

Riemannovská geometrie.

Úvod - přehled výsledků

Tradiční přístup užívá Christ. symboly - diff. formy umožňují nahradit tento neobratný starý přístup mnohem elegantnějším - v podstatě nýdč a nic jiného než o přepis pomocí Ricciho rotačních koeficientů.

BSY

Nechť $\vec{e}^{(1)} \dots \vec{e}^{(m)}$ je lib. množina m ^(lin.) lineárních vektorových poli, které tvoří úplnou basi (frame) v každém bodě (je to v každé jasné ukázáno - kovariantní basi).

Ricciho rotační koeficienty γ_{bc}^a přidružené $\vec{e}^{(a)}$ jsou množinou m^3 čísel (skalárů při souřadných transformacích), které udávají složky (vzhl. k n -ádci) kovariantní derivací vektorů $\vec{e}^{(a)}$ (viz rovnice (+) dále na str.)

(13b)

A ukazuje se, že Riemannův tenzor lze vyjádřit pomocí γ_{bc}^a a jejich 1. parciálních der.

to znamená
= greek letters
- always careful

V nové formulaci budeme především uvažovat množinu 1-form $\Theta^a(dx) \equiv \vec{e}^{(a)}_x dx^x$ asociovanou k basi $\vec{e}^{(a)}$ (viz α, β, \dots značí souřadnice a tenzorové složky vzhledem k těmto souřadnicím; indexy $a, b, c \dots$ se vztahují k basi $\vec{e}^{(a)}$ (resp. $\vec{e}^{(a)}$) tj. označují o kolikátý vektor jde a chovají se jako skaláry při souřadnicových transformacích). (2) m^2 1-form konexe $\omega^a_b \equiv \gamma^a_{bc} \theta^c$ a (3) 2-formy křivosti $\Omega^a_b \equiv \frac{1}{2} R^a_{bcd} \theta^c \wedge \theta^d$

kde R^a_{bcd} jsou tetrádové (obecně m -ádové) složky Riem. tenzoru. (Už teď jsou vidět výhody: ω^a_b i Ω^a_b nemají vůbec indexy c, d , které jsou zde "zbytečné" a přitom se řádná informace nežtrátí)

Podstata celé Riem. geometrie je shrnuta v "rovnících struktury", které spolu svazují vnější diferenciály $d\theta^a$ a ω^a_b , a $d\omega^a_b$ s Ω^a_b .

Tradiční přístup je zahrnut jako speciální případ:
 m -nády musí být kolmé na souřadnicové síti,

tj. $\vec{e}^{(a)} = \text{grad } x^a$ - pak γ^a & γ_b jsou obyč. Christ. symboly

Průběh matř formalismus umožňuje i jiné volby $\vec{e}^{(a)}$, které mají
 bezprostřední fyzikální či geometrický význam, např. ortonormální
tetrády, které se posouvají podél světlicar hmoty, nebo Sachsovy
nulové tetrády, které jsou definovány blavním nulovým
 vektorem Riem. tenzoru.

Navíc k pojmovým výhodám jsou ovšem i obrovské výhody
početní, které vznikají z toho, že v obou uvedených případech
 (tj. ortonorm. base podél hmoty a Sachsovy tetrády) je matice
 $\vec{e}^{(a)}, \vec{e}^{(b)}$ konstantní - což zjednodušuje spousta výpočtů.

Základní 1-formy

$\ell^{(a)}$ ← složky
 ↗ orthonormální vektorové

Uvažujme m lineárně nezáv. vekt. poli $\vec{e}^{(a)}(x^M)$ (viz zde
 uá kontrav. - normální base); $\ell^{(a)}$ jsou kontravariantní složky těchto
 vektorů. Definujeme "frame komponenty" (tetrádové složky
 ve 4 dimenzích) lib. tenzoru $T_{\alpha\beta} \dots$:

$$T_{ab} \dots \equiv T_{\alpha\beta} \dots \ell^{(a)} \ell^{(b)} \dots$$

Zavedeme matici skalárního součinu vektorů base:

$$g_{ab} \equiv \vec{e}^{(a)} \cdot \vec{e}^{(b)},$$

tj. rozepsáno

$$g_{ab} = g_{\alpha\beta} \ell^{(a)} \ell^{(b)}$$

g_{ab} jsou tedy tetrádové složky metrického tenzoru $g_{\alpha\beta}$.

$\vec{e}^{(a)}$ jsou n. z. v. $\Rightarrow g_{ab}$ má inverzní sym. matici g^{ab}

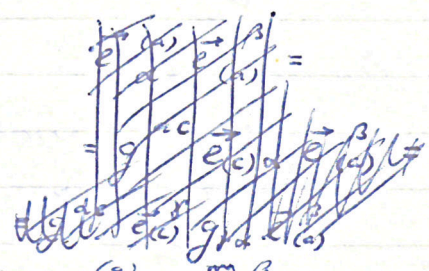
f. $g^{ab} g_{ac} = \delta_c^b$

Definujeme dualní basi

(1) $\vec{e}^{(a)} \equiv g^{ab} \vec{e}^{(b)}$

$\vec{e}^{(a)} \cdot \vec{e}^{(b)} = \delta_b^a$

(f. $e^{(a)}, e^{(b)}$ jsou inverzní maticí)



Plati' vynásob (1) $\vec{e}^{(c)}$

$\vec{e}^{(c)} \vec{e}^{(a)} = g^{ab} \vec{e}^{(a)} \vec{e}^{(b)} = \delta_c^a$; $e^{(a)}_d e^{(b)}_a = \delta_d^b$

Střídmo je konzistentní indexování pomocí g_{ab}, g^{ab}

Zavedeme 1-formy dualní basi

asociované s těmito vektory \Rightarrow dle na str (13')

(1) $\Theta^a = e^{(a)}_d dx^d$

$g_{ab} = g_{\mu\nu} e^{(a)\mu} e^{(b)\nu} / e^{(a)}_r$
 $e^{(b)r} = e^{(b)\mu} (e^{(a)}_\mu)_r$
 $a = 1, \dots, n \Rightarrow \delta^a_a$

repsat ve tvaru $\Theta^a(dx) = \vec{e}^{(a)} \cdot d\vec{x} = e^{(a)}_d dx^d$

(2) $dx^d = e^{(a)d} \Theta^a$

Tyto vztahy (1), (2) lze interpretovat dvěma způsoby: maximálněmi na str. (3b) - tj. jako numerické vztahy, přičemž $d\vec{x}$ ($= dx^d$) je prostě lib. vektorový argument dosazený do formy Θ^a tj. $\Theta^a(dx) = e^{(a)}_d dx^d$; anebo je chápeme jako lineární vztah mezi formami Θ^a a dx^d - viz $dx^d(dx) = dx^d$

Z úvah na str. (3b) - viz zde - je jasné, že

$\Theta^d = dx^d$, když $e^{(a)d} = \delta^a_d$, tj. jde-li o přirozenou

basi (grad x^d).

