24.4.20

Milí studenti,

první stránky budete znát, kvůli konvenci a "osvěžení" paměti (i zřejmě méně „abstraktní notaci") je také „předkládáme".

Úplně na závěr je začátek výpočtu Riemannova tenzoru obecného sféricky symetrického prostoročasu. Zkuste ho dopočítat se všemi složkami — pro Schwarzschildův prostoročas můžete pak srovnat s výsledky z přednášky z Relativity či třeba s MTW.

Výpočet Riem. tenzoru Vaidyovy (nediagonální) metriky představující sférickou "hvězdu" vyzařující nekoher. záření sfér. symetricky a přitom klesá její hmota $M(u)$, u retard. čas, je podrobně uveden ke konci.

Hlavní teoretická část je od ~~str.~~ listu 11 do 18

Pozdravy a na zdraví

Jiří Bičák

DIFERENCIÁLNÍ FORMY V GR

Základní myšlenky.

(důkazy obvykle nedělám).

(Podle skript W. Israele, 1970) — jen pro zopakování —

Tensor lze definovat jako multilineární fci vektorových argumentů:
např. tensor 2. řádu $T_{\alpha\beta}$ lze navzájem jednoznačně přiřadit bilineární skalární fci 2 vektorových argumentů:

$$T(\vec{u},\vec{v}) \equiv T_{\alpha\beta}\, u^\alpha v^\beta$$

Když specifikuji hodnoty $T(\vec{u},\vec{v})$ pro vš. $\vec{u}$ a $\vec{v}$ (stačí ve skutečnosti jen pro všechny dvojice vektorů nějaké base), mám tím definován $T_{\alpha\beta}$.
Výhoda: definice nezávislá na souř. (viz. specifikuji skaláry).

Diferenciální forma

je multilineární skalární fce asociována s tensorem, který je (efektivně) zcela antisymetrický ("completely skew").
Např., je-li $F_{\alpha\beta}$ lib. tensor 2. řádu, pak
2-forma je def. jako

$$\boxed{\Phi(d\vec{x}, d\vec{y}) \equiv 2!\, F_{\alpha\beta}\, dx^{[\alpha} dy^{\beta]}}$$

— za chvíli uvidíme důvody, proč je výhodné psát vektorové argumenty "$\vec{u},\vec{v}$" jako diferenciály.

— $\boxed{dx^{[\alpha} dy^{\beta]}} \equiv \frac{1}{2!}\left(dx^\alpha dy^\beta - dx^\beta dy^\alpha\right)$, takže

$$\phi(d\vec{x}, d\vec{y}) = \frac{2!}{2!} F_{\alpha\beta}\left(dx^\alpha dy^\beta - dx^\beta dy^\alpha\right) = (F_{\alpha\beta} - F_{\beta\alpha})\, dx^\alpha dy^\beta$$

(Tj. je-li $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$ .. antisym. tensor, je $\phi = 2F_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dy^\beta$)

Proto, že $\phi = (F_{\alpha\beta} - F_{\beta\alpha})\, dx^\alpha dy^\beta$, je vidět, že můžeme užít lib. tensoru (zde tensoru 2. řádu $F_{\alpha\beta}$); ovšem v přidružené formě hraje roli pouze antisymetrická část tensoru

1-forma odpovídá vektoru $\Theta(d\vec{x}) = A_\alpha\, dx^\alpha$

0-forma je skalár

Rovnost, součet a násobení číslem jsou definovány samozřejmým způsobem vždy pomocí asociovaného antisym. tensoru.

Vnější součin

("wedge product", nebo "exterior product")

vnější součin p-formy a q-formy je $(p+q)$-forma, kterou získáme tak, že vezmeme tensorový součin odpovídajících tensorů (tj. asociovaných s p-formou a s q-formou) a antisymetrisujeme jej.

