VEKTOROVÉ FIBROVANÉ PROSTORY

Fibrované prostory
Vektorové bundly
Trivializace vektorového bundlu
Kovariantní derivace na vektorových bundlech
Pseudoderivace na vektorových bundlech
Antisymetrické formy s hodnotami ve vektorových bundlech
Vnější kovariantní derivace na tečném bundlu
Křivost kovariantní derivace na vektorovém bundlu
Vlastnosti tenzoru křivosti

Fibrované prostory

Def:

$M, \mathbb{P}$ variety

$\mathbb{P}M$ je fiber bundle nad M se stand. fibrem $\mathbb{P}$ $\equiv$

$\mathbb{P}M$ je dif. varieta

$\pi : \mathbb{P}M \to M$ je diferencovatelná projekce

$\mathbb{P}M$ je lokálně triviální, t.j.

$\forall x \; \exists U$ okolí x $\quad \pi^{-1}(U) \underset{\uparrow}{\cong} U \times \mathbb{P}$

diffeomorfizmus

$\mathbb{P}_x M$ je fiber nad $x \in M$ $\equiv$ $\mathbb{P}_x M = \pi^{-1} x$

pokud má $\mathbb{P}$ dodatečnou strukturu, které je respektována difeomorf $\cong$ v definici mluvíme o fibr. bundle s příslušnou strukturou

typicky: vektorové f.b., grupové f.b., ~~k~~.alg. f.b.

Vektorové fibrované bundly

Def:

M varieta, A vekt. prostor

AM je vektorový bundl nad M se standardním fibrem A $\equiv$

AM je dif. varieta

$\pi: AM \to M$ diferencovatelná projekce

AM lokálně triviální, tj.

$\forall x \in M \quad \exists U \subset M$ okolí $x \qquad \pi^{-1}(U) \cong U \times A$

$A_x M$ je fibr nad $x \in M$ $\equiv$ $A_x M = \pi^{-1} x$

Def:

AM vektorový bundl nad M

a je řez AM $\equiv$

$a: M \to AM$ (diferencovatelné)

$\pi a = id$

$\mathcal{S}ect\, AM \equiv$ prostor všech řezů AM

Def:

AM vekt. bundl nad M se stand. fibrem A

$A^k_l M$ tenz. bundl nad M vygenerovaný z AM $\equiv$

$$A^k_l M = (\underbrace{A \otimes \ldots \otimes A}_{k} \otimes \underbrace{A^* \otimes \ldots \otimes A^*}_{l})\, M$$

Lema:

$A^k_l M$ je vekt. bundl nad M se stand. fibrem A^k_l

Trivializace vektorového bundlu

Def

AM vekt. bundl $\dim A = D$

$U_{(\alpha)}$ soubor okolí pokrývajících varietu M

trivializace je soubor bazí ${}^{(\alpha)}E_A$ defin. na okolích $U_{(\alpha)}$

tj. ${}^{(\alpha)}E_A$ $A=1\dots D$ jsou lin. nezáv. řezy $A^{(\alpha)}U$

nechť ${}^{(\alpha)}E^A$ je duální báze

tyto báze definují

(i) trivializující zobr.

$${}^{(\alpha)}\Phi_x : A_xM \to \mathbb{R}^D \qquad x \in U_{(\alpha)}$$

$${}^{(\alpha)}\Phi : \psi \to \psi^A = {}^{(\alpha)}E^A \cdot \psi \qquad \text{tj.} \quad \psi = \psi^A\, {}^{(\alpha)}E_A$$

(ii) inverzní trivial. zobr.

$${}^{(\alpha)}\Phi_x^{-1} : \mathbb{R}^D \to A_xM \qquad x \in U_{(\alpha)}$$

$${}^{(\alpha)}\Phi^{-1} : \psi^A \to \psi = \psi^A\, {}^{(\alpha)}E_A$$

Pozn: lze ztotožnit ${}^{(\alpha)}\Phi^A \equiv {}^{(\alpha)}E^A$ a ${}^{(\alpha)}\Phi^{-1}{}_A = {}^{(\alpha)}E_A$

