{6.7}$$

přičemž znaménko je určeno znaménkem ‘kvadrátu velikosti’ příslušného vektoru

$$\pm 1 = \operatorname{sign}\big(\boldsymbol{e}_i^{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{e}_i^{\boldsymbol{l}}\,\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{kl}}\big)\,. \tag{6.8}$$

V případě, že je jednoznačně definovaná metrika, zavádí se často konvence, že zvyšování a snižování indexů se provádí automaticky. Tenzory lišící se různou polohou indexů se označují stejným symbolem a rozlišuje se mezi nimi pouze explicitním vypsáním indexů. Máme tedy např. $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{mn}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}$. Při používání této konvence je potřeba rozlišovat relativní polohu kovariantních a kontravariantních indexů. Bez této konvence na umístění spodních a horních indexů vůči sobě nezáleží – nemůžou se nikdy promíchat. Pokud však připouštíme automatické snižování a zvyšování indexů, musí mít jednoznačně určené pořadí všech indexů, nezávisle na tom, zda jsou zrovna umístěny nahoře či dole. Budeme např. psát Riemannův tenzor $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{abc}}{}^{\boldsymbol{d}}$, který při snížení posledního indexu přejde na $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{abcd}}$. Vyjímkou jsou symetrické tenzory, kde na pořadí indexů nezáleží.

V duchu této konvence a díky (6.6) se pro inverzní metriku běžně používá stejný symbol jako pro metriku samotnou a oba tenzory se rozlišují pouze zápisem indexů, tj. $\boldsymbol{g}^{\boldsymbol{ab}}$ je tenzor $\boldsymbol{g}^{-1}$ a $\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{ab}}$ je tenzor $\boldsymbol{g}$. Pokud zvýšíme metrice pouze jeden index, dostaneme jednotkový operátor

$$\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}}{}^{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{a}}\,. \tag{6.9}$$

Vzhledem k ortonormální bázi *riemannovské* metriky tvoří komponenty metriky g_{ab} jednotkovou matici. Zvyšování a snižování indexů se tak vzhledem k ortonormální bázi stává triviální operací – komponenty tenzoru lišící se pouze polohou indexu se numericky shodují, např.:

$$a^i = {}^\flat a_i \ , \quad \alpha_i = {}^\sharp \alpha^i \ .$$

Pro metriku se smíšenou signaturou se složky tenzoru vzhledem k ortonormální bázi mohou pro různou polohu indexů lišit znaménkem.

Poznamenejme, že operace zvyšování a snižování indexu je reálná analogie hermitovského sdružení. Vskutku, pro reálné tenzory můžeme pomocí metriky definovat transpozici operátoru:

Definice D6.10 (Transpozice operátoru)

Mějme na varietě M metriku $\boldsymbol{g}$. Pro tenzory typu $(1,1)$ definujeme operaci *transpozice* $^\mathsf{T}$

$$^\mathsf{T} \ : \ \boldsymbol{T}_x{}^1_1 M \to \boldsymbol{T}_x{}^1_1 M \ , \quad \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}^\mathsf{T}$$

vztahem

$$\big(\boldsymbol{A}^\mathsf{T} \cdot \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\big) = \big(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{b}\big) \ .$$

Explicitně můžeme psát

$$\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}\,\boldsymbol{a}}{}_{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{g}^{-1\,\boldsymbol{ai}}\, \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{bj}}\, \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{j}}{}_{\boldsymbol{i}} \ ,$$

případně, s automatickým zvedáním a snižování indexů

$$\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}\,\boldsymbol{a}}{}_{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{b}}{}^{\boldsymbol{a}} \ .$$

Budeme-li chtít zdůraznit, že operace transpozice je definována pomocí metriky $\boldsymbol{g}$, budeme psát $^{\mathsf{T}_g}$. ◦

Poznámka

Pro tenzory v součinovém tvaru $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{\alpha}$ tedy máme $\boldsymbol{A}^\mathsf{T} = {}^\sharp\boldsymbol{\alpha}\,{}^\flat\boldsymbol{a}$.

V případě riemannovské metriky jsou složky transponovaného tenzoru vzhledem k ortonormální bázi tvořeny maticí získanou ze souřadnic původního tenzoru záměnnou indexů (sloupců a řádků). Snižování a zvyšování indexu totiž v tomto případě nemění numerickou hodnotu komponent tenzoru a tvrzení se redukuje na poslední vztah definice D6.10.

