Kapitola 1

Tenzory

První kapitola v tuto chvíli obsahuje pouze přehled značení týkající se tenzorů a dva oddíly zabývající se podrobněji antisymetrickými a symetrickými tenzory. Nejedná se o systematický výklad problematiky tenzorů. Ten lze nalézt ve standardních učebnicích lineární algebry, případně diferenciální geometrie.

1.1 Označení tenzorů

Duální vektorový prostor k vektorovému prostoru V označíme V^*. Prostor tenzorů typu (p, q) vybudovaný nad V označíme V^p_q, tj.

$$V^p_q = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p\text{-krát}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{q\text{-krát}} . \tag{1.1}$$

Tenzory budeme značit tučným písmem: např. vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \ldots$, formy $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\sigma}, \ldots$ a tenzory $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \ldots$. Znaménko tenzorového součinu budeme vynechávat, tj.

$$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} . \tag{1.2}$$

Zúžení (kontrakci) vektoru $\boldsymbol{a}$ a 1-formy $\boldsymbol{\omega}$ (tj. působení 1-formy na vektor) budeme bez indexů zapisovat následujícími způsoby:

$$\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{a} \rangle = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\omega} . \tag{1.3}$$

Symetrizaci a antisymetrizaci tenzoru $\boldsymbol{\omega}$ ve všech jeho indexech značíme $\mathcal{S}\,\boldsymbol{\omega}$ a $\mathcal{A}\,\boldsymbol{\omega}$ (viz též (1.5) níže).

Složky tenzorů budeme značit obyčejným písmem – jedná se o obyčejná reálná čísla. Uveďme např. komponenty a^m, b^n, ω_a, σ_b či $A^{k\ldots}_{l\ldots}$, $B^{k\ldots}_{l\ldots}$.

1.2 Abstraktní indexy

Pro naznačení kontrakce tenzoru, případně dalších tenzorových operací, budeme používat *abstraktních indexů*. To znamená, že v případě potřeby přidáme k tenzoru $\boldsymbol{A}$ sadu tučně psaných indexů o stejné struktuře jako mají souřadnicové indexy – např. budeme psát $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}\ldots}_{\boldsymbol{l}\ldots}$. Tyto tzv. *abstraktní* indexy však nejsou svázány s žádnou bází v prostoru tenzorů, neprobíhají konkrétní číselné hodnoty a nemění význam tenzoru $\boldsymbol{A}$. Abstraktní indexy pouze naznačují tenzorovou strukturu a pojmenovávají jednotlivé 'vektorové pozice' v tenzorovém prostoru do kterého $\boldsymbol{A}$ patří.

Pomocí abstraktních indexů značíme kontrakci opakujícím se dolním a horním indexem; např.

$$\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{a} \rangle = \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}}\, \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} \; . \tag{1.4}$$

Symetrizaci (resp. antisymetrizaci) značíme kulatou (případně hranatou) závorkou okolo příslušných indexů

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{\dots(\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p)\dots} &= \frac{1}{p!} \sum_{\text{permutace}\,\sigma} \boldsymbol{A}^{\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_1}\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_p}\dots} \\ \boldsymbol{\omega}_{\dots[\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p]\dots} &= \frac{1}{p!} \sum_{\text{permutace}\,\sigma} \operatorname{sign}\sigma\; \boldsymbol{\omega}_{\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_1}\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_p}\dots} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Abstraktní indexy jsou svázány se souřadnicovými indexy volbu báze v prostoru vektorů a 1-forem. Nechť $\{\boldsymbol{e}_a\}_{a=1,\dots,d}$ je báze v prostoru vektorů, $\{\boldsymbol{e}^a\}_{a=1,\dots,d}$ duální báze v prostoru 1-forem. Pak pro obecný tenzor $\boldsymbol{A}$ můžeme psát

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}\dots}_{\boldsymbol{l}\dots} = A^{a\dots}_{b\dots}\, \boldsymbol{e}_a^{\boldsymbol{k}} \dots\, \boldsymbol{e}^b_{\boldsymbol{l}} \dots \; . \tag{1.6}$$

