Kapitola 2

Varieta a její tečná struktura

Druhá kapitola v tuto chvíli obsahuje přehled značení týkající se variety a tečných tenzorů. Vedle přehledu značení jsou zde uvedeny některé věty a definice, na které se odkazují následující kapitoly. Nejedná se však o systematický výklad. Ten lze nalézt ve standardních učebnicích diferenciální geometrie. Výjimkou je oddíl 2.5 týkající se pseudoderivace – tento pojem se obvykle explicitně nezavádí, případně se zavádí v mírně odlišných podobách a pod různými názvy. Oddíl 2.5 je proto uveden v úplné formě, plně dostatečné pro další výklad.

2.1 Varieta

Varieta M je topologický prostor s diferenciální strukturou danou diferencovatelným atlasem. *Mapu* z atlasu budeme značit např. $(U, [x^j])$, kde $U \subset M$ je oblast, na které jsou definované souřadnicové funkce x^j $(j = 1, \dots, d)$ a $[x^j]$ značí uspořádanou d-tici těchto funkcí. Atlas definuje třídu hladkých funkcí na varietě, kterou označíme $\mathfrak{F}M$. Standardně budeme označovat souřadnicové vyjádření funkce f stejně jako funkci samu.

Parametrizovaná křivka $z(\tau)$ je zobrazení z reálných čísel do variety, přiřazující každé hodnotě $\tau \in \mathbb{R}$ bod $z(\tau) \in M$. Křivku nazýváme *hladkou*, pokud její souřadnicové vyjádření v každé mapě je hladké. Křivka je *po částech hladká*, pokud je, zhruba řečeno, hladká všude pouze mimo některé diskrétní hodnoty parametru. *Geometrickou křivkou* či krátce křivkou γ míníme křivku bez konkrétní parametrizace (jedná se jednodimenzionální varietu vnořenou do variety M – viz též oddíl 3.4).

Definice D2.1 (Parciální derivace)
Nechť $(U, [x^j])$ je mapa na varietě M a $f \in \mathfrak{F}U$. Parciální derivací $f_{,j} \in \mathfrak{F}U$ funkce f podél j-té souřadnice nazýváme

$$f_{,j} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^j}(x^1, \dots, x^d)\ ,$$

kde $\tilde{f}$ je funkce f vyjádřená jako závislost na d souřadnicích x^j, tj. $\tilde{f}(x^1, \dots, x^d) = f$.
Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme vlnovku u funkce $\tilde{f}$ vynechávat. ◦

2.2 Tečné vektory

Tečné vektory můžeme chápat buď jako objekty charakterizující směr parametrizovaných křivek (včetně 'rychlosti běhu' parametru) nebo jako lineární diferenciální operátory prvního řádu působící na funkcích.

K parametrizované křivce $z(\tau)$ tak definujeme tečný vektor $\frac{\boldsymbol{D}z}{d\tau}(\tau)$, (s abstraktními indexy zapsaný $\frac{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{n}}z}{d\tau}$). Souřadnicové vektory tečné k čarám souřadnic x^j označíme $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial}x^j$ či $\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^j}$, případně s abstraktním indexem $\frac{\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{\partial}x^j}$.

Působení vektoru $\boldsymbol{a}$ na skalární funkci f, tj. derivaci f ve směru $\boldsymbol{a}$, budeme zapisovat $\boldsymbol{a}[f]$.

Definice D2.2 (Derivace ve směru)

Derivaci ve směru $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{T}_x M$ skalární funkce f definujeme

$$\boldsymbol{a}[f] = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\Big(f\big(z(\tau)\big) - f\big(z(0)\big)\Big) = \frac{d}{d\tau} f\circ z\Big|_{\tau=0} ,$$

kde $z(\tau)$ je libovolná parametrizovaná křivka vedoucí z bodu $z(0){=}x$ ve směru $\boldsymbol{a}$. ∘

2.3 Tečné 1-formy a gradient

Duální prostor k prostoru tečných vektorů nazýváme *kotečný prostor* a jeho prvky *kovektory* či 1-*formy*.