(iii) přechodové zobrazení

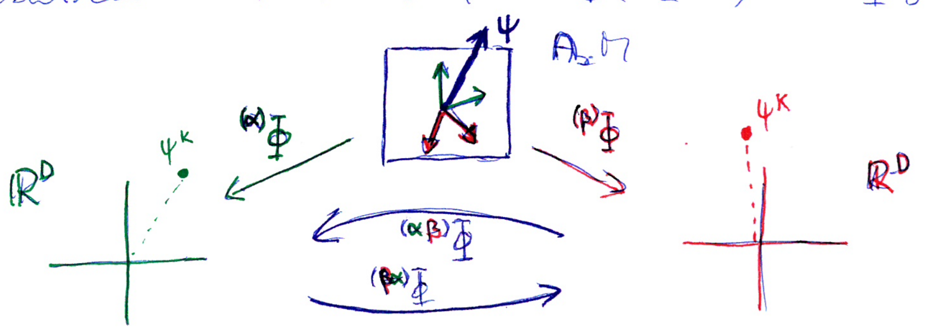
$${}^{(\alpha\beta)}\Phi_x : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^D \qquad x \in U_{(\alpha)} \cap U_{(\beta)}$$

$${}^{(\alpha\beta)}\Phi = {}^{(\alpha)}\Phi \circ {}^{(\beta)}\Phi^{-1} \ : \ \psi^A \to {}^{(\alpha\beta)}\Phi^A{}_B\, \psi^B$$

platí

$${}^{(\beta)}E_B = {}^{(\alpha)}E_A\, {}^{(\alpha\beta)}\Phi^A{}_B \qquad {}^{(\alpha)}E^A = {}^{(\alpha\beta)}\Phi^A{}_B\, {}^{(\beta)}E^B$$

vskutku $\quad {}^{(\alpha)}\Phi^A(\psi) = {}^{(\alpha)}E^A \cdot \psi = {}^{(\alpha\beta)}\Phi\left({}^{(\beta)}\Phi(\psi)\right) = {}^{(\alpha\beta)}\Phi^A{}_B\, {}^{(\beta)}E^B \cdot \psi \quad \Uparrow$

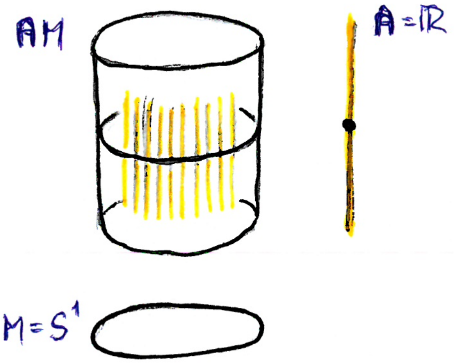


Pomocí souboru přechodových zobr. ${}^{(\alpha\beta)}\underline{\Phi}$ lze zachytit netriviální strukturu vekt. bundle (tj. odlišnost od triv. b. $A \times M$)

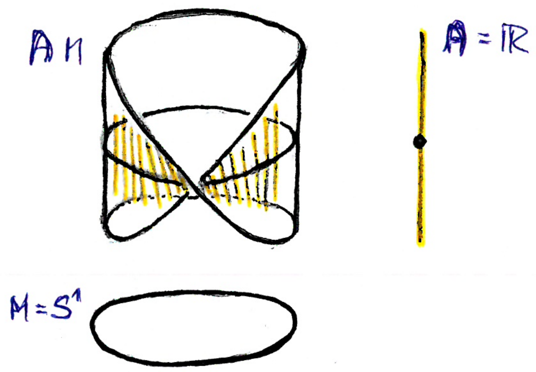
Př: Lineární bundle nad S^1

$M = S^1 \qquad A \cong \mathbb{R}$

triviální bundl



twistovaný bundl

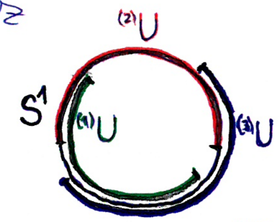


tyto bundly jsou neekvivalentní:

