Akce LG na varietě

Def: A je akce LG G na varietě M $\equiv$

$\forall g \in G \quad A_g : M \to M$ difeomorfismus

levá akce: $A_{g_1 g_2} = A_{g_1} A_{g_2}$ píšeme $A_g x = g x$

pravá akce: $A_{g_2 g_1} = A_{g_1} A_{g_2}$ píšeme $A_g x = x g$

Př: pro $M = G$ máme

$L_g \quad R_{g^{-1}} \quad AD_g$ levá akce G na G

$R_g \quad L_{g^{-1}} \quad AD_g$ pravá akce G na G

Def: generátor akce A_g nechť $\mathfrak{g}$ je LA grupy G

$\forall m \in \mathfrak{g} \quad a_m$ vekt. pole na M

$\forall x \in M \quad a_\square|_x : \mathfrak{g} \to T_x M$ je indukované zobr. (push forward)

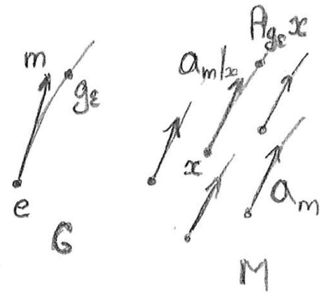
k zobraz. $A_\square x : G \to M$ spočtené v bodě $e \in G$

tj. $a_\square|_x = (A_\square x)_*|_e$

intuice je, že a_m charakterizuje "malou" akci A_{e+m}

užitím definice indukovaného zobr. můžeme psát

$$a_m|_x = \frac{D}{d\varepsilon} A_{g_\varepsilon} x \Big|_{\varepsilon=0} \qquad \text{kde } g_0 = e \quad \frac{Dg_\varepsilon}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = m$$



Lemma

generátor akce a_m je lineární v argumentu m

důk: plyne z linearity indukovaného zobr.

Věta: generátor a_m akce A_g je též generátorem toku $\mathfrak{m}_\alpha$ na M daným:

$$\mathfrak{m}_\alpha = A_{\exp(\alpha m)}$$

platí tedy

$$\frac{d}{d\alpha} \mathfrak{m}_{\alpha *} T \Big|_{\alpha=0} = - \mathcal{L}_{a_m} T \qquad T \text{ tenz. pole na } M$$

$$\mathfrak{m}_{\alpha *} = \exp[-\mathcal{L}_{a_m}] \qquad \text{ve smyslu operátorů na tenzorech}$$

důk:

$$\mathfrak{m}_{\alpha+\beta} = A_{\exp(\alpha+\beta)m} = A_{\exp(\alpha m)\exp(\beta m)} = A_{\exp(\alpha m)} A_{\exp(\beta m)} = \mathfrak{m}_\alpha \mathfrak{m}_\beta$$

$\Rightarrow \mathfrak{m}_\alpha$ je tok na M

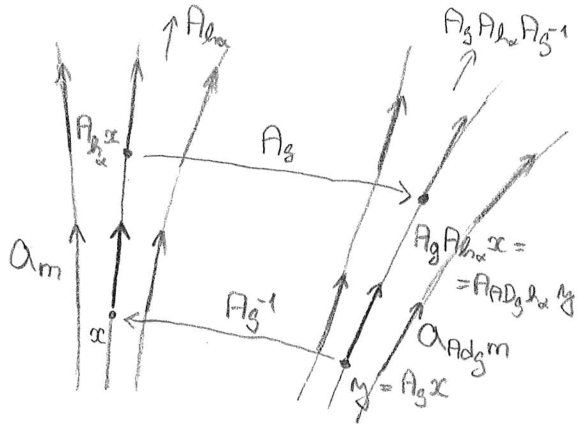
$$\frac{D}{d\alpha} \mathfrak{m}_\alpha x \Big|_{\alpha=0} = \frac{D}{d\alpha} A_{\exp(\alpha m)} x \Big|_{\alpha=0} = a_m|_x \qquad \text{díky } \frac{D}{d\alpha} \exp(\alpha m)\Big|_{\alpha=0} = m$$