Θ^a tvoří basi všech 1-form

Jelikož $\vec{e}^{(a)}$ tvoří úplnou vektorovou basi, tvoří Θ^a basi všech 1-form.

Explicitě: 1-forma α již dříve zavedená jako $\alpha = A_d dx^d$

ale $\alpha = A_d dx^d = A_d e^{(a)d} \Theta^a = A_a \Theta^a$

f. lib. 1-forma α se může psát jako lineární kombinace form Θ^a

$\Theta^a \wedge \Theta^b$ tvoří bázi všech 2-formů

Podobně platí

$$dx^a = e_{(a)}^\alpha \theta^\alpha$$

$$\boxed{2! F_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = F_{ab} \Theta^a \wedge \Theta^b}$$

Pro lib. 2-formu \Rightarrow $\Theta^a \wedge \Theta^b$ tvoří bázi všech 2-formů a snadno lze pokračovat dále.

(Speciálně při přirození bázi jsou bázemi $dx^a, dx^a \wedge dx^b, \dots$)

Vyjádření intervalu pomocí forem:

Platí $g_{ab} = g_{\alpha\beta} e_{(a)}^\alpha e_{(b)}^\beta$ a $\Theta^a = e_{(a)}^\alpha dx^\alpha$

$$\Rightarrow ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{ab} \Theta^a \Theta^b$$

$ds(dx) = g_{ab} \Theta^a(dx) \Theta^b(dx)$
 nyní $g_{ab} \Theta^a \Theta^b = g_{\alpha\beta} e_{(a)}^\alpha e_{(b)}^\beta \cdot e_{(a)}^\alpha dx^\alpha e_{(b)}^\beta dx^\beta =$
 $= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$

záměna indexů α, β pomocí δ

Příklad - Gaussovské polární souřadnice ρ, φ na nějakém 2-prostoru (tj. ploše).

Metrika má tvar:

$$\boxed{ds^2 = d\rho^2 + [f(\rho, \varphi)]^2 d\varphi^2}$$

(když např. $f = \rho$, jde o $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$ - tj. polární souřadnice v rovině; jestliže $f = \sin \rho$, pak $ds^2 = d\rho^2 + \sin^2 \rho d\varphi^2$ - pak, když si položíme $\rho = \vartheta$, máme $ds^2 = 1(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$, tj. polární souřadnice na jednotkové kouli)

Za $\vec{e}_{(1)}, \vec{e}_{(2)}$ zvolíme jednotkové vektory podél souř. os ρ, φ (to není přit. báze ta má složený δ !)

$$\text{j. } \vec{e}_{(1)} = \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}, 0 \right), \vec{e}_{(2)} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \right) = \left(0, \frac{1}{f} \right)$$

takže opravdu - např. $\vec{e}_{(2)} \cdot \vec{e}_{(2)} = g_{\alpha\beta} \vec{e}_{(2)}^\alpha \vec{e}_{(2)}^\beta = g_{22} \left(\frac{1}{f} \right)^2 = f^2 \frac{1}{f^2} = 1$

Že jde jasně o 1-formu je vidět i z toho, když se
ze vztahu

$$D\vec{e}_{(b)} = \omega^c_b \vec{e}_{(c)} \quad \text{formy } \omega^c_b \text{ vyjádří}$$

(to se musí vynásobit skalárně obě strany $\vec{e}_{(a)}$, užít $\vec{e}_{(a)}\vec{e}_{(a)} = \delta^a_c$
 $\Rightarrow D(\vec{e}_{(a)}\vec{e}_{(a)}) = 0$; pak najde (viz (13))

$$\omega^a_b = -e_{\beta j}^{(a)} e_{(b)}^{\beta} dx^j \quad (+)$$

zde by se podrobněji mohl psát $\omega^a_b(dx)$

myní Ricciho rotační koef. se obr. definují jako

skaláry! $\leftarrow \gamma^a_{bc} \equiv -e_{\beta j}^{(a)} e_{(b)}^{\beta} e_{(c)}^j$

takže pro ω^a_b máme:

$$\omega^a_b = \gamma^a_{bc} \Theta^c$$

$$\Theta^c = e_{\beta}^{(c)} dx^{\beta}$$

je o rozložení 1-formy konexe - ω^a_b
do base Θ^c - což opět 1-formy

Z(+) po úpravách \Rightarrow

$$D\vec{e}_{(a)} = -\omega^a_b \vec{e}_{(b)}$$

(Tj. pro parametrizační 1-formy konexe určují
 $D\vec{e}_{(a)}$ i $D\vec{e}_{(a)}$ a jsou lin. kombinací base jednoforem
 $\Theta^a = \vec{e}_{(a)} dx^a$ s koeficienty, lit. jsou rovny Ricciho
 rotačním koeficientům)

Výsledkem je: $D\vec{e}^{(b)} = \omega^c_b \vec{e}^{(c)} \Big|_{\vec{e}^{(a)}}$ ✓

$$\vec{e}^{(a)} D\vec{e}^{(b)} = \omega^c_b \underbrace{\vec{e}^{(c)}}_{\delta^a_c} \vec{e}^{(a)}$$

ale $D(\vec{e}^{(a)} \vec{e}^{(b)}) = \vec{e}^{(a)} D\vec{e}^{(b)} + \vec{e}^{(b)} D\vec{e}^{(a)} = 0$

číslo; kov. der. = normální ... protože to číslo je $\delta^a_b = \text{konst}$

$$\Rightarrow -\vec{e}^{(b)} D\vec{e}^{(a)} = \omega^a_b$$

$$\omega^a_b = -\vec{e}^{(b)} D\vec{e}^{(a)} = -e^{(b)\beta} [D\vec{e}^{(a)}]_\beta = -e^{(b)\beta} e_{\beta;\gamma}^{(a)} dx^\gamma$$

$$= -e_{\beta;\gamma}^{(a)} e^{(b)\beta} dx^\gamma$$

$\omega^a_b(dx)$

potom $\gamma^a_{bc} = -e^{(a)\beta} e_{\beta;\gamma}^{(b)} e^{(c)\gamma}$ ✓

vlastně
nejde
kov. der. base

$$\omega^a_b = \gamma^a_{bc} \theta^c \quad \left(= -e^{(a)\beta} e_{\beta;\gamma}^{(b)} \underbrace{e^{(c)\gamma} e_{\mu}^{(c)} dx^\mu}_{\delta^{\gamma\mu}} \right)$$