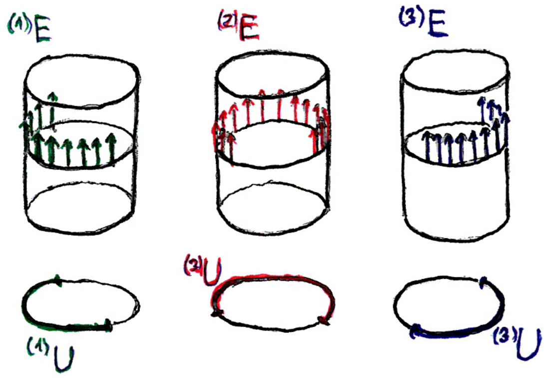
existuje gl. nedeg. řez

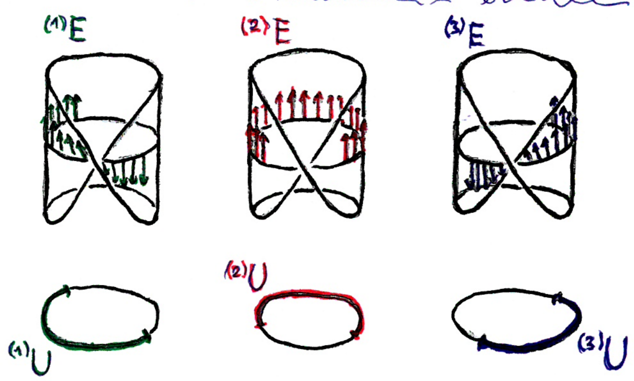
neexistuje gl. nedeg. řez

trivializace:



zvolme 3 okolí ${}^{(\alpha)}U$ na každém (jednotkovou) bázi v lineárním bundle





$${}^{(12)}\underline{\Phi} = [1]$$
$${}^{(23)}\underline{\Phi} = [1]$$
$${}^{(31)}\underline{\Phi} = [1]$$

$${}^{(12)}\underline{\Phi} = [1]$$
$${}^{(21)}\underline{\Phi} = [1]$$
$${}^{(31)}\underline{\Phi} = [-1]$$

Kovariantní derivace na vekt. bundlech

Def:

nechť AM je vekt. bundl

D_ξ je kovariantní derivace na AM ve směru $\xi \in TM$ $\equiv$

$D_\xi : \mathcal{S}ect\, AM \to \mathcal{S}ect\, AM$

$D_\xi \phi|_x$ je dáno znalostí ϕ na lib. okolí x (lokalita)

$$\left.\begin{aligned} D_\xi(\phi+\psi) &= D_\xi\phi + D_\xi\psi \\ D_\xi(f\phi) &= (\xi\cdot df)\,\phi + f\,D_\xi\phi \\ D_{(f\xi+\varsigma)}\phi &= f\,D_\xi\phi + D_\varsigma\phi \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\phi,\psi \in \mathcal{S}ect\, AM \\ &\xi,\varsigma \in TM \\ &f \in \mathcal{F}M \end{aligned}$$

D je kovariantní diferenciál $\equiv$

$D : \mathcal{S}ect\, AM \to \mathcal{S}ect\,(T^*\otimes A)M$

$\xi \cdot D\phi = D_\xi \phi$

Pozn:

ultralokalita derivace D_ξ v argumentu ξ umožňuje definici kov. diferenciálu

Pozn:

kov. der. lze definovat na každém tensorovém bundlu $A^k_l M$
tyto obecně nemusejí souviset, bude ale přirozené používat na všech tens. bundlech "stejnou" kov. derivaci
tu lze specifikovat chováním vůči tens. souč. a kontrakci

Věta:

nechť D je kov. der. na AM

podmínky

$$D(\phi\otimes\psi) = (D\phi)\otimes\psi + \phi\otimes(D\psi)$$

$$D\,C\phi = C\,D\phi \qquad \phi,\psi \text{ řezy tens. bundlů}$$

určují jednoznačně kov. der. na všech tens. bundlech $A^k_l M$

důkaz:

komutace s kontrakcí indukuje kov. der. na A^*M

Leibn. prav. rozšiřuje der. na libovolný $A^k_l M$

Kovariantní derivace na více vekt. bundlech

máme-li kov. der. na různých vekt. bundlech, můžeme definovat kov. der. působící na jejich součinu