Zde $\boldsymbol{e}_a^{\boldsymbol{k}}$ jsou vektory báze (různé lineárně nezávislé vektory číslované souřadnicovým indexem $a = 1, \dots, d$) 'oblečené' navíc do abstraktního indexu $\boldsymbol{k}$ naznačujícího, že se jedná o vektory. Obdobně pro 1-formy $\boldsymbol{e}^b_{\boldsymbol{l}}$ index b probíhá čísla $1, \dots, d$ a $\boldsymbol{l}$ je abstraktní index naznačující, že se jedná o 1-formy. Bez abstraktních indexů by předchozí rovnice měla tvar

$$\boldsymbol{A} = A^{a\dots}_{b\dots}\, \boldsymbol{e}_a \dots\, \boldsymbol{e}^b \dots \; . \tag{1.7}$$

Bázi vektorů budeme též nazývat n-*áda vektorů*, a to přesto, že pro dimenzi budeme většinou používat písmeno d. Jedná se o zobecnění běžného označené *diáda*, *triáda* a *tetráda* pro $d = 2, 3$ a 4.

1.3 Některé vlastnosti tenzorů

Věta V1.1 (Tenzor jako lineární zobrazení)
Libovolné tenzor-značné lineární zobrazení na tenzorech lze reprezentovat opět tenzorem.
Jinými slovy, každé zobrazení $\boldsymbol{l}$ splňující ($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in V^m_n, r \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{l} \,:\, V^m_n \to V^p_q \,, && \text{(tenzor-značnost)} \\ &\boldsymbol{l}\big(r\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\big) = r\,\boldsymbol{l}\big(\boldsymbol{A}\big) + \boldsymbol{l}\big(\boldsymbol{B}\big) && \text{(linearita)} \end{aligned}$$

lze reprezentovat tenzorem $\boldsymbol{L} \in V^{p+n}_{q+m}$

$$\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_q}\big(\boldsymbol{A}\big) = \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p\boldsymbol{c}_1\dots\boldsymbol{c}_n}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_q\boldsymbol{d}_1\dots\boldsymbol{d}_m}\; \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{d}_1\dots\boldsymbol{d}_m}_{\boldsymbol{c}_1\dots\boldsymbol{c}_n} \; . \qquad \square$$

1.4 Prostor antisymetrických tenzorů

Mezi tenzory hrají důležitou roli antisymetrické tenzory. Antisymetrický tenzor lze získat antisymetrizací jeho tenzorových indexů. Ve shodě s (1.5) definujme:

Definice D1.1 (Antisymetrizace tenzorů)

Antisymetrizaci tenzoru ve vybraných indexech budeme označovat pomocí hranatých závorek

$$\boldsymbol{\omega}_{\dots[\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p]\dots} = \frac{1}{p!}\sum_{\text{permutace}\,\sigma} \operatorname{sign}\sigma\; \boldsymbol{\omega}_{\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_1}\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_p}\dots}\;.$$

Pokud se přes nějaký index umístěný mezi závorkami antisymetrizovat nemá, vydělíme ho pomocí svislých čar: např. ve výrazu $\boldsymbol{\omega}_{\dots[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}|\boldsymbol{n}|\boldsymbol{c}]\dots}$ se antisymetrizuje pouze přes indexy $\boldsymbol{abc}$. Antisymetrizaci přes všechny indexy budeme označovat pomocí symbolu $\mathcal{A}$. Např.

$$(\mathcal{A}\,\boldsymbol{A})^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p} = \boldsymbol{A}^{[\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p]}\;. \qquad \circ$$

Nyní můžeme definovat

Definice D1.2 (Prostor antisymetrických tenzorů)

Prostor antisymetrických tenzorů typu $(k,0)$, $k = 0,\dots,d$, označíme $V^{[k]}$. Jedná se o prostor tenzorů $\boldsymbol{A}$ pro které

$$\mathcal{A}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\;.$$

Obdobně definujeme prostor antisymetrických forem $V_{[l]}$ a prostor $V^{[k]}_{[l]} = V^{[k]} \otimes V_{[l]}$. $\circ$