"dx"

$$\omega^a_b = -\vec{e}^{(b)} D\vec{e}^{(a)} \Big|_{\vec{e}^{(b)}}$$

$$\vec{e}^{(b)\beta} \omega^a_b = -\vec{e}^{(b)\beta} \left[\vec{e}^{(a)} e_{\beta;\gamma} dx^\gamma \right] = -\vec{e}^{(a)\beta} \delta_{\beta\gamma} dx^\gamma$$

$$= -D\vec{e}^{(a)}_{\beta}$$

$$\Rightarrow D\vec{e}^{(a)} = -\omega^a_b \vec{e}^{(b)}$$

viZ:

$$g_{ab} = g_{\alpha\beta} e^{(a)\alpha} e^{(b)\beta} \Big|_{e^\gamma}$$

$$e^{(b)\beta} = e^{(b)\alpha} \underbrace{e^{(a)\alpha} e_{\alpha\gamma}^{(a)}}_{\delta^{\alpha\gamma}}$$

$$\text{musí} = \delta^{\alpha\gamma}$$

- Vyjádření rovnice $g_{ab} = \vec{e}_{(a)} \cdot \vec{e}_{(b)}$

a vezmeme její diferenciál (zde je jedno, zda tento "diferenciál" interpretujeme jako kovariantní, obyčejný a nebo vnější dif., neboť každé g_{ab} spojenými a, b je skalár).

vyjdeš $\rightarrow dg_{ab} = Dg_{ab} = \vec{e}_{(a)} D\vec{e}_{(b)} + \vec{e}_{(b)} D\vec{e}_{(a)} = \underbrace{\vec{e}_{(a)} \cdot \vec{e}_{(c)}}_{=g_{ac}} \omega^c_b + \underbrace{\vec{e}_{(b)} \cdot \vec{e}_{(c)}}_{=g_{bc}} \omega^c_a$

$dg_{ab} = \omega_{ab} + \omega_{ba}$

(vzhledně je d() interpretovat jako "vnější" dif. - ovšem se skaláru, takže je to obyčejný diferenciál a výsledkem ovšem musí být 1-forma - což je - věz $\omega_{ab} + \omega_{ba}$)

\Rightarrow pozn.: symmetrisované 1-formy $\omega_{(ab)}$ jsou vnějšími diferenciály 0-formy g_{ab} .

Souřadnicové (přirozené) base.

Chceme ukázat, že v předchozích vztazích je obsažen tradiční přístup k Riem. geometrii:

Proto specifikujeme souř. systém x^a ; zvolíme "Souř. basi"

$\vec{e}_{(a)} \equiv \text{grad } x^a$; pak $e^a_{(a)} = \delta^a_a$, $e^a_{(a)} = \delta^a_a$ (tj. vektory $\vec{e}_{(a)}$ jsou tečny k souř. křivkám) a $dx^a = \theta^a$ jsou základní 1-formy.

Tetradové složky lib-tensoru jsou tedy numericky rovny jeho obyčejným složkám.

Ze zavedení Ricciho rotačních koef. nyní snadno zjistíme,

že $\Gamma^a_{bc} \equiv -e^a_{(b)} \cdot e^c_{(c)}$ jsou rovny Christ-symbolům

$\Gamma^a_{\beta\gamma} =$ ~~.....~~

nik $\Gamma^a_{bc} = - \left[\underbrace{e^a_{(\beta, \gamma)}}_{=0 \text{ neb } \delta^a_{\beta\gamma}} + \Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} e^a_{(\delta)} \right] e^{\beta}_{(b)} e^{\gamma}_{(c)} = + \Gamma^a_{bc}$

Jelikož $e_{(a)}^{\alpha} = \delta_{\alpha}^a$, jsou ⁽⁵⁾ samostatnými numericky rovnými (všechno v daném souř. systému) $g_{\alpha\beta}$ a g_{ab} a tedy i jejich obyčejné (nikoliv kovariantní!) diferenciály

Nyní

$$dg_{ab} = \omega_{ab} + \omega_{ba} \Rightarrow dg_{\alpha\beta} = (\delta_{\alpha\beta\gamma} + \delta_{\beta\alpha\gamma}) \frac{\theta^{\gamma}}{dx^{\gamma}}$$

$$\Rightarrow \partial_{\gamma} g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu} \Gamma_{\beta\gamma}^{\mu} + g_{\mu\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu}$$

$$\Rightarrow g_{\alpha\beta} \Gamma^{\alpha\beta\gamma} = 0, \text{ tj. známý klasický výsledek. } ||$$

Zde skončena 4. přednáška

Rovnice struktury.

Nyní opět obecný formalismus. Počítá vnější diferenciály formou $\theta^a = e_{\beta}^{(a)} dx^{\beta}$

$$\text{Z definice } d\theta^a = 2! \underbrace{e_{\beta\gamma}^{(a)}}_{-f_{bc}^a} dx^{\beta} dx^{\gamma} = -f_{bc}^a e_{\beta}^{(a)} e_{\gamma}^{(b)} dx^{\beta} dx^{\gamma}$$

$$= -\underline{f_{bc}^a} \theta^c \wedge \theta^b$$

ovšem $f_{bc}^a \theta^c = \omega_{bc}^a$, takže

$$d\theta^a = -\omega_{bc}^a \wedge \theta^b$$

Cartan tyto rovnice nazval "první rovnice struktury"

\Rightarrow vypočít f_{bc}^a

Tyto rovnice v podstatě říkají, že antisymmetriční rotační koef. $f_{[bc]}^a$ lze snadno vypočítat tím, že udeříme rotační duální base $\vec{e}^{(a)}$, tj. vnější (parci) derivování

$$\text{- viz } d\theta^a = -\omega_{bc}^a \wedge \theta^b \text{ vyjde}$$

$$\text{z } d\theta^a = -\underbrace{f_{bc}^a}_{\text{antisym } b,c} \theta^c \wedge \theta^b$$

↓
vnější der. $\vec{e}^{(a)}$

na $\Gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{bc}$
a $\Gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{cb}$
a $\Gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{bc}$

(Ve speciálním případě souř. base, kdy \vec{e}^a jsou grad x^a ,
přijdou první rovnice struktury na triviální tvrzení $d\theta^a = dx^a = 0$)
ovšem pro výpočty např. Riem. tenzoru není výhodné počítat
v těchto souř. bázích - spíše v takových, v nichž g_{ab} je konstantní
- viz za chvíli)

Předpokládejme, že známe 1-formy θ^a a matici g_{ab}
jako fce souřadnic. Pak prostým diferencováním okamžitě
najdeme $d\theta^a$ a dg_{ab} .