Def

${}^{E}D$ kov. der. na $\mathbb{E}M$

${}^{F}D$ kov. der. na $\mathbb{F}M$

D je jejich rozšíření na $\mathbb{E}\otimes\mathbb{F}M$ $\equiv$

$$D(\phi\otimes\psi) = ({}^{E}D\phi)\otimes\psi + \phi\otimes({}^{F}D\psi) \quad \text{pro} \quad \begin{array}{l}\phi\in \mathrm{Sect}\,\mathbb{E}M\\ \psi\in\mathrm{Sect}\,\mathbb{F}M\end{array}$$

takto lze D rozšířit na libovolný tenz. bundl $(\mathbb{E}^{k}_{l}\otimes\mathbb{F}^{m}_{n})M$

Př:

kov. der. ∇ na tečném bundl je příkladem kov. der. na vektorovém bundl $\mathbb{T}M$

nicméně kov. der. na tečném bundl má jemnější strukturu než kov. der. na obecném vekt. bundlu – lze pro ni definovat torzi – zde se využívá, že derivovaný objekt má stejné indexy jako směr derivování

Často budeme pracovat s rozšířením kov. der D na $\mathbb{A}M$ na tečný bundl pomocí kov. der. ∇ na $\mathbb{T}M$. To je myšleno přesně ve smyslu definice výše.
Někdy budeme označovat výslednou kov. der. stejným symbolem jako derivaci na $\mathbb{A}M$

Usnuvka:

Pseudoderivace na vektorových bundlech

Def: pseudoderivace

nechť $\mathcal{A}M$ je vekt. bundl a $\mathcal{A}^{a}_{e}M$ příslušné tenz. bundly

$\mathbb{M}$ je pseudoderivace na $\mathcal{A}M$ $\equiv$

$$\mathbb{M} : \operatorname{Sect} \mathcal{A}^{a}_{e}M \to \operatorname{Sect} \mathcal{A}^{a}_{e}M$$

$$\mathbb{M}(\phi + \psi) = \mathbb{M}\phi + \mathbb{M}\psi$$

$$\mathbb{M}(\phi\psi) = (\mathbb{M}\phi)\psi + \phi(\mathbb{M}\psi)$$

$$\mathbb{M}\, C\phi = C\, \mathbb{M}\phi$$

$$\mathbb{M} f = 0$$

ϕ, ψ řezy tenz. bundlů

$f \in \mathcal{F}M$

Věta akce pseudoderivace

pseudoderivace je ultralokální operátor jehož akce je dána akcí na vekt. bundlu $\mathcal{A}M$

$$\mathbb{M}\phi^{K} = M^{K}{}_{L}\,\phi^{L}$$

$\Downarrow$

$$\mathbb{M}\,\mathcal{X}^{KL\ldots}_{MN\ldots} = M^{K}{}_{A}\,\mathcal{X}^{AL\ldots}_{MN\ldots} + M^{L}{}_{A}\,\mathcal{X}^{KA\ldots}_{MN\ldots} + \ldots - M^{A}{}_{M}\,\mathcal{X}^{KL\ldots}_{AN\ldots} - M^{A}{}_{N}\,\mathcal{X}^{KL\ldots}_{MA\ldots} - \ldots$$

důkaz

viz pseudoderivace na TM

vlastnosti pseudoderivace umožňují rozšířit akci z $\mathcal{A}M$ na $\mathcal{A}^{*}M$ a následně na všechny $\mathcal{A}^{a}_{e}M$

Pozn:

pseudoderivace lze rozšířit tak, že přidává tečné indexy, které se neúčastní operací výše, např. $\mathbb{A}_{m}$, $\mathbb{F}_{mn}$, atd.