Příklad:

2-forma $\phi(d\vec{x}, d\vec{y}) = 2!\, F_{\alpha\beta}\, dx^{[\alpha} dy^{\beta]}$; 1-forma $\Theta(d\vec{x}) = A_\alpha dx^\alpha$

Jejich vnější součin $\boxed{\psi \equiv \phi \wedge \Theta}$ je 3-forma

$$\boxed{\psi(d\vec{x}, d\vec{y}, d\vec{z}) = 3!\, F_{\alpha\beta} A_\gamma\, dx^{[\alpha} dy^\beta dz^{\gamma]},}$$

$$\begin{vmatrix} dx^\alpha & dx^\beta & dx^\gamma \\ dy^\alpha & dy^\beta & dy^\gamma \\ dz^\alpha & dz^\beta & dz^\gamma \end{vmatrix}$$

kde $dx^{[\alpha} dy^\beta dz^{\gamma]} \overset{\text{ozn.}}{\equiv} \frac{1}{3!}\big(+ dx^\alpha dy^\beta dz^\gamma - dx^\beta dy^\alpha dz^\gamma +$
$+ dx^\beta dy^\gamma dz^\alpha - dx^\alpha dy^\gamma dz^\beta +$
$+ dx^\gamma dy^\alpha dz^\beta - dx^\gamma dy^\beta dz^\alpha \big)$

~~obecný recept pro antisymetrisaci: členy s (+) vznikají cyklickou permutací viz $+\alpha\beta\gamma$ $+\beta\gamma\alpha$ $+\gamma\alpha\beta$ členy s (−) vznikají tak, že v předcházejícím členu s (+) spolu vždy prohodím indexy α a β (tj. první dva); ovšem stejně dobře to mohu dělat tak, že prohodím vždy prvé dva indexy v členu s (+) a dám (−). Toto očividně i pro obecný tensor – musím udělat vždy všechny členy s (+) – s cyklickou permutací všech indexů, ale s každým členem hned dát (−) člen, v nímž stále jsou prohozeny buď dva první indexy a nebo 2 indexy na dvou pevných místech.~~

Toto zřejmě neplatí obecně pro tensor 4. a dalšího řádu – to, co musím udělat, je vzít determinant ze složek – pak je vše antisym., ale můj recept pro už 4. řád nevede na determinant

Věta:

Jestliže α, β jsou formy stupně a, b, pak platí

$$\boxed{\alpha \wedge \beta = (-1)^{ab} \beta \wedge \alpha}$$

Tj. vnější součin antikomutuje, jestliže jsou oba faktory a, b liché; jinak komutuje.

Dokažte

Speciálně

$$\boxed{\theta \wedge \theta = 0}, \text{ jestliže } \theta \text{ je lichého stupně}$$

viz $(a \cdot b)$ je liché – součin lichého čísla s lichým

[Např. pro $\theta_1 = A_\alpha dx^\alpha$, $\theta_2 = B_\beta dy^\beta$

Pak $\theta_1 \wedge \theta_2 = 2!\, A_\alpha B_\beta\, dx^{[\alpha} dy^{\beta]} = \underbrace{(A_\alpha B_\beta - A_\beta B_\alpha)}_{\equiv C_{\alpha\beta}} dx^\alpha dy^\beta$

viz úkce souvisí s vekt. součinem

jasně je vidět, že bude význam pro integrování!

a jasně $\theta_1 \wedge \theta_2 = 0$, když $\theta_1 = \theta_2$

viz vekt. součin vektorů se sebou sam]

Avšak $f \wedge f = f^2$ pro 0-formu (tj. skalár)

a pro 2-formy je

$\phi \wedge \phi \longleftrightarrow F_{[\alpha\beta} F_{\gamma\delta]}$ což je obecně $\neq 0$.

$$\frac{1}{2!} \varepsilon_{\gamma\alpha\beta} C_{\alpha\beta} = C_\gamma$$

$$= , \quad \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

Vektrový součin má geometrický smysl jen v E_3 — viz Bishop & Goldberg i další

Vnější diferenciál ("Exterior differential")