Gradient funkce $\mathbf{d}f$ je zaveden pomocí působením vektoru na funkci:

$$\boldsymbol{a}[f] = \boldsymbol{a}\cdot \mathbf{d}f = \langle \mathbf{d}f, \boldsymbol{a}\rangle = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}}f\ . \tag{2.1}$$

(Zde jsme pro připomenutí užili tři alternativní zápisy zúžení.) Jak je vidět, abstraktní index 1-formy $\mathbf{d}f$ umisťujeme ke znaku $\mathbf{d}$. Složky gradientu $\mathbf{d}f$ jsou parciální derivace $f_{,n}$.

Poznámka

Pro obyčejnou funkci f můžeme složky gradientu zapsat také $\mathrm{d}_n f$. Pokud však místo funkce f budeme mít složky $\omega_{a_1\dots a_p}$ antisymetrické p-formy, bude mít zápis $\mathrm{d}_a\omega_{a_1\dots a_p}$ význam komponent *vnější derivace* $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}$ – viz definici D4.3 a poznámky následující za ní.

Ukazuje se, že komutátor působení dvou vektorových polí na skalární funkci má charakter *derivace prvního řádu*:

Lemma V2.1

Nechť $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ jsou vektorová pole. Pak předpis

$$\boldsymbol{a}\big[\boldsymbol{b}[f]\big] - \boldsymbol{b}\big[\boldsymbol{a}[f]\big]$$

definuje lineární diferenciální operátor prvního řádu. □

To nám umožňuje definovat operaci Lieova závorka přiřazující dvojici vektorových polí pole nové:

Definice D2.3 (Lieova závorka)

Nechť $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ jsou vektorová pole. Pak předpis

$$\boldsymbol{c}[f] = \boldsymbol{a}\big[\boldsymbol{b}[f]\big] - \boldsymbol{b}\big[\boldsymbol{a}[f]\big] = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{k}}\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{k}}\big(\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{l}}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{l}}f\big) - \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{k}}\ \mathbf{d}_{\boldsymbol{k}}\big(\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{l}}\,\mathbf{d}_{\boldsymbol{l}}f\big)$$

definuje nové vektorové pole $\boldsymbol{c}$, které budeme nazývat *Lieova závorka* $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. ∘

Věta V2.2 (Vlastnosti Lieovy závorky)
Lieova závorka splňuje následující vlastnosti:

$$\begin{aligned}
&\big[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\big] = -\big[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\big]\;, && \text{(antisymetrie)}\\
&\big[r\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\big] = r\big[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\big] + \big[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\big] \quad \text{pro} \quad r\in\mathbb{R}\;, && \text{(linearita)}\\
&\big[\boldsymbol{a},f\boldsymbol{b}\big] = f\big[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\big] + \boldsymbol{a}[f]\boldsymbol{b}\;, && \text{(Leibniz)}\\
&\big[\boldsymbol{a},[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]\big] + \big[\boldsymbol{b},[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]\big] + \big[\boldsymbol{c},[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\big] = 0\;. && \text{(Jacobi)}
\end{aligned}$$

□

Jednoduše též ověříme, že Lieova závorka souřadnicobých polí $\boldsymbol{\partial}/\boldsymbol{\partial}x^i$ libovolných souřadnic $\{x^i\}$ vymizí

$$\left[\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^i},\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^j}\right] = 0\;. \tag{2.2}$$

Lieova závorka $\big[\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^i},\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^j}\big]$ působící na funkci f totiž v tomto případě dá $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}$ – na pořadí derivování však nezáleží a oba členy se vyruší.

2.4 Tečné tenzory

Prostory tečných vektorů, 1-forem a tenzorů typu (p,q) v bodě x budeme značit $\boldsymbol{T}_x M$, $\boldsymbol{T}^*_x M$ a $\boldsymbol{T}_x{}^p_q M$. Příslušné prostory polí označíme $\mathfrak{T}M$, $\mathfrak{T}^*M$ a $\mathfrak{T}^p_q M$. Prostor antisymetrických tenzorů typu $(0,p)$ v bodě x značíme $\boldsymbol{\Lambda}^p_x M$ a příslušný prostor polí $\mathcal{A}^p M$.