Definujme ještě:

Definice D6.11 (Symetrické operátory)

Lineární operátor $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{T}_x{}^1_1 M$ nazveme *symetrický vzhledem k metrice* $\boldsymbol{g}$, pokud $\boldsymbol{A}^\mathsf{T} = \boldsymbol{A}$. ◦

Uvažujme dále, že máme zadané dvě metriky $\boldsymbol{g}$ a $\boldsymbol{q}$. Můžeme definovat operátor $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{q}^{-1} \cdot \boldsymbol{g}$, tj.

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{i}}{}_{\boldsymbol{j}} = \boldsymbol{q}^{-1\,\boldsymbol{in}}\, \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{nj}} \ .$$

Tento operátor je symetrický jak vzhledem k metrice $\boldsymbol{g}$, tak vzhledme k metrice $\boldsymbol{q}$:

$$\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}_g} = \boldsymbol{A} \ , \quad \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}_q} = \boldsymbol{A} \ . \tag{6.10}$$

Standardní věty lineární algebry zaručují existenci vlastních vektorů symetrického operátoru (stačí uvažovat matici složek vzhledem k ortonormální bázi např. metriky $\boldsymbol{g}$). Vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé ve smyslu obou metrik. Z vlastních vektorů tak lze vytvořit báze, která je ortogonální vzhledem k oběma metrikám $\boldsymbol{g}$ a $\boldsymbol{q}$.

Lemma V6.2 (Společná ortonormální báze)

Každé dvě metriky mají společnou ortogonální bázi, tj. bázi tvořenou kolmými vektory ve smyslu obou metrik. Složky obou metrik vzhledem k takové bázi tvoří diagonální matici. □

6.4 Objekty definované pomocí metriky

Pomocí metriky můžeme definovat několik dalších geometrických objektů.

Začneme definicí délky křivky. Intuitivní význam délky křivky je zřejmý pro riemanovské metriky, kdy metrika definuje běžný pojem vzdálenosti. V případě metrik se smíšenou signaturou zobecníme délku na případ křivek, které nemění svůj 'kauzální' charakter, tj. na křivky, pro které se znaménko 'kvadrátu velikosti' tečného vektoru nemění. V případě lorentzovských metrik to znamená na křivky, které jsou všude časupodobné či prostorupodobné.

Definice D6.12 (Délka křivky)

Mějme na varietě M zadanou metriku $\boldsymbol{g}$. Nechť $z(\tau)$ je parametrizovaná křivka, jejíž 'kauzální' charakter ve smyslu metriky $\boldsymbol{g}$ se nemění – tj. křivka, podél které znaménko

$$\operatorname{sign} \frac{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{a}} z}{d\tau} \frac{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{b}} z}{d\tau}\, \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{ab}} \Big|_{\tau}$$

zůstává neměnné.

Pro úseku mezi hodnotami parametru τ_{z} a τ_{k} takovéto křivky definujeme délku ve smyslu metriky $\boldsymbol{g}$ jako integrál

$$\Delta s = \int\limits_{(\tau_{\mathrm{z}},\tau_{\mathrm{k}})} \left| \frac{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{a}} z}{d\tau} \frac{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{b}} z}{d\tau}\, \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{ab}} \right|^{1/2} d\tau = \int\limits_{(\tau_{\mathrm{z}},\tau_{\mathrm{k}})} \left| \frac{\boldsymbol{D} z}{d\tau} \right| d\tau \;. \qquad \circ$$

V případě riemanovské metriky se definice D6.12 redukuje na definici obyčejné délky, pro lorentzovskou metriku dává délku pro prostorupodobné křivky a vlastní čas pro křivky časupodobné.