Uvažujme tensorová pole v Riem. prostoru. Jim přidružené p-formy jsou pak skalárními poli, které závisí na p vektorových argumentech (tj. vektor. polích)

Vnější diferenciál p-formy je $(p+1)$-forma, kterou získáme tím, že provedeme parciální nebo kovariantní derivaci (nezáleží na tom kterou! - neboť antisymetrisací vypadnou Christoff. symboly) asociovaného tensoru p-tého řádu.

viz definice forem je nezáv. na existenci metriky

Př.:

Vnější diferenciál 2-formy $\phi = 2!\, F_{\alpha\beta}\, dx^{[\alpha} dy^{\beta]}$

je 3-forma

$$d\phi(d\vec{x}, d\vec{y}, d\vec{z}) = \left| \begin{array}{l} 3!\, \partial_\alpha F_{\beta\gamma}\, dx^{[\alpha} dy^\beta dz^{\gamma]} = \\ 3!\, F_{\beta\gamma,\alpha}\, dx^{[\alpha} dy^\beta dz^{\gamma]} = \end{array} \right.$$

$$= 3!\, F_{\beta\gamma;\alpha}\, dx^{[\alpha} dy^\beta dz^{\gamma]}$$

Pro skalární formu je:

$$df(d\vec{x}) = (\partial_\alpha f)\, dx^\alpha$$

Velmi užitečný je vzorec, který platí pro lib. formu Ω a skalár f:

$$\boxed{d(f\Omega) = f\, d\Omega + df \wedge \Omega}$$

Toto je ve skutečnosti speciálním případem obecné identity

$$\boxed{d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^a\, \alpha \wedge d\beta} \qquad a = \deg \alpha$$

Dále platí důležitá věta, že totiž vnější dif. z vnějšího diferenciálu je $\equiv 0$:

$$\boxed{d^2\Omega \equiv 0} \qquad \text{pro jakékoliv } \Omega$$

viz při druhém deriv. se objeví $\partial_\alpha \partial_\beta$, což vypadne s antisymetr. dx...

Diferenciály souřadnic

Když je vybrán určitý systém souřadnic $(x^1, \dots x^n)$, jsou funkce x^μ skalární pole.

(Toto jasné zmíněno při rigorósním zavádění souřadnic, vektorů, atd. – viz Kob. & Nom. například – x^μ jsou fce

„názorně si mohu představovat, že x^μ jsou dány jako fce nějakých parametrů p^μ –, které bezprostředně charakterisují bod variety" — ostatnice vektory „šipky"

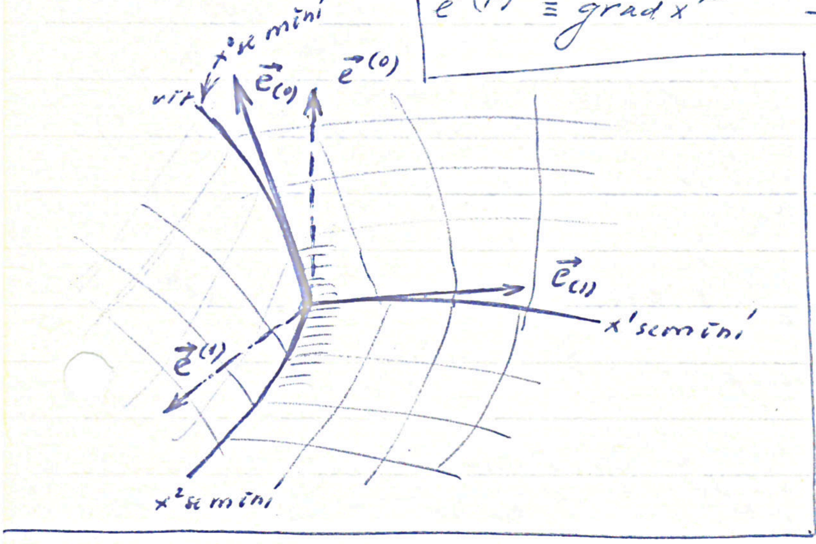
– zde se také – i v dalším – projeví výhoda definicí nezáv. na transf. souřadnic – stále pracujeme v jednicích souřadnicích

viz $r \rightsquigarrow 4\pi r^2 = \mathcal{S}$ ve Schw.