Obecně, prostor *polí* objektů patřících v bodě x do prostoru $\boldsymbol{E}_x M$ budeme značit Sect $\boldsymbol{E}M$ (jedná se o prostor řezů fibrovaného bundle $\boldsymbol{E}M$). Tj. $\mathfrak{T}M = \operatorname{Sect}\boldsymbol{T}M$, $\mathcal{A}^p M = \operatorname{Sect}\boldsymbol{\Lambda}^p M$.

Tenzorová pole jsou významné mj. proto, že pomocí nich lze reprezentovat libovolné ultralokální lineární zobrazení.

Věta V2.3 (Tenzorové pole jako ultralokální linearní zobrazení)
Libovolný tenzor-značný ultralokální lineární funkcionál na tenzorových polích lze reprezentovat tenzorovým polem.
Jinými slovy, každé zobrazení $\boldsymbol{l}$ splňující ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}\in\mathfrak{T}^m_n M$)

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{l}\;:\;\mathfrak{T}^m_n M \to \mathfrak{T}^p_q M\;, && \text{(tenzor-značnost)}\\
&\boldsymbol{l}\big(f\boldsymbol{A}\big) = f\,\boldsymbol{l}\big(\boldsymbol{A}\big) \qquad \text{pro } f\in\mathfrak{F}M\;, && \text{(ultralokalita)}\\
&\boldsymbol{l}\big(f\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\big) = f\,\boldsymbol{l}\big(\boldsymbol{A}\big) + \boldsymbol{l}\big(\boldsymbol{B}\big) && \text{(linearita)}
\end{aligned}$$

lze reprezentovat tenzorovým polem $\boldsymbol{L}\in\mathfrak{T}^{p+n}_{q+m}M$

$$\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_q}\big(\boldsymbol{A}\big) = \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p\boldsymbol{c}_1\dots\boldsymbol{c}_n}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_q\boldsymbol{d}_1\dots\boldsymbol{d}_m}\;\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{d}_1\dots\boldsymbol{d}_m}_{\boldsymbol{c}_1\dots\boldsymbol{c}_n}\;.$$

□

Poznámka
Tenzorové pole $\boldsymbol{L}$ je tak obvykle vysokého stupně – má abstraktní indexy odpovídající jak indexům výsledku, tak indexům všech argumentů (umístěné v 'opačné' poloze). Zobrazení argumentů na výsledek probíhá zúžením přes všechny indexy argumentů s odpovídajícími indexy pole $\boldsymbol{L}$.

Důkaz:
Díky ultralokalitě lze využít linearitu obdobným způsobem jako při důkazu věty V1.1 k explicitní konstrukci tenzorového pole $\boldsymbol{L}$. ∎

Příklad P2.1

Nejjednodušší aplikací této věty jsou lineární funkcionály zobrazující ultralokálně a lineárně vektorová pole na skalární funkce. Ty lze vždy reprezentovat polem 1-forem.

Příkladem byla operace derivování skalární funkce f ve směrech daných polem $\boldsymbol{a}$ – viz oddíl 2.3. Výraz $\boldsymbol{a}[f]$ je lineární a ultralokální v argumentu $\boldsymbol{a}$ a musí proto existovat 1-forma $\mathbf{d}f$, pro kterou platí

$$\boldsymbol{a}[f] = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}\, \mathbf{d}_{\boldsymbol{n}} f \ .$$

Tuto 1-formu nazýváme gradient funkce f.

2.5 Pseudoderivace

V dalším bude velmi výhodné zavést pojem nazývaný v tomto textu jako *pseudoderivace*. V podstatě se jedná o "reprezentaci Lieovy algebry všech lokálních lineárních transformací indukovanou na tenzorová pole z reprezentace na vektorových polích" – viz marginálii M2.1. Tato charakterizace pseudoderivace však nemusí být v tento okamžik příliš srozumitelná. Vymezíme proto pseuderivaci přímo, pomocí jejích konkrétních vlastností:

Definice D2.4 (Pseudoderivace)