Pro antisymetrický tenzor $\boldsymbol{A}$ pro každou permutaci σ čísel $[1,\dots,k]$ zřejmě platí

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k} = \operatorname{sign}\sigma\; \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{a}_{\sigma_1}\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_k}}\;. \tag{1.8}$$

Dimenze prostoru antisymetrických tenzorů je

$$\dim V^{[k]} = \tbinom{d}{k}\;. \tag{1.9}$$

Definice D1.3 (Projektor na antisymetrické tenzory)

Projektor ${}^{[k]}\boldsymbol{\delta} \in V^{[k]}_{[k]}$ projektující z prostoru V^k všech tenzorů stupně k na prostor antisymetrických tenzorů $V^{[k]}$ má tvar

$${}^{[k]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_k} = \boldsymbol{\delta}^{[\boldsymbol{a}_1}_{\boldsymbol{b}_1}\dots\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_k]}_{\boldsymbol{b}_k} = \boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1}_{[\boldsymbol{b}_1}\dots\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_k]} \qquad \circ$$

Tento projektor má následující užitečné vlastnosti:

Lemma V1.2 (Vlastnosti ${}^{[k]}\boldsymbol{\delta}$)

$$\boldsymbol{A}^{[\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k]} = {}^{[k]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_k}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_k} \tag{i}$$

$${}^{[k]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_k}\,{}^{[k]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_k} = {}^{[k]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_k} \tag{ii}$$

$${}^{[k]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_{k-l}\boldsymbol{a}_{k-l+1}\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_{k-l}\boldsymbol{r}_1\;\;\dots\;\;\boldsymbol{r}_l}\,{}^{[l]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{r}_1\;\;\dots\;\;\boldsymbol{r}_l}_{\boldsymbol{b}_{k-l+1}\dots\boldsymbol{b}_k} = {}^{[k]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_k} \tag{iii}$$

$${}^{[k]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_l\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_{k-l}}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_l\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_{k-l}} = \frac{(d-l)!\,l!}{(d-k)!\,k!}\;{}^{[l]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_l}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_l} \tag{iv}$$

$${}^{[k]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_k}_{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_k} = \dim V^{[k]} \tag{v}$$

$${}^{[k]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_{\sigma_1}\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_k}}_{\boldsymbol{b}_{\sigma_1}\dots\boldsymbol{b}_{\sigma_k}} = {}^{[k]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_k} \qquad \sigma \text{ je permutace } [1,\dots,k] \tag{vi}$$

□

Složky antisymetrického tenzoru lišící se pouze permutací indexů jsou závislé. Rozpis tenzoru do komponent však můžeme přepsat jako součet nezávislých komponent

$$\boldsymbol{A} = A^{a_1\dots a_k}\, \boldsymbol{e}_{a_1}\dots\boldsymbol{e}_{a_k} = \sum_{a_1<\dots<a_k} A^{a_1\dots a_k}\ k!\ \mathcal{A}(\boldsymbol{e}_{a_1}\dots\boldsymbol{e}_{a_k})\ . \quad (1.10)$$

Speciální roli hrají tzv. *totálně antisymetrické formy* a *tenzory* – objekty z prostorů $V_{[d]}$ a $V^{[d]}$, kde d je dimenze prostoru V. V tomto případě z (1.9) vidíme, že $\dim V_{[d]} = \dim V^{[d]} = 1$, jedná se tedy o triviální jednodimenziální prostory lineárně isomorfní s reálnými čísly $\mathbb{R}$. Neexistuje však kanonický isomorfismus. V těchto prostorech neexistuje přirozený výběr 'jednotky'. Rozpis (1.10) pro $\boldsymbol{\alpha}\in V_{[d]}$ dává