Když máme souřadný systém x^μ, pak zavádíme souřadné vektory base

$\vec{e}^{(\mu)} \equiv \mathrm{grad}\, x^\mu$ – tj. jde o kovariantní basi vektory kolmé k souř. plochám $x^\mu = \mathrm{const.}$ To je přirozená base, když je vybrán souř. systém x^μ – samozřejmě, když změním souřadnice, mění se i přirozená base

– ~~tato kovariantní base ovšem liší od RSSD65, neboť Kip má vektory normovány~~



Jejich (kovariantní) složky v tomto speciálním souř. systému jsou

$$e^{(\mu)}_{\alpha} = \delta^{\mu}_{\alpha}$$

(To jasné – viz kovariantní složky A_α vektoru $\vec{A}$ definují pomocí $\vec{A} = A_\alpha \vec{e}^{(\alpha)}$

~~– viz toto není pravda u RSSD66, neboť tam jsou $\vec{e}^{(\mu)}$ normovány, takže v daném souř. systému jsou jejich kovar. složky rovny~~

~~$\vec{e}^{(\mu)}_{\alpha} = \delta^{\mu}_{\alpha} \sqrt{|g^{\mu\mu}|}$ (nesčítá se přes μ – viz str. 48~~

~~výpisky RSSD 66)~~

Moderně: $X = u^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ $\partial^\alpha f$; $\rightarrow df(X) = X(f)$; x^1 $dx^1(dy) = dy^\alpha \frac{\partial x^1}{\partial x^\alpha} = \delta^1_\alpha dy^\alpha$

$df(\vec{u}) = \partial_\alpha f u^\alpha$

Nyní vnější diferenciál 0-formy, tj. skaláru x^1 je

$$\boxed{dx^1(d\vec{y})} = (\partial_\alpha x^1)\, dy^\alpha = \frac{\partial x^1}{\partial x^\alpha} dy^\alpha = \delta^1_\alpha\, dy^\alpha = dy^1$$

podle def. vnějšího dif.

1-forma

„d" jen, že jde o "krátký" vektor

toto je lib. vektor – viz vždy píšeme jako $d\underline{y}^\alpha$ – tj. argument 1-formy, která vznikne vnějším deriv. 0-formy x^1

Ze získaného vztahu

$$dx^1(d\vec{y}) = \underbrace{\delta^1_\alpha}_{=\vec{e}^{(1)}_\alpha} dy^\alpha \quad \text{vidíme, že}$$

|| vnější dif. x^1 je 1-forma přidružená k $\vec{e}^{(1)}$ ||

(Přitom se zde jasně objevuje "klasická" definice duální base – viz duální base je tvořena formami, které reprodukují vždy příslušnou kontravar. složku vektoru – zde dx^1 (jako forma právě!) přiřazuje vektoru $d\vec{y}$ jeho prvou složku dy^1!

Moderní řečeno

– kontravar. base je $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$; kovariantní base je dx^μ

– přitom dx^μ je vzájemně jednoznačně přiřazeno k $\vec{e}^{(\mu)}$.)

Israel: ve vztahu $dx^1(d\vec{y}) = \delta^1_\alpha dy^\alpha$ je symbol "dx^1" užit v novém a zcela jasném smyslu. Zatímco dříve to bylo prostě číslo, tj. složka vektorového argumentu – krátce vektoru $d\vec{x}$ (který spojuje dva blízké body), zde "dx^1" značí 1-formu, tj. funkci ~~vektor~~, přičemž argumentem je lib. vektor dy^α.