$\Rightarrow a_m$ je generátor toku $\mathfrak{m}_\alpha$

Lema: působení akce A_g na generátor a_m

A_g levá akce $\qquad A_{g*}\, a_m = a_{Ad_g m}$

A_g pravé akce $\qquad A_{g*}^{-1}\, a_m = a_{Ad_g m}$



důk:

A_g levá akce

$$A_{g*}(a_m|_x) = A_{g*} \frac{D}{d\alpha} A_{h_\alpha} x \Big|_{\alpha=0} = \frac{D}{d\alpha} A_g A_{h_\alpha} x \Big|_{\alpha=0}$$

$$= \frac{D}{d\alpha} A_{AD_g h_\alpha} A_g x \Big|_{\alpha=0} = a_{\frac{D}{d\alpha} AD_g h_\alpha|_{\alpha=0}} \Big|_{y=A_g x}$$

$$= a_{Ad_g m} \Big|_y \qquad \text{kde } h_0 = e \quad \frac{D h_\alpha}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} = m$$

Věta Lieova algebra generátorů

A_g levá akce $\qquad [a_m, a_n] = -\, a_{[m,n]}$

A_g pravé akce $\qquad [a_m, a_n] = a_{[m,n]}$

důk:

$$[a_m, a_n] = \mathcal{L}_{a_m} a_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{a_m gener. toku $A_{\exp(\alpha m)}$}}}{=} -\frac{d}{d\alpha} A_{\exp(\alpha m)}\, a_n \Big|_{\alpha=0} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{předchozí Lema}}}{=} -\frac{d}{d\alpha} a_{Ad_{\exp(\alpha m)} n} \Big|_{\alpha=0} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{defin. ad}}}{=} -a_{ad_m n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{věta o ad}}}{=} -a_{[m,n]}$$

Def A_g akce G na M

A_g je volná akce ≡ při libovolné akci nezůstane ani jeden bod M nehybný

A_g je efektivní akce ≡ alespoň jeden bod M nezůstává při libovolné akci z G nehybný

A_g je transitivní ≡ každé dva body M lze spojit akcí z G

Def: A_g akce G na M

$\mathcal{O}_x$ orbita akce G bodu x ≡

$\mathcal{O}_x = \{ y \in M ,\ \exists g \in G \ \ y = A_g x \}$

Def: je-li akce transitivní, existuje pouze jedna orbita a varieta M se nazývá homogenní G-prostor

Def: A_g akce G na M

G_x je stabilizátor bodu $x \in M$ ≡

$G_x = \{ g \in G ,\ A_g x = x \}$

G_x tvoří podgrupu G

Lemma H podgrupa G

nechť H ekviv. značené $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow \exists h \in H \ g_1 = g_2 h$ a $[g] = gH$ je tř. ekv.

G/H tvoří homogenní G-prostor vůči levé akci

$L_g [k] = [gk]$

Pozn: vše lze analogicky definovat pro pravou akci

Lemma: A_g akce G na M, G_x stabiliz. x a $\mathcal{O}_x$ orbita x

$\mathcal{O}_x \cong G/G_x$

D: existuje 1-1 přiřazení $\mathcal{O}_x \leftrightarrow G/G_x$ definice:

$y \in \mathcal{O}_x \Leftrightarrow \exists g \in G \ \ y = gx \quad \longleftrightarrow \quad [g] \in G/G_x$

konzistence: $y = x \Leftrightarrow g \in G_x \Leftrightarrow [g] = [e]$

nezávislost na g: $g' \in [g] \Leftrightarrow \exists k \in G_x \ g' = gk \Rightarrow g'x = gkx = gx$

Theorem: M je homogenní G-prostor

$M \cong G/H$ pro nějakou podgrupu H gr. G

D: stačí zvolit bod $x \in M$ a dělat $M = \mathcal{O}_x$

Při: akce $SO(3)$ na $\mathbb{E}^3$

orbity jsou sféry kolem počátku
$\mathcal{O}_x = S^2$

stabilizátor $SO(3)_x$ jsou rotace kolem osy z počátku do x, tj. $SO(2)$

máme tedy
$SO(3)/SO(2) \cong S^2$

Def: varieta M s metrikou g

grupa isometrií $\mathrm{Iso}(M,g) \equiv$

$\varphi \in \mathrm{Iso}(M,g) \Leftrightarrow \varphi : M \to M$ difeomorf.