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_{a_1\dots a_d}\,\boldsymbol{e}^{a_1}\dots\boldsymbol{e}^{a_d} = \alpha_{1\dots d}\ d!\ \mathcal{A}(\boldsymbol{e}^1\dots\boldsymbol{e}^d)\ .$$

Mezi prostory $V_{[d]}$ a $V^{[d]}$ lze zavést operace inverze (reciprocity):

Definice D1.4 (Inverze totálně antisymetrických tenzorů)
Inverze totálně antisymetrických forem je definována:

$$\begin{aligned} {}^{-1}\ :\ V_{[d]} \to V^{[d]}\ ,\quad & \boldsymbol{\alpha}\to\boldsymbol{\alpha}^{-1} \\ \text{tak, že}\qquad & \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_d}\,\boldsymbol{\alpha}^{-1\,\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_d} = d!\ . \end{aligned}$$

Jedná se o invertovatelné zobrazení; opačné zobrazené budeme značit stejně:

$$\begin{aligned} {}^{-1}\ :\ V^{[d]} \to V_{[d]}\ ,\quad & \boldsymbol{\alpha}\to\boldsymbol{\alpha}^{-1} \\ \text{tak, že}\qquad & (\boldsymbol{\alpha}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{\alpha}\ . \end{aligned}$$ ◦

Vlastnosti inverze jsou:

Lemma V1.3 (Vlastnosti inverze)
Zúžíme-li částečně $\boldsymbol{\alpha}$ s $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$, dostaneme ${}^{[k]}\boldsymbol{\delta}$

$$\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_k\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_{d-k}}\,\boldsymbol{\alpha}^{-1\,\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_{d-k}} = (d-k)!\,k!\ {}^{[k]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\,\boldsymbol{b}_k}$$

Speciálně

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_d}\,\boldsymbol{\alpha}^{-1\,\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d} = d!\ {}^{[d]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d}_{\boldsymbol{b}_1\dots\,\boldsymbol{b}_d}\ , \\ &\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_d}\,\boldsymbol{\alpha}^{-1\,\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_d} = d!\ . \end{aligned}$$

Pro souřadnici invertovaného tenzoru dostáváme

$$\alpha^{-1\,1\dots d} = (\alpha_{1\dots d})^{-1}\ .$$ □

Pomocí projektoru ${}^{[d]}\boldsymbol{\delta}$ můžeme definovat determinant tenzoru typu $(1,1)$ (tj. lineárního operátoru na vektorech)

Definice D1.5 (Determinant)
Pro $\boldsymbol{A}\in V^1_1$ definujeme $\det\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}$ vztahem:

$$\det\boldsymbol{A} = {}^{[d]}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_d}_{\boldsymbol{b}_1\dots\,\boldsymbol{b}_d}\ \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{b}_1}_{\boldsymbol{a}_1}\dots\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{b}_d}_{\boldsymbol{a}_d} = \sum_\sigma \operatorname{sign}\sigma\ A^{\sigma_1}_1\dots A^{\sigma_d}_d\ .$$ ◦

1.5 Prostor symetrických tenzorů

Analogicky antisymetrizaci zavedeme symetrizaci tenzoru (viz též (1.5)):

Definice D1.6 (Symetrizace tenzorů)

Symetrizaci tenzoru ve vybraných indexech budeme označovat pomocí kulatých závorek

$$\boldsymbol{S}^{\dots(\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p)\dots} = \frac{1}{p!}\sum_{\text{permutace}\,\sigma} \boldsymbol{S}^{\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_1}\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_p}\dots}\,.$$

Pokud se přes nějaký index umístěný mezi závorkami symetrizovat nemá, vydělíme ho opět pomocí svislých čar: např. $\boldsymbol{S}^{\dots(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{ij}|\boldsymbol{b})\dots}$ značí symetrizaci přes indexy $\boldsymbol{ab}$. Symetrizaci přes všechny indexy budeme označovat pomocí symbolu $\mathcal{S}$, tj.

$$(\mathcal{S}\,\boldsymbol{S})^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p} = \boldsymbol{S}^{(\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_p)}\,. \qquad \circ$$