Avšak když vektorovým argumentem je právě $d\vec{x}$ (což se normálně užívá), je rozdíl ~~mezi~~ "dx^1" jako fce a jako čísla nepodstatný při počítání – a toto duální užívání symbolu dx^μ je velmi užitečné a málokdy vede k potížím.

$dx^1(d\vec{x}) = dx^1$ ... jde vlastně o značení fce stejně jako funkční hodnoty.

V rigorózní geometrii

Lineární dif. forma na M

Zobrazení, které každému $m \in M$ přiřadí lin. formu ω_m na tečném prostoru $T_m M$ (a co je forma ve vekt. prostoru víme)

ω_m vytváří $T_m^* M$ (duální prostor k T_m)

Příklad – hladká (C^∞) fce f na varietě $f(x^\alpha)$

její diferenciál je def:

$$df(\underline{t}) = \underline{t}(f) \quad \text{je to 1-forma}$$

mohu psát

$$\underline{t} = t^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Rightarrow df(\underline{t}) = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} t^\alpha$$

$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ je baze souřadnicová v $T(M)$ ... $\alpha = 1, \dots n$

k ní duální je dx^α ... $f = x^\alpha$ ... α pevné

$$dx^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta^\alpha_\beta$$

baze dx^α => každá forma

$$\omega = \sum \omega_\alpha dx^\alpha \Rightarrow \omega_\alpha dx^\alpha$$

souřadnice formy ω

pro $\omega = df$: $df = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$ ω_α

Příklad:

Uvažujme určité kartézské souřadnice x^1, x^2, x^3 v E_3. Máme k dispozici 3 skaláry, tj. 3 0-formy a z nich můžeme vyrobit 3 1-formy dx^1, dx^2, dx^3 vnějším derivováním – z nich pak 3-formu vnějším násobením:

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

Tato 3-forma přiřazuje lib. 3 vektorům $d\vec{u}, d\vec{v}, d\vec{w}$ číslo, které je rovno objemu 3-cely vytvořené těmito vektory:

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 (d\vec{u}, d\vec{v}, d\vec{w}) = \quad \text{podle def. viz } dx^1 \leftrightarrow \delta^1_\alpha,\ dx^2 \leftrightarrow \delta^2_\alpha,\ dx^3 \leftrightarrow \delta^3_\alpha$$

$$= 3!\, \delta^1_\alpha \delta^2_\beta \delta^3_\gamma \, du^{[\alpha} dv^\beta dw^{\gamma]}$$

$$= \boxed{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, du^\alpha dv^\beta dw^\gamma}$$

Ovšem, když si zvolíme $d\vec{u}, d\vec{v}, d\vec{w}$ podél souř. os, tj. $d\vec{u} = (dx^1, 0, 0)$, $d\vec{v} = (0, dx^2, 0)$, $d\vec{w} = (0, 0, dx^3)$, pak dostáváme

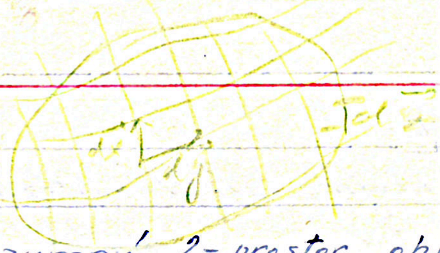
$$\boxed{dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \underbrace{(\ldots)}_{\text{toto se obv. vůbec nepíše}} = \underbrace{dx^1 dx^2 dx^3}_{\text{normální součin čísel}}}$$

[illegible]

tj. dostaneme standardní tvar elementu objemu.

Musíme pouze mít na paměti, že $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = dx^1 dx^2 dx^3$ je numerický vztah, který platí pro speciální (ale přirozenou) volbu vektorových argumentů.

Integrály



Nechť V_2 je nějaký rozumný 2-prostor ohraničený ∂V_2 – což je jedna (případně více než jedna) uzavřená křivka. Dělá jen intuitivně. Představme si V_2 rozděleno libovolným spojitým způsobem do infinitesimálních 2-ul. $(d\vec{x}, d\vec{y})$ a ∂V_2 rozděleno pomocí infinitesimálních úseček $d\vec{z}$.