$\varphi^* g = g$

$\varphi_1 \varphi_2 = \varphi_1 \circ \varphi_2$ (skládání zobr.)

Lieovu alg. LG $\mathrm{Iso}(M,g)$ označíme $\mathrm{iso}(M,g)$

Lema $\mathrm{Iso}(M,g)$ je podgrupa $\mathrm{Diff}(M)$

pro varietu M konečné dim D je $\mathrm{Iso}(M,g)$ konečné dimenze maximálně $\frac{(D+1)D}{2}$

Pozn:

- Podobné definice lze provést i pro jiné objekty než g

Def: $\varphi \in \mathrm{Iso}(M,g)$ $\quad s \in \mathrm{iso}(M,g)$

působení φ lze chápat jako levou akci $\mathrm{Iso}(M,g)$ na M

$$\Xi_\varphi x = \varphi x$$

označíme

$\xi_s = \underline{S} \in TM$ generátor isometr. asoc. s s

$\exp(\tau s) = \varphi_\tau$ 1-par. gr. isometrií asoc. s s

Lema: ξ_s je Killingův vektor na M metr. g

Lema: $[\xi_m, \xi_n] = -\xi_{[m,n]}$

zvolíme-li bázi $e_\alpha \in \mathrm{iso}(M,g)$ a označíme $\xi_\alpha = \xi_{e_\alpha}$

$$[\xi_\alpha, \xi_\beta] = -c_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\, \xi_\gamma$$

kde $c_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ jsou str. konst. vůči e_α

důk: Ξ_φ je levé akce – viz obecně

asi lépe použít $\Xi \to A$ $\quad \xi \to a$

Posun Killingových vektorů

nechť R, K_μ jsou Kill. vektory s kom. relacemi

$$[R, K_\mu] = -c_{R\mu}{}^{\nu} K_\nu$$

Pak R-posun vektoru $V = V^\mu K_\mu$ lze řešit maticově
$\llcorner$ konst

$$V_\varphi = R_{\varphi *} V_0 \qquad R_\varphi \text{ isometr. s gen } R$$

$$\frac{d}{d\varphi} V_\varphi = -\mathcal{L}_R V_\varphi = -[R, K_\mu] V_\varphi^\mu = c_{R\mu}{}^{\nu} V_\varphi^\mu K_\nu$$

řešíme v podobě $V_\varphi = V_\varphi^\nu K_\nu \quad \to$
$\llcorner$ konst

$$\frac{d}{d\varphi} V_\varphi^\nu = c_{R\mu}{}^{\nu} V_\varphi^\mu \qquad c_{R\mu}{}^{\nu} = \mathrm{ad}_R{}^{\nu}{}_{\mu}$$

$$V_\varphi^\nu = \exp(\varphi\, c_R)^\nu{}_\mu V_0^\mu \qquad \exp(\varphi c_R)^\nu{}_\mu = \mathrm{Ad}_{R_\varphi}{}^{\nu}{}_{\mu}$$

Př: $[X, Y] = 0 \qquad c_X = [0] \qquad \exp(c_X) = [1] \qquad Y_1 = Y$

$$[R, X] = -Y \qquad c_R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad c_R^2 = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$[R, Y] = X$$

$$V_0 = a_0 X + b_0 Y \qquad V_\varphi = R_{\varphi *} V_0 = a_\varphi X + b_\varphi Y$$

$$\exp(\varphi c_R) = (\cos\varphi)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (\sin\varphi)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_\varphi \\ b_\varphi \end{vmatrix} = \exp(\varphi c_R)\begin{vmatrix} a_0 \\ b_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\, a_0 - \sin\varphi\, b_0 \\ \sin\varphi\, a_0 + \sin\varphi\, b_0 \end{vmatrix}$$

$$V_\varphi = (\cos\varphi\, a_0 - \sin\varphi\, b_0) X + (\sin\varphi\, a_0 + \cos\varphi\, b_0) Y$$

důsledek obecné teorie

$R = \xi_r \qquad V = \xi_v \qquad\qquad r, v \in \mathfrak{g}$ $\quad \xi$ generátor akce