Pokračujme připomenutím definice D5.11 metrického objemového elementu $\mathfrak{g}^{1/2}$ (ve dvou a třech dimenzích označovaného dS a dV), který měří 'skutečný', 'fyzikální' objem – tj. objem měřený pomocí měřítek popsaných metrikou. Definovali jsme integrovatelnou hustotu $\mathfrak{g}^{1/2}$, jejíž komponenta vůči souřadnicím x^j je dána determinantem komponent metriky (viz (5.10))

$$\mathfrak{g}^{1/2} = \left|\det g_{kl}\right|^{1/2} d^d x \;, \tag{6.11}$$

či zapsáno pomocí operace zavedené v definici D5.12

$$\mathfrak{g}^{1/2} = \left|\operatorname{Det} \boldsymbol{g}\right|^{1/2} \;. \tag{6.12}$$

Dále můžeme definovat Levi-Civitův tenzor $\boldsymbol{\varepsilon}$

Definice D6.13 (Levi-Civitův tenzor)
Mějme zadanou metriku $\boldsymbol{g}$. Levi-Civitův tenzor $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Lambda}^d M$ asociovaný s touto metrikou je positivně orientovaný totálně antisymetrický tenzor s $d = \dim M$ kovariantními indexy splňující normalizační podmínku

$$\varepsilon_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d}\; {}^\sharp\varepsilon^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d} = (\operatorname{sign}\boldsymbol{g})\, d!\ .$$

Indexy byly zvýšeny pomocí metriky $\boldsymbol{g}$. ◦

Levi-Civitův tenzor lze zapsat jednoduše vzhledem k ortonormální positivně orientované bázi 1-forem $\boldsymbol{e}^j$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{e}^1 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}^d\ , \qquad \text{tj.} \qquad \varepsilon_{1\dots d} = 1\ . \tag{6.13}$$

Pro ${}^\sharp\boldsymbol{\varepsilon}$ ale pomocí (6.7) dostáváme

$${}^\sharp\varepsilon^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d} = (\operatorname{sign}\boldsymbol{g})\; d!\; \boldsymbol{e}_1^{[\boldsymbol{a}_1} \dots \boldsymbol{e}_d^{\boldsymbol{a}_d]}\ , \quad \text{tj.} \quad \varepsilon^{1\dots d} = \operatorname{sign}\boldsymbol{g}\ . \tag{6.14}$$

Vzhledem k obecným positivně orientovaným souřadnicím x^j máme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= |\det g_{ij}|^{1/2}\; \mathbf{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^d\ ,\\ {}^\sharp\boldsymbol{\varepsilon} &= (\operatorname{sign}\boldsymbol{g})\, |\det g_{ij}|^{-1/2}\; d!\; \mathcal{A}\Big(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^1} \dots \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^d}\Big)\ . \end{aligned} \tag{6.15}$$

Porovnáním defince Levi-Civitova tenzoru s definicí D1.4 inverze totálně antisymetrického tenzoru dostáváme

Lemma V6.3 (Inverze Levi-Civitova tenzoru)
Nechť $\boldsymbol{\varepsilon}$ je Levi-Civitův tenzor asociovaný s metrikou $\boldsymbol{g}$. Pak

$${}^\sharp\boldsymbol{\varepsilon} = (\operatorname{sign}\boldsymbol{g})\; \boldsymbol{\varepsilon}^{-1}\ .$$

□

Poznámka

Jak ${}^\sharp\boldsymbol{\varepsilon}$, tak $\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}$ jsou přirození kandidáti pro roli "Levi-Civitova tenzoru s indexy nahoře". Bohužel se mohou lišit o znaménko. Pod $\varepsilon^{\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_d}$ budeme vždy mínit ${}^\sharp\varepsilon^{\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_d}$ ve smyslu konvence automatického zvyšování indexů. Poznamenejme však, že mnohé vztahy by vypadaly jednodušeji, kdyby se v nich namísto ${}^\sharp\boldsymbol{\varepsilon}$ použil inverzní tenzor $\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}$.

Z vlastností inverze (lemma V1.3) plyne

$$\begin{aligned} {}^\sharp\varepsilon^{\boldsymbol{i}_1\dots\boldsymbol{i}_d}\; \varepsilon_{\boldsymbol{j}_1\dots\boldsymbol{j}_d} &= (\operatorname{sign}\boldsymbol{g})\; d!\; {}^{[d]}\delta^{\boldsymbol{i}_1\dots\boldsymbol{i}_d}_{\boldsymbol{j}_1\dots\boldsymbol{j}_d}\ ,\\ {}^\sharp\varepsilon^{\boldsymbol{i}_1\dots\boldsymbol{i}_k\boldsymbol{n}_1\dots\boldsymbol{n}_{d-k}}\; \varepsilon_{\boldsymbol{j}_1\dots\boldsymbol{j}_k\boldsymbol{n}_1\dots\boldsymbol{n}_{d-k}} &= (\operatorname{sign}\boldsymbol{g})\; (d-k)!\; k!\; {}^{[k]}\delta^{\boldsymbol{i}_1\dots\boldsymbol{i}_k}_{\boldsymbol{j}_1\dots\boldsymbol{j}_k}\ ,\\ {}^\sharp\varepsilon^{\boldsymbol{i}_1\dots\boldsymbol{i}_d}\; \varepsilon_{\boldsymbol{i}_1\dots\boldsymbol{i}_d} &= (\operatorname{sign}\boldsymbol{g})\; d!\ . \end{aligned} \tag{6.16}$$