Zobrazení M se nazývá *pseudoderivace typu* (p,q), pokud se jedná o ultralokální lineární funkcionál zobrazující tenzorová pole libovolného typu na tenzorové pole vyššího typu, pro který navíc platí Leibnizovo pravidlo a komutace s kontrakcí:

$$\mathsf{M} \,:\, \mathfrak{T}^m_n M \to \mathfrak{T}^{m+p}_{n+q} M \quad \text{pro } m,n \text{ libovolná}\,, \tag{typ}$$

$$\mathsf{M} f = 0 \quad \text{pro } f \in \mathfrak{F} M\,, \tag{ultralokalita}$$

$$\mathsf{M}(f\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = f\,\mathsf{M}\boldsymbol{A} + \mathsf{M}\boldsymbol{B} \tag{linearita}$$

$$\mathsf{M}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = (\mathsf{M}\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\mathsf{M}\boldsymbol{B}) \tag{Leibniz}$$

$$\mathsf{M}\,\mathrm{C}\boldsymbol{A} = \mathrm{C}\,\mathsf{M}\boldsymbol{A} \tag{kontrakce}$$

∘

Poznámka

Pseudoderivace tak z libovolného tenzorového pole vytvoří jiné tenzorové pole, které má o p kontravariantních a q kovariantních indexů více. Typicky $(p,q)=(0,0)$ nebo $(p,q)=(0,1)$. Tyto indexy budeme psát přímo u symbolu pseudoderivace – např. pro pseudoderivaci $\mathsf{\Gamma}$ typu $(0,1)$ budeme psát $\mathsf{\Gamma}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{c}}$.

Pro pseudoderivaci typu $(p,q)\neq(0,0)$ Leibnizovo pravidlo v podobě zapsaném výše není zcela přesné. Je potřeba dodat, že indexy asociované přímo s pseudoderivací zůstávají před indexy tenzorů $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$, což v definici D2.4 není splněno v posledním členu. Správně bychom měli psát indexy explicitně:

$$\mathsf{M}^{\boldsymbol{m}\dots}_{\boldsymbol{n}\dots}\big(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{a}\dots}_{\boldsymbol{c}\dots}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{b}\dots}_{\boldsymbol{d}\dots}\big) = \big(\mathsf{M}^{\boldsymbol{m}\dots}_{\boldsymbol{n}\dots}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{a}\dots}_{\boldsymbol{c}\dots}\big)\,\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{b}\dots}_{\boldsymbol{d}\dots} + \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{a}\dots}_{\boldsymbol{c}\dots}\big(\mathsf{M}^{\boldsymbol{m}\dots}_{\boldsymbol{n}\dots}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{b}\dots}_{\boldsymbol{d}\dots}\big)\,.$$

Abstraktní zápis kontrakce $\mathrm{C}\boldsymbol{A}$ (naznačené pomocí operátoru C) reprezentuje libovolnou kontrakci (zúžení) v jednom horním jednom dolním indexu. Jako důsledek dostáváme Leibnizovo pravidlo pro zúžený součin:

$$\mathsf{M}^{\boldsymbol{m}\dots}_{\boldsymbol{n}\dots}\big(\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{k}}\big) = \big(\mathsf{M}^{\boldsymbol{m}\dots}_{\boldsymbol{n}\dots}\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}\big)\,\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}\big(\mathsf{M}^{\boldsymbol{m}\dots}_{\boldsymbol{n}\dots}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{k}}\big)\,.$$

Poznámka

Název *pseudoderivace* odráží fakt, že se jedná operaci podobnou derivaci (linearita a Leibnizovo pravidlo). Předpona *pseudo* však upozorňuje, že díku ultralokalitě (tj. díky $\mathsf{M}f=0$) se o skutečnou derivaci nejedná. Jinými slovy, jedná se o derivaci v algebraickém smyslu tenzorové algebry v jednom prostoročasovém bodě.

Klíčová vlastnost pseudoderivace je, že její působení je jednoznačně dáno jejím působením na vektorových polích. Navíc, z věty V2.3 vyplývá, že akce pseudoderivace lze reprezentovat tenzorově. Vskutku, můžeme psát

Věta V2.4 (Působení pseudoderivace)

Nechť M je pseudoderivace typu $(0,0)$ jejíž působení na vektorových polích lze reprezentovat tenzorovým polem $\boldsymbol{M}\in\mathfrak{T}^1_1 M$:

$$\mathsf{M}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} \quad , \quad \boldsymbol{a}\in\mathfrak{T}M\,.$$