Dále definujeme

Definice D1.7 (Prostor symetrických tenzorů)

Prostor symetrických tenzorů typu $(k,0)$, $k=0,\dots,d$, označíme $V^{(k)}$. Jedná se o prostor tenzorů $\boldsymbol{S}$ pro které

$$\mathcal{S}\,\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}\,.$$

Obdobně definujeme prostor symetrických forem $V_{(l)}$ a prostor $V^{(k)}_{(l)} = V^{(k)}\otimes V_{(l)}$. $\circ$

Pro symetrický tenzor $\boldsymbol{S}$ a pro každou permutaci σ čísel $[1,\dots,k]$ platí

$$\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k} = \boldsymbol{S}^{\boldsymbol{a}_{\sigma_1}\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_k}}\,. \tag{1.11}$$

Dimenze prostoru symetrických tenzorů je

$$\dim V^{(k)} = \binom{k+d-1}{k}\,. \tag{1.12}$$

Definice D1.8 (Projektor na symetrické tenzory)

Projektor ${}^{(k)}\boldsymbol{\delta}\in V^{(k)}_{(k)}$ projektující z prostoru V^k všech tenzorů stupně k na prostor antisymetrických tenzorů $V^{(k)}$ definujeme

$${}^{(k)}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_k} = \boldsymbol{\delta}^{(\boldsymbol{a}_1}_{\boldsymbol{b}_1}\dots\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_k)}_{\boldsymbol{b}_k} = \boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1}_{(\boldsymbol{b}_1}\dots\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_k)} \qquad \circ$$

Tento projektor má následující užitečné vlastnosti:

Lemma V1.4 (Vlastnosti ${}^{(k)}\delta$)

$$\boldsymbol{S}^{(\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k)} = {}^{(k)}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_k}\,\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_k} \tag{i}$$

$${}^{(k)}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_k}\,{}^{(k)}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_k} = {}^{(k)}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_k} \tag{ii}$$

$${}^{(k)}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_{k-l}\boldsymbol{a}_{k-l+1}\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_{k-l}\boldsymbol{r}_1\quad\dots\quad\boldsymbol{r}_l}\,{}^{(l)}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{r}_1\quad\dots\quad\boldsymbol{r}_l}_{\boldsymbol{b}_{k-l+1}\dots\boldsymbol{b}_k} = {}^{(k)}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_k} \tag{iii}$$

$${}^{(k)}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_l\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_{k-l}}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_l\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_{k-l}} = \frac{(k+d-1)!\,l!}{(l+d-1)!\,k!}\;{}^{(l)}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_l}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_l} \tag{iv}$$

$${}^{(k)}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_k}_{\boldsymbol{r}_1\dots\boldsymbol{r}_k} = \dim V^{(k)} \tag{v}$$

$${}^{(k)}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_{\sigma_1}\dots\boldsymbol{a}_{\sigma_k}}_{\boldsymbol{b}_{\sigma_1}\dots\boldsymbol{b}_{\sigma_k}} = {}^{(k)}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}_1\dots\boldsymbol{a}_k}_{\boldsymbol{b}_1\dots\boldsymbol{b}_k} \qquad \sigma \text{ je permutace } [1,\dots,k] \tag{vi}$$

$\square$

I složky symetrického tenzoru jsou závislé pokud se liší pouze permutací indexů. Rozpis tenzoru do komponent můžeme napsat jako součet nezávislých komponent

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S} &= S^{a_1\dots a_k}\, \boldsymbol{e}_{a_1}\dots\boldsymbol{e}_{a_k} \\ &= \sum_{a_1\leq\dots\leq a_k} S^{a_1\dots a_k}\ n(a_1,\dots,a_k)\ \mathcal{S}(\boldsymbol{e}_{a_1}\dots\boldsymbol{e}_{a_k})\ ,\end{aligned} \tag{1.13}$$

kde $n(a_1,\dots,a_k)$ je počet vzájemně odlišných permutací indexů $a_1\dots a_k$.