Pak je důležité, že 1-formy ω^a_b jsou zcela
určeny vztahy

$$dg_{ab} = \omega_{ab} + \omega_{ba}$$

$$d\theta^a = -\omega^a_b \wedge \theta^b$$

Viz další příj

(Prakticky je to důležité proto - viz dále - že Riem. tenzor dtd. 158
zpočtu přímo diferencováním ω^a_b .)

Dělat důkaz předchozího tvrzení - ω_{ab} ovšem vyjde dosti
složitě - viz nastiň obvykle je vše jednoduché

- obvykle totiž je g_{ab} konstantní maticí (nikáv. na x^a),
takže

$$dg_{ab} = \omega_{ab} + \omega_{ba} = 0 \Rightarrow \omega_{ab} = -\omega_{ba}$$

a zbyvá pouze řešit $d\theta^a = -\omega^a_b \wedge \theta^b$ - ovšem
řešení těchto rovnic lze obvykle ušádnout (to je rozumné,
neboť z důvodu, let. zde neuradím, je zřejmé, že řešení je jednoznačné)
na str. 159

Pozn.

g_{ab} je konstantní maticí pro lib. ortonormální basi
a také pro Sachsovu nulovou tetradu - a právě
těchdy lze snadno sledovat.

2-formy křivosti

Odvozuje tzv. "druhé rovnice struktury" - které svazují tensor křivosti a vnější diferenciály 1-form konexe ω^a_b .

Díky nedeťám - vyjde ze def: $\omega^a_b = \gamma^a_{bc} e^{(c)}_y dx^y$
 udělá vnější diferenciály ω^a_b :
 podle definice

$$d\omega^a_b = 2! (\gamma^a_{bc} e^{(c)}_y)_{; \delta} dx^{[\delta} dx^{\gamma]}$$

ale na druhé straně Riem. tensor je definován pomocí komutací vektorů

$$e^{(a)}_{\alpha} R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = 2e^{(a)}_{\beta} [e^{(\gamma)}_{\delta}] = e_{\beta; \gamma\delta} - e_{\beta; \delta\gamma} / g_{\beta\gamma}$$

... upravíme vyjde: $e^{\alpha}_{\beta} R_{\alpha\gamma\delta} g^{\beta\gamma} = e^{\delta}_{\beta; \gamma\delta} - e^{\delta}_{\beta; \delta\gamma}$
 když definuje $-e^{\alpha}_{\beta} R^{\delta}_{\alpha\gamma\delta} =$ konvence jako VMTW

$$\Omega^a_b \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} R^a_{bcd} \theta^c \wedge \theta^d \quad (1)$$

2-formy křivosti, kde R^a_{bcd} jsou tetradové složky Riem. tensoru

vyjdou 2. rovnice struktury Cartana:

$$\Omega^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b \quad (2)$$

Z obou vztahů je vidět, že když najdu ω^a_b , mohu spočítat Ω^a_b ; to pak rozvinu v bazi $\theta^c \wedge \theta^d$ a podle (1) naleznu tetradové složky Riemann. tensoru - odtud ovšem mohu rychle i normální složky:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = e^{(a)}_{\alpha} e^{(b)}_{\beta} e^{(c)}_{\gamma} e^{(d)}_{\delta} R^a_{bcd}$$

$$R^{\alpha}_{bcd} = R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} e^{(\beta)}_{\alpha} e^{(\gamma)}_{b} e^{(\delta)}_{c}$$

Veřta: Známe-li 1-formy θ^a a matici g_{ab} jako funkce x^μ , pak jsou 1-formy konexe ω^a_b zcela určeny vztahy

$$dg_{ab} = \omega_{ab} + \omega_{ba} \quad (1)$$

$$d\theta^a = -\omega^a_b \wedge \theta^b \quad (2)$$

D.1)

1) $f_{(ab)c}$ jsou jednoznačně určeny z (1) jako numerické koeficienty:

$$\begin{aligned} dg_{ab} &= f_{abc} \theta^c + f_{bac} \theta^c = \\ &= (f_{abc} + f_{bac}) \theta^c = 2 f_{(ab)c} \theta^c \end{aligned} \quad (*)$$

Když známe g_{ab} , známe dg_{ab} (viz prostě dif. = vztah) a známe podle předp. $\theta^c \Rightarrow f_{(ab)c}$ určíme jako koef.-lin. kombinace (*)

2) $f_a[bc]$ zjistíme z (2): - to nyní dává ~~vyjádření~~ $a \rightarrow b$ a vynásobíme g_{ab}

$$\begin{aligned} \Rightarrow g_{ab} d\theta^b &= -g_{ab} \omega^b_c \wedge \theta^c = \\ &= -g_{ab} f^b_{cd} \theta^d \wedge \theta^c = \\ &= -f_{acd} \theta^d \wedge \theta^c = \\ &= -2 f_a[cd] \theta^d \wedge \theta^c = -2 f_a[bc] \theta^b \wedge \theta^c \end{aligned}$$