Levi-Civitův tenzor lze vyjádřit explicitně též pomocí tenzoru orientace a metrického objemového elementu. Platí

Lemma V6.4 (Levi-Civitův tenzor a tenzor orientace)
Levi-Civitův tenzor se od tenzoru orientace liší pouze multiplikativně o faktor daný metrickým objemovým elementem.

$$\varepsilon_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d} = \mathfrak{g}^{1/2}\; \tilde{\varepsilon}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d}\ .$$

□

Z toho přímo plyne vztah k absolutní hodnotě forem (definice D5.13) a hustotnímu duálu (definice D5.19)

$$\mathfrak{g}^{1/2} = |\boldsymbol{\varepsilon}| = {}^\star\boldsymbol{\varepsilon}\ , \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = {}^\star\mathfrak{g}^{1/2}\ . \tag{6.17}$$

Nakonec pomocí metriky definujeme Hodgeův duál působící na antisymetrických formách

Definice D6.14 (Hodgeův duál)
Mějme metriku $\boldsymbol{g}$ a s ní asociovaný Levi-Civitův tenzor $\boldsymbol{\varepsilon}$. Ten definuje na prostoru antisymetrických forem *Hodgeův duál* (či krátce *duál*) následovně:

$$^*: \boldsymbol{\Lambda}^p_x M \to \boldsymbol{\Lambda}^{d-p}_x M \;, \quad \boldsymbol{\omega} \to {}^*\boldsymbol{\omega} \;,$$
$$^*\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{a}_{p+1}\dots\boldsymbol{a}_d} = \frac{1}{p!}\, {}^\sharp\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}\, \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d} \;. \qquad \circ$$

Využitím (6.16), lemmatu V6.4 a definice D5.19 dostaneme následující vlastnosti:

Lemma V6.5 (Inverze a vztah k hustotnímu duálu)
Pro Hodgeův duál definovaný metrikou $\boldsymbol{g}$ platí

$$^{**}\boldsymbol{\omega} = (\operatorname{sign}\boldsymbol{g})\,(-1)^{p\,(d-p)}\,\boldsymbol{\omega} \;,$$
$$^*\boldsymbol{\omega} = {}^{\star\sharp}(\mathfrak{g}^{1/2}\boldsymbol{\omega}) = (\operatorname{sign}\boldsymbol{g})\,(-1)^{p\,(d-p)}\,\mathfrak{g}^{-1/2}\,{}^{\flat\star}\boldsymbol{\omega} \;,$$

kde $\boldsymbol{\omega}$ je antisymetrická p-forma. □

Pomocí metriky můžeme zavést na antisymetrických p-formách přirozený skalární součin

Definice D6.15 (Skalární součin na formách)
Nechť $\boldsymbol{\omega}$ a $\boldsymbol{\sigma}$ jsou antisymetrické p-formy, pak definujme

$$\boldsymbol{\omega} \bullet \sigma = \frac{1}{p!}\,\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}_1\dots\boldsymbol{n}_p}\,{}^\sharp\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{n}_1\dots\boldsymbol{n}_p} \;, \quad \omega^2 = \boldsymbol{\omega}\bullet\boldsymbol{\omega} \;. \qquad \circ$$

S touto definicí pro Hodgův duál můžeme psát:

Lemma V6.6 (Vlastnosti Hodgeova duálu)
Pro $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Lambda}^p M$ platí

$$\boldsymbol{\omega} \wedge {}^*\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \wedge {}^*\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}\bullet\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{\varepsilon} = {}^*\big(\boldsymbol{\omega}\bullet\boldsymbol{\sigma}\big) \;,$$
$$\boldsymbol{\omega} \wedge {}^*\boldsymbol{\omega} = \omega^2\,\boldsymbol{\varepsilon} = {}^*\omega^2 \;. \qquad \square$$