Pak akce pseudoderivace na tenzorové pole $\boldsymbol{A}$ typu (k,l) je

$$\begin{aligned}\mathsf{M}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_l} = \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{a}_1}_{\boldsymbol{m}}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{m}\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_l} + \dots + \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{m}}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_l}\\ - \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{b}_1}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{n}\dots\boldsymbol{b}_l} - \dots - \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{b}_l}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{n}}\,.\end{aligned}$$

M2.1 Lineární transformace na $\boldsymbol{T}M$

Grupu lineárních nedegenerovaných transformací tečného prostoru $\boldsymbol{T}_x M$ v bodě x označíme $\mathsf{GL}(\boldsymbol{T})_x M$. Prostor $\mathrm{Sect}\,\mathsf{GL}(\boldsymbol{T})M$ pak tvoří grupu *lokálních transformací*, definovaných nezávisle v každém bodě variety – vskutku, $g\in\mathrm{Sect}\,\mathsf{GL}(\boldsymbol{T})M$ definuje transformaci $g(x)\in\mathsf{GL}(\boldsymbol{T})_x M$ v každém bodě $x\in M$. Působení transformace z $\mathsf{GL}(\boldsymbol{T})_x M$ lze přirozeně reprezentovat pomocí tenzoru typu $(1,1)$: pro $g\in\mathsf{GL}(\boldsymbol{T})_x M$ existuje $\boldsymbol{T}_g\in\boldsymbol{T}_x{}^1_1 M$ zprostředkující působení g na vektory skrze zúžení:

$$g\,:\,\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}\to\boldsymbol{T}_g{}^{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}\,.$$

Pro $g\in\mathsf{GL}(\boldsymbol{T})_x M$ reprezentace $\boldsymbol{T}_g$ probíhá všechny tenzory typu $(1,1)$ s nenulovým determinantem ($\det\boldsymbol{T}_g\neq 0$).

Působení $\mathsf{GL}(\boldsymbol{T})M$ lze přirozeně rozšířit na libovolný tenzorový prostor:

$$\begin{aligned}g\,:\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{a}\dots}_{\boldsymbol{b}\dots}&\to\mathbf{Tens}[\boldsymbol{T}_g]\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{a}\dots}_{\boldsymbol{b}\dots}\\ &=\boldsymbol{T}_g{}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{m}}\dots\boldsymbol{T}_g{}^{-1}{}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{b}}\dots\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{m}\dots}_{\boldsymbol{n}\dots}\,.\end{aligned}$$

Generátorem transformace z $\mathsf{GL}(\boldsymbol{T})_x M$ rozumíme 'odchylku' malé transformace od identity. Formálně se jedná o prvky Lieovy algebry grupy $\mathsf{GL}(\boldsymbol{T})_x M$. Prostor generátorů označíme $\mathsf{gl}(\boldsymbol{T})_x M$. Tento prostor je opět přirozeně a věrně reprezentován na $\boldsymbol{T}_x M$ pomocí tenzorů z $\boldsymbol{T}_x{}^1_1 M$. Pro $\mathfrak{m}\in\mathsf{gl}(\boldsymbol{T})_x M$ máme $\boldsymbol{t}_{\mathfrak{m}}\in\boldsymbol{T}_x{}^1_1 M$ generující malou transformaci (odlišnou od identity v řádu ε) vztahem

$$\boldsymbol{T}_g\approx\boldsymbol{\delta}+\varepsilon\,\boldsymbol{t}_{\mathfrak{m}}+\mathcal{O}(\varepsilon^2)\,.$$

Tenzor $\boldsymbol{t}_{\mathfrak{m}}$ probíhá při měnícím se generátoru $\mathfrak{m}$ celý prostor $\boldsymbol{T}_x{}^1_1 M$.

Rozšíření reprezentace $\mathsf{gl}(\boldsymbol{T})_x M$ na libovolný tenzorový prostor $\boldsymbol{T}_x{}^k_l M$ – které označíme $\mathbf{tens}[\boldsymbol{t}_{\mathfrak{m}}]$ – je trochu složitější. Je zachyceno právě v objektu zavedeném v tomto oddíle: pomocí tzv. *pseudoderivace*.