Pak má Stokesova věta tvar: (přitom ovšem dimenze prostoru, v němž je V_2 může být lib.)

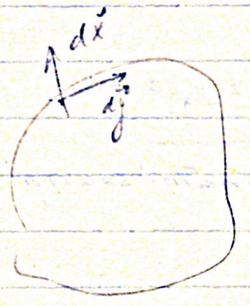
$$(*) \qquad 2! \iint_{V_2} \partial_\lambda A_\mu \, dx^{[\lambda} dy^{\mu]} = \int_{\partial V_2} A_\mu \, dz^\mu ,$$

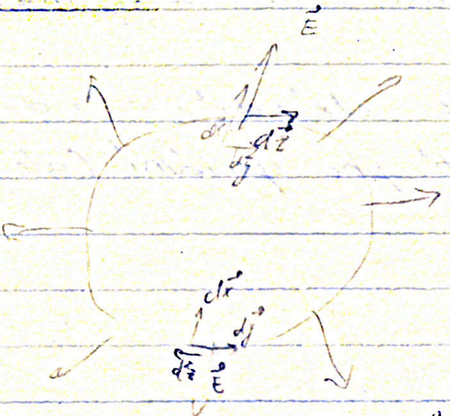
kde je třeba předepsat vhodný smysl $d\vec{z}$ a $d\vec{x}, d\vec{y}$ – tj. orientaci – viz moje pozn. o Gauss. a Stokesově větě ze Synga
(Podmínka je, že – je-li $\vec{E}$ lib. vektor mířící ven ze V_2 –

$\underbrace{(\vec{E}, d\vec{z})}_{\text{jako dvojice}}$ je stejně orientováno jako $(d\vec{x}, d\vec{y})$, tj.

$$\varepsilon(d\vec{x})\, \varepsilon(d\vec{y})\, E_\lambda dz_\mu \, dx^{[\lambda} dy^{\mu]} > 0 \text{ na } \partial V_2$$

toto ε: -1 …, $+1$, 0 podle toho, je-li vektor "v ním" stojící: prostorový, časový, nulový)





$$\int \mathrm{rot}\, \vec{A} \, d\vec{S} = \int \vec{A} \, d\vec{z}$$

$$\int \varepsilon_{ijk} A_{k,j} \, dS_i$$

$$dS_i = \varepsilon_{irs} \, dx_r \, dy_s$$

$$\varepsilon_{ijk} A_{k,j} \, dS_i = \underbrace{\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{irs}}_{\delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr}} A_{k,j} \, dx_r \, dy_s$$

$$= A_{s,r} \, dx_r \, dy_s - A_{r,s} \, dx_r \, dy_s = \partial_r A_s (dx_r dy_s - dx_s dy_r)$$

Maxwellovy rovnice pomocí forem

$dx^\alpha \wedge dy^\beta = 2!\, dx^{[\alpha} dy^{\beta]} = dx^\alpha dy^\beta - dx^\beta dy^\alpha$

$$\Phi = F_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dy^\beta$$

$$*\Phi = F^*_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dy^\beta, \quad F^*_{\alpha\beta} \text{ duální k } F_{\alpha\beta}$$

Maxw. r.

$$d\Phi = 0,$$

$$d\Phi^* = 0. \quad d(*\phi) = 0$$

$$\Phi = dA. \longrightarrow \text{vektorový potenciál}$$

$$d\Phi = d^2 A \equiv 0$$

Podrobně:

Tensoru $F_{\alpha\beta}$ přiřadíme

$$\Phi(dx, dy) = 2!\, F_{\alpha\beta}\, dx^{[\alpha} dy^{\beta]} = 2!\, F_{\alpha\beta} \tfrac{1}{2}(dx^\alpha dy^\beta - dx^\beta dy^\alpha)$$