Cvičení C6.1
Dokažte! ✓

Příklad P6.1 (Hodgeův duál v jednoduchých případech)
Pro riemanovskou metriku ve dvou dimenzích máme

$$^{**}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \qquad \text{pro} \quad \boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Lambda}^p M \;, \quad p = 0, 2 \;,$$
$$^{**}\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha} \qquad \text{pro} \quad \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\Lambda}^1 M \;,$$

přičemž pokud ztotožníme 1-formy s vektory, dává $^*\boldsymbol{\alpha}$ vektor otočený o pravý úhel ve směru positivní orientace báze.
Pro riemanovskou metriku ve třech dimenzích máme

$$^{**}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \qquad \text{pro} \quad \boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Lambda}^p M \;, \quad p = 0, 1, 2, 3 \;.$$

Nakonec, pro lorentzovskou metriku ve čtyřech dimenzích dostáváme

$$^{**}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \qquad \text{pro} \quad \boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Lambda}^p M \;, \quad p = 1, 3 \;,$$
$$^{**}\boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega} \qquad \text{pro} \quad \boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Lambda}^p M \;, \quad p = 0, 2, 4 \;.$$

Příklad P6.2 (Vektorové násobení)
V případě třídimenzionální variety s riemanovskou metrikou definuje Hodgeův duál vektorové násobení dvou vektorů. Definice je přímočařejší pro vektory s indexy umístěnými 'dole' (tj. 1-formami získanými snížením indexů)

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = {}^*(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \; .$$

Vskutku, explicitním rozpisem (s automatickým zvedáním indexů pomocí metriky) dostaneme

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})^{\boldsymbol{ij}} \, \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{ijk}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{j}} \, \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{ijk}} \; ,$$

což je standardní definice vektorového násobení.

6.5 Killingovy vektory

Varieta může být vybavena různými metrikami které na ní zadávají 'jednodušší' či 'složitější' geometrii. Mírou 'složitosti geometrie' může být např. jak moc se metrika mění bod od bodu či jak moc se liší od triviální metriky afinního prostoru. V příštích kapitolách charakterizujeme tuto odlišnost od triviální metriky pomocí pojmu křivosti – k jeho zavedení však budeme muset nejdříve vybudovat aparát kovariantního derivování.

Již nyní však můžeme říci, co to znamená, že má metrika symetrii, tj. že se nemění při aplikaci jistých difeomorfismů.

Definice D6.16 (Symetrie metriky)
Říkáme, že difeomorfismus ϕ je *symetrií* metriky $\boldsymbol{g}$, pokud se metrika při aplikaci indukovaného zobrazení ϕ_* nezmění

$$\phi_* \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g} \; .$$

Důležité jsou zejména symetrie podél toku (vůči jednoparametrické grupě difeomorfismů - viz definici D3.3). Říkáme, že metrika je *symetrická vůči toku* ϕ_τ, pokud pro každé τ

$$\phi_{\tau *} \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g} \; . \qquad \circ$$

Symetrie vůči toku generovanému vektorovým polem $\boldsymbol{a}$ lze charakterizovat diferenciálně. Zřejmě je neměnnost metriky ekvivalentní vymizení Lieovy derivace $\pounds_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{g}$ metriky podél pole $\boldsymbol{a}$. Vektory splňující tuto podmínku se nazývají Killingovy vektory.

Definice D6.17 (Killingovy vektory)
Vektor $\boldsymbol{a}$ je *Killingův vektor* metriky $\boldsymbol{g}$, pokud

$$\pounds_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{g} = 0 \; .$$

Tok generovaný polem $\boldsymbol{a}$ je pak symetrií metriky. ∘

Obecně nemá metrika žádné Killingovy vektory. Pokud nějaké Killingovy vektory má, tvoří tyto vektorová pole Lieovu algebru s operací násobení danou Lieovou závorkou.

Věta V6.7 (Algebra Killingových vektorů)
Lieova závorka dvou Killingových vektorů metriky $\boldsymbol{g}$ je opět Killingův vektor. Stejně tak lineární kombinace Killingových vektorů (s *konstantními* koeficenty) je opět Killingův vektor. Killingovy vektory tak s operací Lieovy závorky tvoří Lieovu algebru. □