Konečně, *algebra lokálních generátorů*, definovaných nezávisle v různých bodech variety, je přirozeně tvořena prostorem polí $\mathrm{Sect}\,\mathsf{gl}(\boldsymbol{T})M$.

Obdobně lze zapsat působení pseudoderivace M obecného typu (p,q), pouze tenzorové pole $\boldsymbol{M}$ bude mít navíc p kontravariantních a q kovariantních indexů, které nijak nezasáhnout do struktury výrazu uvedeného výše. □

Důkaz:
Odvodíme působení M na 1-formách (tenzorech typu $(0,1)$) a tenzorech typu $(2,0)$. Působení na tenzory obecného typu se odvodí analogicky. Mějme 1-formu $\boldsymbol{\alpha}$. Pro její zúžení s vektorovým polem $\boldsymbol{a}$ můžeme psát

$$0 = \mathsf{M}\big(\boldsymbol{\alpha}_n \boldsymbol{a}^n\big) = \boldsymbol{\alpha}_n\, \mathsf{M}\boldsymbol{a}^n + \boldsymbol{a}^n\, \mathsf{M}\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\alpha}_n \boldsymbol{M}^n_m \boldsymbol{a}^m + \boldsymbol{a}^m\, \mathsf{M}\boldsymbol{\alpha}_m \;.$$

Pole $\boldsymbol{a}$ bylo zvoleno libovolně, můžeme jej tedy 'zkrátit' a dostáváme požadovaný vztah

$$\mathsf{M}\boldsymbol{\alpha}_m = -\boldsymbol{M}^n_m \boldsymbol{\alpha}_n \;.$$

Pro tenzorový součin dvou vektorových polí $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ dostáváme

$$\mathsf{M}\big(\boldsymbol{a}^m \boldsymbol{b}^n\big) = \big(\mathsf{M}\boldsymbol{a}^m\big)\boldsymbol{b}^n + \big(\mathsf{M}\boldsymbol{b}^n\big)\boldsymbol{a}^m = \boldsymbol{M}^m_k \boldsymbol{a}^k \boldsymbol{b}^n + \boldsymbol{M}^n_k \boldsymbol{a}^m \boldsymbol{b}^k \;.$$

Platnost analogického vztahu pro libovolný tenzor typu $(2,0)$ plyne okamžitě z linearity pseudoderivace. ■

Definice D2.5 (Pseudoderivace – pokračování definice D2.4)
Pro pseudoderivaci M charakterizovanou tenzorem $\boldsymbol{M}$ podle věty V2.4 budeme psát

$$\mathsf{M} = \mathbf{tens}[\boldsymbol{M}] \;.$$

Jelikož je působení pseudoderivace ultralokální, má $\mathbf{tens}[\boldsymbol{M}]$ smysl i pro $\boldsymbol{M}$ definované pouze v bodě x. Pseudoderivace $\mathbf{tens}[\boldsymbol{M}]$ pak působí na tenzory z $\boldsymbol{T}_x{}^k_l M$. ∘

Poznámka
Pokud chápeme tenzor $\boldsymbol{M}(x)$ typu $(1,1)$ v bodě x jako reprezentaci prvku $\mathfrak{m}(x)$ Lieovy algebry $\mathsf{gl}(\boldsymbol{T})_x M$ působící na tečném prostoru $\boldsymbol{T}_x M$ (tj. $\boldsymbol{M}(x) = \boldsymbol{t}_{\mathfrak{m}(x)}$ ve smyslu marginálie M2.1), pak pseudoderivace $\mathbf{tens}[\boldsymbol{M}(x)]$ dává indukovanou reprezentaci prvku $\mathfrak{m}(x)$ působící na všechny tečné tenzory.
Oprostíme-li se od konkrétního bodu variety M, můžeme tenzorové pole $\boldsymbol{M}$ typu $(1,1)$ chápat jako reprezentaci prvku $\mathfrak{m}$ lokální Lieovy algebry $\mathrm{Sect}\,\mathsf{gl}(\boldsymbol{T})M$ (viz marginálii M2.1) působící na vektorová pole a příslušnou pseudoderivaci $\mathbf{tens}[\boldsymbol{M}]$ jako indukovanou reprezentaci působící na libovolném $\mathfrak{T}^k_l M$.