$R_\varphi = \Xi \exp(\varphi r) \qquad\qquad$ akce $\exp(\varphi r)$ na M

$$R_{\varphi *} V = R_{\varphi *} \xi_v \underset{\substack{\uparrow \\ \text{LGA-12}}}{=} \xi_{\mathrm{Ad}\exp(\varphi r) v} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{LGA-7}}}{=} \xi_{\exp(\varphi \mathrm{ad}_r) v}$$

ale $\quad \mathrm{ad}_r \underset{\substack{\uparrow \\ \text{LGA-7}}}{\equiv} c_R$

v komponentách:

báze v $\mathfrak{g}$ $\quad e_\alpha \quad \rightarrow \quad$ báze generátorů $\quad \xi_\alpha$

komponenty $\qquad v = V^\alpha e_\alpha \qquad V = V^\alpha \xi_\alpha$

$\mathrm{ad}_r m = [r, m] \quad \Rightarrow \quad {\mathrm{ad}_r}^\alpha{}_\beta = c_{R\beta}{}^\alpha$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \quad \exp(\varphi\, \mathrm{ad}_r)^\alpha{}_\beta = \exp(\varphi c_R)^\alpha{}_\beta$

$R_{\varphi *} V = \xi_\alpha V^\alpha_\varphi$

$\xi_{\exp(\varphi \mathrm{ad}_r)\cdot v} = \xi_{\exp(\varphi \mathrm{ad}_r)\cdot e_\beta} V^\beta = \xi_{e_\alpha \exp(\varphi c_R)^\alpha{}_\beta} V^\beta = \xi_\alpha \exp(\varphi c_R)^\alpha{}_\beta V^\beta$

$\Downarrow \quad V^\alpha_\varphi = \exp(\varphi c_R)^\alpha{}_\beta V^\beta$

Reprezentace Lieových grup a algeber

Def: Reprezentace LG na vekt. pr. V

$$T : G \to V^1_1 \text{ (lin. operátory na } V) \qquad g \to T_g$$

$$T_{g_1 g_2} = T_{g_1} \cdot T_{g_2} \qquad \text{tj. } T_{g_1 g_2}{}^A{}_B = T_{g_1}{}^A{}_M \, T_{g_2}{}^M{}_B$$

Def Reprezentace LA na vekt. pr. V

$$t : \mathfrak{g} \to V^1_1 \text{ (lin operátory na } V) \qquad m \to t_m$$

t je lineární tj. $t_m{}^A{}_B = m^K t_K{}^A{}_B$

$$t_{[a,b]} = [t_a, t_b] \overset{\text{def}}{=} t_a \cdot t_b - t_b \cdot t_a$$

$$\text{tj. } c_{\mu\nu}{}^{\kappa} \, t_\kappa{}^A{}_B = t_\mu{}^A{}_K \, t_\nu{}^K{}_B - t_\nu{}^A{}_K \, t_\mu{}^K{}_B$$

Lemma Reprezentace jako akce

repr. T grupy G na V definuje akci G na V

$T_g \phi$ $\sim$ indexově $T_g{}^A{}_B \phi^B$

Def: generátor reprezentace LG

t_m je generátor reprezentace T_g LG na V $\equiv$

$$t_m = \frac{d}{d\varepsilon} T_{g_\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \qquad \text{pro } g_\varepsilon \quad g_0 = 0 \quad \frac{Dg_\varepsilon}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = m$$