Pak série Maxw. rovnic:

$$\boxed{d\Phi = 0}$$

viz podle [sracle] vždy nějaký derivační index

níž $\quad d\Phi = 0 \Rightarrow 3!\, F_{\alpha\beta,\gamma}\, dx^{[\gamma} dy^\alpha dz^{\beta]} = 0$

$$\Rightarrow (F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} - F_{\beta\alpha,\gamma} - F_{\alpha\gamma,\beta} - F_{\gamma\beta,\alpha})\, dx^\gamma dy^\alpha dz^\beta$$

cyklicky a pak (2. řádka) vždy prohazují $\alpha \leftrightarrow \beta$ v každém členu z 1. řádky

sečtu se – viz $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$

$$\Longrightarrow 2(F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta})\, dx^\gamma dy^\alpha dz^\beta = 0$$

Vhodně zvolíme dx, dy, dz, např. $dx = (dx^0, 0, 0, 0)$
$dy = (0, dy^1, 0, 0)$
$dz = (0, 0, dz^2, 0)$

atd.

Odtud dostaneme

$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = F_{[\alpha\beta,\gamma]\text{cykl.}} = 0$$

tj. 1 sada Maxw. rovnic

Je známo, že $F_{[\alpha\beta,\gamma]\text{cykl.}} = 0 \iff F^{*}_{\alpha\beta,}{}^{\beta} = 0$

Podobně ovšem platí $F_{\alpha\beta,}{}^{\beta} = 0 \iff F^{*}_{[\alpha\beta,\gamma]\text{cykl.}} = 0$
pro 2. sadu Maxw. rovnic

tedy tato 2. sada pomocí forem je

$$\boxed{d\,{}^{*}\Phi^{*} = 0} \;,$$

kde ${}^{*}\Phi^{*} = 2!\, F^{*}_{\alpha\beta}\, dx^{[\alpha} dy^{\beta]}$

Zavedení 4-potenciálu $A_{\mu} \longrightarrow A = A_{\mu}\, dx^{\mu}$
1-forma

$$\Phi = 2\,dA$$

tj. $\Phi(d\vec{x}, d\vec{y}) = 2!\, A_{\alpha,\beta}\, dx^{[\beta} dy^{\alpha]} =$

$$= 2A_{\alpha,\beta}\,(dx^{\beta} dy^{\alpha} - dx^{\alpha} dy^{\beta}) =$$

$$= 2\,(A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta})\, dx^{\alpha} dy^{\beta}$$

ale $\Phi = 2!\, F_{\alpha\beta}\, dx^{[\alpha} dy^{\beta]} = F_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha} dy^{\beta}$

$\Rightarrow F_{\alpha\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}$

Maxwellovy rovnice s pravou stranou

$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\mu$, $\quad F_{[\mu\nu;\lambda]\,\text{cykl.}} = 0$

Def. $\boxed{{}^*J_{\varrho\sigma\tau} = \varepsilon_{\xi\varrho\sigma\tau} J^\xi}$ ✓ $\Rightarrow J^\xi = -\frac{1}{3!}\varepsilon^{\xi\varrho\sigma\tau}\,{}^*J_{\varrho\sigma\tau}$ (+)

viz $J^\xi = -\frac{1}{3!}\varepsilon^{\xi\varrho\sigma\tau}\,{}^*J_{\varrho\sigma\tau} =$
$= -\frac{1}{3!}\varepsilon^{\xi\varrho\sigma\tau}\underbrace{\varepsilon_{\xi\varrho\sigma\tau}}_{=+\varepsilon_{\alpha\varrho\sigma\tau}} J^\alpha = \frac{-1}{3!}3!\,\delta^\xi_\alpha J^\alpha = \underline{J^\xi}$ ✓

$\boxed{{}^*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2!}\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}F^{\varrho\sigma}}$