$\Rightarrow f_a[bc]$

$$= \frac{1}{2} [abc + bac + \cancel{acb} + \cancel{cab} - bca - cba + abc - \cancel{acb} + bca - bac - \cancel{cab} + cba]$$

pak

$$\omega_{ab} = f_{abc} \theta^c = (f_{(ab)c} + f_{(ca)b} - f_{(bc)a} + f_a[bc] + f_b[ca] - f_c[ab]) \theta^c$$

viz dole na str. (15)

$$\omega^a_b = \gamma^a_{bc} \theta^c = - e_{\beta;\gamma}^{(a)} e_{(b)}^\beta e_{(c)}^\gamma e_{\delta}^{(c)} dx^\delta =$$

$$d\omega^a_b = - e_{\beta;\gamma}^{(a)} e_{(b)}^\beta dx^\gamma = - e_{\beta;\gamma}^{(a)} e_{(b)}^\beta dx^\gamma$$

$$= -2! (e_{\beta;\gamma}^{(a)} e_{(b)}^\beta)_{;\delta} dx^\delta [dy^\beta]$$

$$= -2! [e_{\beta;\gamma;\delta}^{(a)} e_{(b)}^\beta + e_{\beta;\delta}^{(a)} e_{(b);\gamma}^\beta] dx^\delta [dy^\beta]$$

$$= -2! \left[\frac{1}{2} e_{\beta;\gamma;\delta}^{(a)} e_{(b)}^\beta dx^\delta dy^\gamma + [e_{\beta;\delta}^{(a)} e_{(b);\gamma}^\beta] dx^\delta dy^\gamma \right]$$

$$= -2! \frac{1}{2} R^\alpha_{\beta\gamma\delta} e_\alpha^{(a)} e_{(b)}^\beta dx^\delta dy^\gamma$$

$$-2! e_{\beta;\delta}^{(a)} e_{(b);\gamma}^\beta dx^\delta dy^\gamma =$$

Determinant $\Omega^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \omega^c_b$

also

with det's str.

$$\Omega^a_b = \frac{1}{2} R^a_{bcd} \theta^c \wedge \theta^d = \frac{1}{2} R^\alpha_{\beta\gamma\delta} e_\alpha^{(a)} e_{(b)}^\beta e_{(c)}^\gamma e_{(d)}^\delta dx^\delta dy^\gamma$$

$$= R^\alpha_{\beta\gamma\delta} dx^\delta [dy^\beta] e_\alpha^{(a)} e_{(b)}^\beta$$

$$+ R^\alpha_{\beta\gamma\delta} e_\alpha^{(a)} e_{(b)}^\beta dx^\delta dy^\gamma = R^\alpha_{\beta\gamma\delta} e_\alpha^{(a)} e_{(b)}^\beta dx^\delta dy^\gamma$$

$$\rightarrow A_{\alpha\beta} dx^\alpha dy^\beta = A_{\alpha\beta} dx^\alpha dy^\beta = A_{\alpha\beta} \frac{1}{2} (dx^\alpha dy^\beta - dx^\beta dy^\alpha) = A_{\alpha\beta} dx^\alpha dy^\beta$$

Darstellung

$$-2! e_{\beta; i\sigma}^{(a)} e_{(b); \rho}^{\beta} dx^{\rho} dy^{\sigma}$$

$$= -2! e_{\beta; i\sigma}^{(a)} e_{(b); \rho}^{\beta} dx^{\rho} dy^{\sigma}$$

$$\omega^a \wedge \omega^b = 2! e_{\beta; i\sigma}^{(a)} e_{(c)}^{\beta} dx^{\rho} dy^{\sigma} e_{\rho; i\sigma}^{(c)} e_{(b)}^{\rho}$$

$$\text{ab } e_{\rho; i\sigma}^{(c)} e_{(b)}^{\rho} = \left(e_{\rho}^{(c)} e_{(b)}^{\rho} \right)_{i\sigma} - e_{\rho}^{(c)} e_{(b); i\sigma}^{\rho}$$

$$= - e_{\rho}^{(c)} e_{(b); i\sigma}^{\rho}$$

$$\Rightarrow \omega^a \wedge \omega^b = 2! e_{\beta; i\sigma}^{(a)} e_{(c)}^{\beta} \left(- e_{\rho}^{(c)} e_{(b); i\sigma}^{\rho} \right) dx^{\rho} dy^{\sigma}$$

$$= - 2 e_{\beta; i\sigma}^{(a)} e_{(b); \rho}^{\beta} dx^{\rho} dy^{\sigma}$$

Identity pro křivost

V tomto Cartanově formalismu vyjde Bianchiho identity velice jednoduše jako podmínky integrability 2. rovnice struktury

(*) $\Omega^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b$ \rightarrow rozmysli pořádky

Z Ω^a_b nyní uděláme vnější diferenciál - přitom potřebujeme, že

$d^2\omega^a_b = 0$, a že pro 1-formy α, β platí: $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge d\beta$

je tedy

$$d\Omega^a_b = \underbrace{d^2\omega^a_b}_{=0} + \underbrace{d\omega^a_c \wedge \omega^c_b}_{\text{descalim } \alpha (*) \text{ zpětně pomocí } \Omega^a_c} - \omega^a_c \wedge d\omega^c_b$$

$$= (\Omega^a_c - \omega^a_d \wedge \omega^d_c) \wedge \omega^c_b - \omega^a_c \wedge (\Omega^c_b - \omega^c_d \wedge \omega^d_b)$$

 \swarrow \searrow spolu vypadnou

\Rightarrow

$$d\Omega^a_b = \Omega^a_c \wedge \omega^c_b - \omega^a_c \wedge \Omega^c_b$$

snadno ukážeme, že toto jsou Bianchiho identity: specialisujeme se na souř. basi a Riem. souřadnice, takže

$\omega^a_\beta = \Gamma^a_{\beta\gamma} dx^\gamma = 0$ v nějakém pevném vybraném bodě

Pak z předchozího vztahu dostaneme

$\partial_\epsilon R^\alpha_{\beta\gamma\delta} dx^\epsilon dy^\delta dz^\delta = 0$

$\Leftrightarrow R^\alpha_{\beta[\gamma\delta];\epsilon} = 0$, tj. Bianchiho identity.

Další identitu dostaneme k 1. rovnici struktury

$d\theta^a = -\omega^a_b \wedge \theta^b$ - ~~vznesme~~ uděláme-li vnější diferenciály těchto rovnic, zjistíme, že musí platit

$$\Omega^a_b \wedge \theta^b = 0$$

$d^2\theta^a = -d\omega^a_b \wedge \theta^b + \omega^a_b \wedge d\theta^b$
 $= -\Omega^a_b \wedge \theta^b + \omega^a_b \wedge (-\omega^b_c \wedge \theta^c)$
 $= -\Omega^a_b \wedge \theta^b - \omega^a_b \wedge \omega^b_c \wedge \theta^c$

což lze přepsat do tvaru $R_{abcd} \theta^b \wedge \theta^c \wedge \theta^d = 0$ - ale není nic jiného než $R_{a[bc]d} = 0$.

