Symetrie Lobačevského geometrie

NTMF060 – jaro 2020

Termín odevzdání řešení problému je 30. dubna 2020.
Řešení bude hodnoceno v rámci zkoušky.

Lobačevského geometrie v rovině je dána v polárních souřadnicích metrikou

$$\boldsymbol{g}_{\mathrm{L}} = \boldsymbol{d}r^2 + \sinh^2 r\, \boldsymbol{d}\varphi^2 \,. \tag{1}$$

Pro zobrazování Lobačevského roviny se často používá tzv. Poincarého kruhový model. Ten se dostane předefinováním radiální souřadnice vztahem

$$R = \tanh\frac{r}{2} \,. \tag{2}$$

Tato souřadnice nabývá hodnot z intervalu $(0, 1)$. Všechny body Lobačevského roviny tak můžeme zobrazit do kruhu o poloměru 1 v euklidovské rovině s polárními souřadnicemi R, φ.

(i) V jakém vztahu je při tomto zobrazení Lobačevského metrika $\boldsymbol{g}_{\mathrm{L}}$ k metrice euklidovské roviny

$$\boldsymbol{g}_{\mathrm{E}} = \boldsymbol{d}R^2 + R^2 \boldsymbol{d}\varphi^2 \quad ? \tag{3}$$

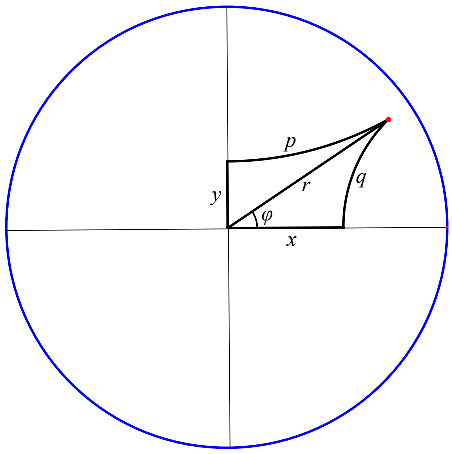
V tomto zobrazení kružnice $R = 1$ odpovídá nekonečnu, geodetiky Lobačevského roviny se zobrazují jako oblouky kolmé na kružnici $R = 1$ a úhly měřené v obou geometriích jsou stejné. Obrázek 1 využívá toto zobrazení.

V Lobačevského rovině nelze zavést souřadnice přesně odpovídající kartézským souřadnicím. Lze však zvolit dvě kolmé osy a z daného bodu na ně spustit kolmice. Vzdálenosti bodu od os označme p a q. Vzdálenosti pat kolmic od počátku x a y, viz obr. 1. Oproti euklidovské rovině, veličiny x, y se liší od p, q. Jejich vztahy k polárním souřadnicím jsou

$$\begin{aligned} \tanh x &= \tanh r \cos\varphi \,, & \sinh p &= \sinh r \cos\varphi \,, \\ \tanh y &= \tanh r \sin\varphi \,, & \sinh q &= \sinh r \sin\varphi \,, \end{aligned} \tag{4}$$

a vzájemné vztahy jsou

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{\sinh p}{\cosh q} \,, & \tanh p &= \tanh x \cosh y \,, \\ \sinh y &= \frac{\sinh q}{\cosh p} \,, & \tanh q &= \tanh y \cosh x \,. \end{aligned} \tag{5}$$



Obrázek 1: Souřadnice x, y, p, q, r, φ.

Ani jedna z dvojic x, y a p, q netvoří ortogonální souřadnice. Ortogonální pár souřadnic ale dostaneme v kombinaci x, q; netriviální výpočet (vyzkoušejte si) dá, že metrika v těchto souřadnicích má jednoduchý tvar

$$\boldsymbol{g}_{\mathrm{L}} = \boldsymbol{d}q^2 + \cosh^2 q\, \boldsymbol{d}x^2 \,. \tag{6}$$

(ii) Nalezněte vztahy mezi x, q a polárními souřadnicemi r, φ a to v obou směrech.

Z metriky (1) okamžitě odečteme, že $\boldsymbol{\partial}_\varphi$ je Killingův vektor generující rotaci kolem počátku. Na cvičení v minulém semestru jsme ověřili, že Killingovy vektory jsou také

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{X} &= \cos\varphi\,\boldsymbol{\partial}_r - \sin\varphi\coth r\,\boldsymbol{\partial}_\varphi\ ,\\
\boldsymbol{Y} &= \sin\varphi\,\boldsymbol{\partial}_r + \cos\varphi\coth r\,\boldsymbol{\partial}_\varphi\ ,\\
\boldsymbol{R} &= \boldsymbol{\partial}_\varphi\ .
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Tyto Killingovy vektory chápeme jako generátory akce grupy symetrie na Lobačovského rovině a odpovídají tak Lieově algebře grupy symetrie.

(iii) Nalezněte příslušné strukturní konstanty $c_{\mu\nu}{}^{\kappa}$ v bázi generátorů (7), tj., pro indexy $\mu,\nu,\kappa = X, Y, R$. Nalezněte Killingovu metriku $k_{\mu\nu}$.

(iv) Jakou signaturu má Killingova metrika a jaký kvadrát normy v Lieově algebře mají jednotlivé generátory symetrií? Odhadněte, jak charakterizuje znaménko kvadrátu normy typ symetrie.

(v) S pomocí teorie vyložené na přednášce spočtěte akci rotace $\mathcal{R}_{\Delta\varphi}$ – symetrie spojené s Killingovým vektorem $\boldsymbol{R}$ – na Killingův vektor tvaru

$$\boldsymbol{V} = V_X\boldsymbol{X} + V_Y\boldsymbol{Y}\ . \tag{8}$$

Podobně nalezněte akci symetrie $\mathcal{X}_{\Delta x}$ generované Killingovým vektorem $\boldsymbol{X}$ na Killingův vektor tvaru

$$\boldsymbol{V} = V_R\boldsymbol{R} + V_Y\boldsymbol{Y}\ . \tag{9}$$

Jaká je souvislost s odpovědí na předchozí otázku?

(vi) Nalezněte generátory symetrií $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{R}$ v souřadnicích x, q. S pomocí výsledku interpretujte význam těchto souřadnic.

Nepovinná část: Zkuste si podobnou diskuzi udělat v Lobačevského trojdimenzálním prostoru. I bez technických výpočtů zkuste odhadnout, kolik bude nezávislých generátorů symetrií, jakou signaturu bude mít Killingova metrika a jak bude souviset s typy symetrií?