$\Rightarrow$ ~~$F_{\mu\nu} = \ldots$~~ $= \frac{1}{2!}F^{\varrho\sigma}\varepsilon_{\varrho\sigma\mu\nu}$ ✓

$$\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\varepsilon_{\kappa\lambda\varrho\sigma} = -2\left(\delta^\mu_\kappa\delta^\nu_\lambda - \delta^\mu_\lambda\delta^\nu_\kappa\right) ✓$$

$$\Rightarrow \varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} = -2\big(\underbrace{\delta^\mu_\mu\delta^\nu_\nu}_{16} - \underbrace{\overbrace{\delta^\mu_\nu\delta^\nu_\mu}^{\delta^\mu_\mu}}_{4}\big) = \underline{-24} ✓$$

$$\Rightarrow \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\,{}^*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2!}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\underbrace{\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}}_{=\varepsilon_{\varrho\sigma\mu\nu}}F^{\varrho\sigma}$$

$$= \frac{-2}{2!}\left(\delta^\alpha_\varrho\delta^\beta_\sigma - \delta^\alpha_\sigma\delta^\beta_\varrho\right)F^{\varrho\sigma} =$$

$$= -\left(F^{\alpha\beta} - F^{\beta\alpha}\right) = -2F^{\alpha\beta}$$

$$F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\,{}^*F_{\mu\nu} \quad (\times)$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\,{}^*F^{\mu\nu}} ✓$$

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \frac{4\pi}{c}J^\alpha$$

$(\times) \Rightarrow$ (+) nahoře

$$-\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\,{}^*F_{\mu\nu;\beta} = \frac{4\pi}{c}\left(-\frac{1}{3!}\right)\varepsilon^{\alpha\varrho\sigma\tau}\,{}^*J_{\varrho\sigma\tau} \quad \Big/ \times \varepsilon_{\alpha\gamma\delta\varepsilon}$$

$\delta^\alpha_\mu = -\frac{1}{3!}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\varrho}\varepsilon_{\mu\beta\lambda\varrho}$ ✓, $\quad \delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu - \delta^\alpha_\nu\delta^\beta_\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\varrho}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\varrho}$

Pak

$$\underbrace{\frac{1}{2}\ \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\gamma\delta\varepsilon}}_{= -\delta^{\beta\mu\nu}{}_{\gamma\delta\varepsilon}}\ {}^*F_{\mu\nu,\beta} = \frac{4\pi}{c}\frac{1}{3!}\ \underbrace{\varepsilon^{\alpha\varrho\sigma\tau}\varepsilon_{\alpha\gamma\delta\varepsilon}}_{-\delta^{\varrho\sigma\tau}{}_{\gamma\delta\varepsilon}}\ {}^*J_{\varrho\sigma\tau}$$

kde $\delta^{\alpha\beta\gamma}{}_{\mu\nu\lambda} = \begin{cases} +1 & \alpha\beta\gamma \text{ je sudou perm. } \mu\nu\lambda \\ -1 & \text{- - - lichou - - -} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

$${}^*F_{[\gamma\delta,\varepsilon]\,\text{cykl.}} = \frac{4\pi}{c}\frac{1}{3!}\,{}^*J_{[\gamma\delta\varepsilon]\,\text{cykl.}}$$

$$\Rightarrow \boxed{d\,{}^*\Phi = \frac{4\pi}{c}\,{}^*J}$$

$${}^*\Phi = 2!\,{}^*F_{\alpha\beta}\,dx^\alpha \wedge dy^\beta$$

$$dx^{[\alpha}\,dy^{\beta]}$$

$${}^*J = 3!\,{}^*J_{\varrho\sigma\tau}\ dx^{[\varrho}dy^\sigma dz^{\tau]}$$

$$= \varepsilon_{\alpha\varrho\sigma\tau}J^\alpha\,3!\,dx^{[\varrho}dy^\sigma dz^{\tau]}$$

$$= \varepsilon_{\alpha\varrho\sigma\tau}J^\alpha\ dx^\varrho \wedge dx^\sigma \wedge dx^\tau$$

10