Lze dále ukázat, že tato cyklická identita spolu s antisym. Riem. tens.
ru v obou směrech implikuje: $R_{abcd} = R_{cdab}$

\Rightarrow všechny symetrie Riem. tensoru jsou shrnuty ve dvou
identitách, které splňují 2-formy křivosti:

$$\Omega_{ab} = -\Omega_{ba}, \quad \Omega^a_b \wedge \theta^b = 0.$$

Dužakar, $\tilde{\pi} \quad \pi \quad \Omega^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b$

$$a \quad dg_{ab} = \omega_{ab} + \omega_{ba}$$

$$\Rightarrow \Omega_{ab} = -\Omega_{ba};$$

(pracyji jen v indexech a, b, ..., tj. zvyšujícími se
 počíná g_{ab}); uvažujme jmd (fΩ) = df∧Ω + f∧dΩ

$$\Omega_{ab} = g_{as} \Omega^s_b = g_{as} d\omega^s_b + \omega_{ac} \wedge \omega^c_b$$

Pak

$$\begin{aligned} \Omega_{ab} + \Omega_{ba} &= g_{as} d\omega^s_b + \omega_{ac} \wedge \omega^c_b + \\ &+ g_{bs} d\omega^s_a + \omega_{bc} \wedge \omega^c_a = \\ &= d(g_{as} \omega^s_b) - dg_{as} \wedge \omega^s_b + d(g_{bs} \omega^s_a) - dg_{bs} \wedge \omega^s_a \\ &+ \omega_{ac} \wedge \omega^c_b + \omega_{bc} \wedge \omega^c_a = \\ &= d\omega_{ab} - (\omega_{as} + \omega_{sa}) \wedge \omega^s_b + d\omega_{ba} - (\omega_{bs} + \omega_{sb}) \wedge \omega^s_a \\ &+ \omega_{as} \wedge \omega^s_b + \omega_{bs} \wedge \omega^s_a = \\ &= \underbrace{d\omega_{ab} + d\omega_{ba}}_{=0} - \omega_{sa} \wedge \omega^s_b - \omega_{sb} \wedge \omega^s_a = \\ &= -\omega_{sa} \wedge \omega^s_b + \underbrace{\omega^s_a \wedge \omega_{sb}}_{= \omega_{sa} \wedge \omega^s_b} = 0 \quad \checkmark \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

neb $\frac{d^2 g_{ab}}{dx^i dx^j} = d\omega_{ab} + d\omega_{ba} = 0$

Vaidya ve formách

$$ds^2 = + 2 du dr + \left[1 - \frac{2m(u)}{r}\right] du^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta dy^2)$$

chce basi $\theta^a = e^{(a)} dx^a$ tak, \tilde{x}^c

g_{ab} ve $ds^2 = g_{ab} \theta^a \theta^b$ jsou konstanty

$$ds^2 = \underbrace{2 du}_{\equiv \theta^0} \underbrace{\left\{ dr + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2m(u)}{r}\right] du \right\}}_{\equiv \theta^1} - \underbrace{r^2 d\theta^2}_{\equiv (\theta^2)^2} - \underbrace{r^2 \sin^2\theta dy^2}_{\equiv (\theta^3)^2}$$

$$\theta^0 \equiv du$$

$$\theta^1 \equiv dr + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2m(u)}{r}\right] du$$

$$\theta^2 \equiv r d\theta$$

$$\theta^3 \equiv r \sin\theta dy$$

$$ds^2 = g_{ab} \theta^a \theta^b = 2 \theta^1 \theta^0 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2$$

$$\Rightarrow g_{ab} = 0 \text{ ciz } na$$

$$g_{10} = g_{01} = 1 = g^{10} = g^{01}$$

$$-g^{22} = -g_{22} = -g^{33} = -g_{33} = +1$$

$d(fw) = f dw + df \wedge w$

1. rovnice struktury:

$$g_{ab} = g^{ab}$$

$$d\theta^a = -\omega^a_b \wedge \theta^b$$

(0) $d\theta^0 = 0$

(1) $d\theta^1 = \underbrace{dr}_{=0} + d\left\{ \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2m}{r}\right] du \right\} = -d\left(\frac{m}{r}\right) \wedge du = \frac{m}{r^2} dr \wedge du = \frac{m}{r^2} \theta^1 \wedge \theta^0$

skalár 1-forma

(2) $d\theta^2 = dr \wedge d\theta = \frac{1}{r} \theta^1 \wedge \theta^2 - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2m}{r}\right] du \wedge d\theta$

$$- \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2m}{r}\right] \frac{1}{r} \theta^0 \wedge \theta^2$$

(2) $d\theta^2 = \frac{1}{r} \theta^1 \wedge \theta^2 - \frac{1}{2r} \left[1 - \frac{2m}{r}\right] \theta^0 \wedge \theta^2$

$$(3) \quad d\theta^3 = d(r \sin\theta d\varphi) = \sin\theta dr \wedge d\varphi + r \cos\theta d\varphi \wedge d\theta =$$

$$= r^{-1} \left[\theta^1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \theta^0 \right] \wedge \theta^3 + r^{-1} \cot\theta \theta^2 \wedge \theta^3$$

Hádáme řešení (0) - (3):

~~jakékoliv řešení (0) - (3):~~

1) musí $\omega^1_0 = 0$, neboť:

$$\omega^1_0 = g^{15} \omega_{50} = g^{10} \omega_{00} = 0$$

$\rightarrow = 0$ neb $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$,

neboť $d g_{ab} = \omega_{ab} + \omega_{ba}$
 $= 0!$ v $g_{ab} = \text{const.}$

2) řešení $d\theta^1 = \frac{m}{r^2} \theta^1 \wedge \theta^0$ (4)

$$d\theta^1 = -\omega^1_a \wedge \theta^a \stackrel{1)}{=} -\omega^1_1 \wedge \theta^1 -$$

$$-\omega^1_2 \wedge \theta^2 - \omega^1_3 \wedge \theta^3$$

\Rightarrow (1) musí vzniknout z členu $-\omega^1_1 \wedge \theta^1$, neboť ten obsahuje θ^1 jako jediný, θ^0 není nikde

$\Rightarrow \omega^1_1 = \frac{m}{r^2} \theta^0;$

a g_{ab} dává také, aby členy vypadaly

z θ^0 neboť

(*) $\omega^1_2 = A \theta^2, \omega^1_3 = B \theta^3, \omega^1_0 = 0$ (ne 1)