Věta: vztah generátoru akce a generátoru reprezentace

T_g repr. G na V, tj. i akce G na V

$\mathfrak{t}_m$ generátor akce T_g, tj. vekt. pole na V

t_m generátor reprezentace T_g, tj. lin. operátor na V

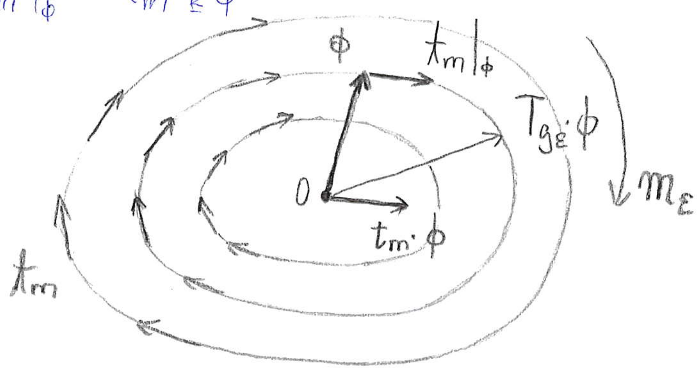
platí

$$\mathfrak{t}_m|_\phi = t_m \cdot \phi \qquad \text{tj. } \mathfrak{t}_m^A|_\phi = t_m{}^A{}_K \phi^K$$

zde ztotožňujeme vekt. na V s V

důkaz: $m \leftrightarrow g_\varepsilon \quad g_0 = e \quad \frac{Dg_\varepsilon}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = m$

$$\mathfrak{t}_m|_\phi = \frac{d}{d\varepsilon} T_{g_\varepsilon} \phi \Big|_{\varepsilon=0} = t_m \cdot \phi$$



Věta: generátory reprezentace LG tvoří reprezentaci LA

pro generátor t_m reprezentace T_g platí

$$t_{[m,n]} = [t_m, t_n] \overset{def}{=} t_m \cdot t_n - t_n \cdot t_m$$

t_m je lineární v argumentu m

tj. tvoří reprezentaci LA g

důkaz

$t_\square$ je indukov. zobr. z zobr $T_\square$ v bodě e $\Rightarrow$ linearita

víme, že gener. akce t_m splňují

$$[\mathsf{t}_m, \mathsf{t}_n] = -\mathsf{t}_{[m,n]} \qquad \mathsf{t}_m|_\phi = t_m \cdot \phi$$

zkoumejme akci vekt. polí na funkci F na V

∂ derivace na V, ztotožňujeme tečné vektory na V s V

$$\mathsf{t}_m^A \partial_A F|_\phi = \partial_A F|_\phi \, t_m{}^A{}_B \, \phi^B$$

z definice L. závorek

$$[\mathsf{t}_m, \mathsf{t}_n]^A \partial_A F|_\phi = \mathsf{t}_m^A \partial_A(\mathsf{t}_n^B \partial_B F) - \mathsf{t}_n^A \partial_A(\mathsf{t}_m^B \partial_B F)$$

$$= \mathsf{t}_m^A \partial_A(\partial_B F \, t_n{}^B{}_L \, \phi^L) - m \leftrightarrow n = \partial_A(\partial_B F \, t_n{}^B{}_L \, \phi^L) \, t_m{}^A{}_K \, \phi^K - m \leftrightarrow n$$

$$= \partial_B F \, (t_n{}^B{}_A \, t_m{}^A{}_K - t_m{}^B{}_A \, t_n{}^A{}_K) \, \phi^K + \partial_A \partial_B F (t_m{}^A{}_K \, t_n{}^B{}_L - t_n{}^A{}_K \, t_m{}^B{}_L) \phi^K \phi^L$$

$$= -\partial_B F \, [t_m, t_n]^B{}_A \, \phi^A$$

dále

$$-\mathsf{t}_{[m,n]}^A \partial_A F = -\partial_B F \, t_{[m,n]}{}^B{}_A \, \phi^A$$

$$\Rightarrow [t_m, t_n] = t_{[m,n]}$$

Věta

$$T_{\exp m} = \exp t_m$$

důkaz

$T_{\exp \alpha m}$ splňuje vlastnosti maticové exponenciály

$T_{\exp(0m)} = T_e =$

$$\frac{d}{d\alpha} T_{\exp(\alpha m)}\Big|_\alpha = \frac{d}{d\varepsilon} T_{\exp(\alpha+\varepsilon)m}\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} T_{\exp(\varepsilon m)}\Big|_{\varepsilon=0} \cdot T_{\exp(\alpha m)} = t_m \cdot T_{\exp(\alpha m)}$$

$$\Rightarrow T_{\exp(\alpha m)} = \exp(\alpha t_m)$$