3) řešení $d\theta^2 = \frac{1}{r} \theta^1 \wedge \theta^2 - \frac{1}{2r} \left[1 - \frac{2m}{r}\right] \theta^0 \wedge \theta^2$

$$d\theta^2 = -\omega^2_a \wedge \theta^a = -\omega^2_0 \wedge \theta^0 - \omega^2_1 \wedge \theta^1 - \omega^2_2 \wedge \theta^2 - \omega^2_3 \wedge \theta^3$$

guess:

$$\omega^2_1 = \frac{\theta^2}{r}, \omega^2_2 = g^{25} \omega_{52} = 0, \omega^2_3 = C \theta^3, \omega^2_0 = -\frac{1}{2r} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \theta^0$$

4) (3)

$$d\theta^3 = r^{-1} \left[\theta' - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \theta^0 \right] \wedge \theta^3 + r^{-1} \cot\theta \theta^2 \wedge \theta^3$$

$$d\theta^3 = -\omega^3_a \wedge \theta^a = -\omega^3_0 \wedge \theta^0 - \omega^3_1 \wedge \theta^1 - \omega^3_2 \wedge \theta^2$$

$$-\omega^3_3 \wedge \theta^3$$

$\frac{1}{2} \omega_{33} = 0$

$$\omega^3_1 = \frac{1}{r} \theta^3, \quad \omega^3_0 = -\frac{1}{2r} \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \theta^3, \quad \omega^3_3 \equiv 0$$

$$\omega^3_2 = r^{-1} \cot\theta \theta^3$$

Ostatni' se antičym. ω_{ab} :

$$g_{11} = -1$$

$$\omega^2_0 = g^{25} \omega_{50} = g^{22} \omega_{20} = -\omega_{20}$$

Např. $\omega^1_2 = g^{10} \omega_{02} = -\omega_{20} = -\omega^2_0 = \frac{1}{2} r^{-1} \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \theta^2$

$$\omega^1_3 = -\omega^3_0 = \frac{1}{2} r^{-1} \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \theta^3$$

toto je kompatibilní s odhadem (*)

a umožní je to fixovat, A, B

$$\omega^2_3 = -\omega^3_2 \text{ fixuje } C$$

Podobně dostane

$$\omega^0_1 \equiv 0, \quad \omega^0_2 \equiv -\omega^2_1 = -r^{-1} \theta^2,$$

$$\omega^0_3 = -\omega^3_1 = -r^{-1} \theta^3, \quad \omega^0_0 = -\omega^1_1 = -\left(\frac{m}{r^2} \right) \theta^0$$

odtud $\Rightarrow \underline{\underline{\omega^0_b \wedge \theta^b = 0}} \Rightarrow \underline{\underline{\omega^0_b}}$ splňuje toco má,

totož: $d\theta^0 = \omega^0_b \wedge \theta^b = 0$

\Rightarrow jednoznačné a správné řešení pro ω^a_b

zbytek přímočarý:

$$\Omega^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b$$

$$\begin{aligned} \Omega^1_1 &= d\omega^1_1 + \underbrace{\omega^1_c \wedge \omega^c_1}_0 + \omega^1_2 \wedge \omega^2_1 + \omega^1_3 \wedge \omega^3_1 \\ &= d\left[\left(\frac{m}{r^2}\right)\theta^0\right] + 0 + \frac{1}{2}r^2(1-2m/r)\left(\underbrace{\theta^2_1 \wedge \theta^1_2}_0 + \underbrace{\theta^3_1 \wedge \theta^1_3}_0\right) \\ &= -\left(\frac{2m}{r^3}\right)dr \wedge \theta^0 = -\left(\frac{2m}{r^3}\right)\theta^1 \wedge \theta^0 \end{aligned}$$

Srovnáním s $\Omega^1_1 = \frac{1}{2} R^1_{1cd} \theta^c \wedge \theta^d$

\Rightarrow tetradové složky $R_{...}$

$$R^1_{141} = -R^1_{114} = \frac{2m}{r^3}, \text{ jiní } R^1_{1cd} = 0$$

a podobně najít

$$\Omega^1_2 = \left(\frac{m}{r^2}\right)\theta^2_1 \wedge \theta^0 + \left(\frac{m}{r^3}\right)\theta^1_1 \wedge \theta^2$$

$$\Omega^1_3 = \left(\frac{m}{r^2}\right)\theta^3_1 \wedge \theta^0 + \left(\frac{m}{r^3}\right)\theta^1_1 \wedge \theta^3$$

$$\Omega^2_1 = \left(\frac{m}{r^3}\right)\theta^2_1 \wedge \theta^0$$

$$\Omega^3_1 = \left(\frac{m}{r^3}\right)\theta^3_1 \wedge \theta^0$$

$$\Omega^2_3 = -\left(\frac{2m}{r^3}\right)\theta^2_1 \wedge \theta^3$$

antisym. $\Omega_{ab} = -\Omega_{ba}$ uvádí další $R_{...}$

Kontraktív tetradové složky Ricciho tenzoru
 podmínka $\Omega'_0 = \Omega_{00} = 0$

$$R_{00} = R^2_{002} + R^3_{003} = -R'_{202} - R'_{303} \quad (\text{jinak } \Omega^2_0 = -\Omega'_2)$$

$$= \dots = \frac{2m}{r^2}$$

dužď $R_{..} = 0$

$$R_{\alpha\beta} = R_{ab} e^{(a)}_{\alpha} e^{(b)}_{\beta} = R_{00} e^{(0)}_{\alpha} e^{(0)}_{\beta} =$$

$$= 2 \left(\frac{m}{r^2} \right) (\partial_{\alpha} u) (\partial_{\beta} u)$$

(1)

Riemannův tenzor sféricky symetrického prostorůcasu

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

pro $\Phi(t, r), \Lambda(t, r)$ zatím obecně

$$\theta^0 = e^{\Phi} dt$$

$$\theta^1 = e^{\Lambda} dr$$

$$\theta^2 = r d\theta$$

$$\theta^3 = r \sin \theta d\varphi$$

$$g_{ab} = (-1, 1, 1, 1)$$

$$\Rightarrow \omega_{ab} = -\omega_{ba}$$

$$\boxed{d\theta^a = -\omega^a_b \wedge \theta^b}$$

$$d\theta^0 = e^{\Phi} [\dot{\Phi} dt + \Phi' dr] \wedge dt = e^{\Phi} \Phi' dr \wedge dt = -e^{\Phi} \Phi' dt \wedge dr$$

$$d\theta^1 = e^{\Lambda} [\dot{\Lambda} dt + \Lambda' dr] \wedge dr = e^{\Lambda} \dot{\Lambda} dt \wedge dr \quad (*)$$

$$d\theta^2 = dr \wedge d\theta$$

$$d\theta^3 = dr \wedge \sin \theta d\varphi + r \cos \theta d\theta \wedge d\varphi$$

$$\Rightarrow d\theta^0 = -\omega^0_a \wedge \theta^a \Rightarrow \omega^0_1 = +e^{\Phi-\Lambda} \Phi' dt + a dr$$

$$d\theta^1 = -\omega^1_a \wedge \theta^a = -\omega^1_0 \wedge \theta^0 \quad \omega^0_2 = 0$$

$$\text{ale } \underline{\omega^1_0} = \omega_{10} = -\omega_{01} = +\underline{\omega^0_1} \Rightarrow$$

$$d\theta^1 = -[e^{\Phi-\Lambda} \Phi' dt + a dr] \wedge e^{\Phi} dt = a e^{\Phi} dt \wedge dr$$

$$(*) \Rightarrow a = e^{\Lambda-\Phi} \dot{\Lambda}$$

⇒

$$\omega^0_1 = e^{\Phi-\Lambda} \dot{\Phi} dt + e^{\Lambda-\Phi} \dot{\Lambda} dr$$

$$\omega^0_1 = e^{\Phi-\Lambda} \left[\dot{\Phi} dt \right] + \left[\frac{e^{\Lambda-\Phi}}{r} \dot{\Lambda} dr \right] = \omega^1_0$$

$$d\theta^2 = dr \wedge d\vartheta = e^{-\Lambda} \theta^1 \wedge \frac{1}{r} \theta^2 = \frac{e^{-\Lambda}}{r} \theta^1 \wedge \theta^2 =$$

$$d\theta^2 = -\omega^2_a \wedge \theta^a \Rightarrow \left(\omega^2_1 = \frac{e^{-\Lambda}}{r} \theta^2 \right) = -\frac{e^{-\Lambda}}{r} \theta^2 \wedge \theta^1$$

$$\omega^2_1 = e^{-\Lambda} d\vartheta$$

$$\omega^3_1 : d\theta^3 = e^{-\Lambda} \theta^1 \wedge \cancel{r} r^{-1} \theta^3 + r \cos\vartheta r^{-1} \theta^2 \wedge \frac{1}{r \sin\vartheta} \theta^3$$

$$d\theta^3 = -\frac{e^{-\Lambda}}{r} \theta^3 \wedge \theta^1 - \frac{1}{r} \cot\vartheta d\vartheta \theta^3 \wedge \theta^2$$

$$d\theta^3 = -\omega^3_a \wedge \theta^a$$

$$\omega^3_1 = \frac{e^{-\Lambda}}{r} \theta^3 = e^{-\Lambda} \sin\vartheta d\varphi$$

$$\omega^3_2 = \frac{1}{r} \cot\vartheta d\vartheta \theta^3 = \frac{1}{r} \cot\vartheta r \sin\vartheta d\varphi = \cos\vartheta d\varphi$$

Souhr: $\omega^1_0 = \omega^0_1 = e^{\Phi-\Lambda} \dot{\Phi} dt + e^{\Lambda-\Phi} \dot{\Lambda} dr$
 $= e^{-\Lambda} \dot{\Phi} \theta^0 + e^{-\Phi} \dot{\Lambda} \theta^1$

$$\omega^2_1 = \frac{e^{-\Lambda}}{r} \theta^2, \quad \omega^3_1 = \frac{e^{-\Lambda}}{r} \theta^3, \quad \omega^3_2 = \frac{1}{r} \cot\vartheta d\vartheta \theta^3$$

$$\omega^1_2 = \omega_{12} = -\omega_{21} = -\omega^2_1$$

dales' jami 0

$$\omega^1_3 = -\omega^3_1, \quad \omega^2_3 = -\omega^3_2$$

$$R_{0101} = -R^0_{101}$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = e^{(a)}_{\alpha} e^{(b)}_{\beta} e^{(c)}_{\gamma} e^{(d)}_{\delta} R_{abcd}$$

$$R_{0101} = e^{(0)}_0 e^{(1)}_1 e^{(0)}_0 e^{(1)}_1 R_{0101} =$$

$$= e^{2\Phi} e^{2\Lambda} R_{(0101)} =$$

= . . .

Doře se specializují na Schw. metricku

nebo aspoň $\phi(r), \Lambda(r)$

~~atd.~~

$$\begin{aligned}
 \Omega^0_2 &= \underbrace{d\omega^0_2}_{=0} + \omega^0_1 \wedge \omega^1_2 = \underbrace{\left(e^{-\Lambda} \phi' \theta^0 + e^{-\phi} \dot{\Lambda} \theta^1 \right)}_{\omega^0_1} \wedge \left(-\frac{e^{-\Lambda}}{r} \theta^2 \right) \\
 &= e^{\phi-\Lambda} \left[\underbrace{\phi' dt}_{c^{-\phi} \theta_0} + \underbrace{\dot{\Lambda} dr}_{e^{-\Lambda} \theta_1} \right] \wedge \left(-\frac{e^{-\Lambda}}{r} \theta^2 \right) \\
 &= \cancel{e^{\phi-\Lambda}} \\
 &= -\frac{1}{r} e^{\phi-2\Lambda} \left[\phi' e^{-\phi} \theta^0 \wedge \theta^2 - \dot{\Lambda} e^{-\Lambda} \theta^1 \wedge \theta^2 \right] \\
 &= -\frac{1}{r} e^{-2\Lambda} \left[\phi' \theta^0 \wedge \theta^2 + e^{\Lambda-\phi} \dot{\Lambda} \theta^1 \wedge \theta^2 \right]
 \end{aligned}$$

pro statischer metrik:

$$R^0_{202} = -\frac{1}{r} e^{-2\Lambda} \phi'$$

$$\Rightarrow R_{0202} = \frac{1}{r} e^{-2\Lambda} \phi'$$

$$R_{0202} = \underbrace{e^{2\phi}}_{\text{Sect.}} r \frac{2\Lambda}{r} e^{-2\Lambda} \phi' = \underline{r \cdot e^{2\phi-2\Lambda} \phi'}$$

$$e^{2\phi} = 1 - \frac{2M}{r}, \quad e^{2\Lambda} = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}$$

$$\cancel{r} \cdot e^{2\phi} \phi' = \frac{2M}{r^2}$$

$$\begin{aligned}
 R_{t\theta t\theta} &= r \cdot \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \\
 &= \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \quad \text{OK}
 \end{aligned}$$