Def pseudoderivace na tenz. součinu vekt. bundlů

nechť $\mathbb{A}$ je pseudoder. na $\mathbb{E}M$ a $\mathbb{B}$ je pseudoder. na $\mathbb{F}M$

na $(\mathbb{E}\otimes\mathbb{F})M$ lze definovat pseudoderivace

$$\mathbb{M} = \mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$$

$$\mathbb{M}\,\mathcal{X}^{K\ldots m\ldots}_{L\ldots n\ldots} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{působí pouze na } {K \atop L}}}{\mathbb{A}}\,\mathcal{X}^{K\ldots m\ldots}_{L\ldots n\ldots} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{působí pouze na } {m \atop n}}}{\mathbb{B}}\,\mathcal{X}^{K\ldots m\ldots}_{L\ldots n\ldots}$$

$$= A^{K}{}_{C}\,\mathcal{X}^{C\ldots m\ldots}_{L\ldots n\ldots} + \ldots - A^{C}{}_{L}\,\mathcal{X}^{K\ldots m\ldots}_{C\ldots n\ldots} - \ldots + B^{m}{}_{c}\,\mathcal{X}^{K\ldots c\ldots}_{L\ldots n\ldots} + \ldots - B^{c}{}_{n}\,\mathcal{X}^{K\ldots m\ldots}_{L\ldots c\ldots} - \ldots$$

tato pseudoderivace splňuje všechny vlastnosti pseudoder. na $(\mathbb{E}\otimes\mathbb{F})M$ včetně Leibniz. pravidla pro tenz. v součinovém tvaru

$$\mathbb{M}\left(\phi^{K\ldots}_{L\ldots}\,\psi^{m\ldots}_{n\ldots}\right) = \left(\mathbb{A}\phi^{K\ldots}_{L\ldots}\right)\psi^{m\ldots}_{n\ldots} + \phi^{K\ldots}_{L\ldots}\left(\mathbb{B}\psi^{m\ldots}_{n\ldots}\right)$$

Lema

nechť $D, \tilde{D}$ jsou kov. der. def. na tenz. bundlech $A^k_l M$
jejich rozdíl

$$\mathcal{A}\, X = DX - \tilde{D}X \qquad X \in \mathcal{S}ect\, A^k_l M$$

je pseudoderivace na $A^k_l M$, tj. ultralokální zobr. v X
dané svojí akcí na AM

$$A_m \phi^A = A_m{}^A{}_K\, \phi^K \qquad \phi \in \mathcal{S}ect\, AM$$

$$A_m X^{AB\dots}_{CD\dots} = A_m{}^A{}_K\, X^{KB\dots}_{CD\dots} + A_m{}^B{}_K\, X^{AK\dots}_{CD\dots} + \dots - A_m{}^L{}_C\, X^{AB\dots}_{LD\dots} - A_m{}^L{}_D\, X^{AB\dots}_{CL\dots} - \dots$$

Def:

$A_m{}^K{}_L$ nazýváme rozdílový tenzor derivací D a $\tilde{D}$

Př:

pro tenzor typu $A^1_1 M$ dostáváme

$$D_m M^A{}_B - \tilde{D}_m M^A{}_B = A_m M^A{}_B = A_m{}^A{}_K M^K{}_B - A_m{}^K{}_B M^A{}_K = [A_m, M]^A{}_B$$

kde $[\,,\,]$ je komutátor "maticového" násobení

Def:

nechť E_A je trivializace (báze) v AM

∂ je souřadnicová derivace trivializace E_A $\equiv$

$$\partial E_A = 0 \qquad \text{resp.} \qquad \partial E^A = 0$$

akce na $\phi \in \mathcal{S}ect\, AM$ pak je

$$\partial\phi = (d\phi^A)\, E_A \qquad \text{tj} \quad (\partial\phi)^A_m = \partial_m \phi^A = \phi^A{}_{,m} \qquad \phi = \phi^A E_A$$

rozdílový tenz. $A_m{}^K{}_L$ kov. der. D vůči der. ∂
nazýváme vektorový potenciál D

$$D_m = \partial_m + A_m \qquad A_m \text{ generovaného tenzorem } A_m{}^K{}_L$$

Lemma Rozdílový tenzor na $(E\otimes F)M$

nechť $D, \tilde{D}$ jsou kov. der. na $(E\otimes F)M$ získané z derivací ${}^{E}D, {}^{E}\tilde{D}$ na EM a ${}^{F}D, {}^{F}\tilde{D}$ na FM, pak rozdílová pseudoderivace

$$A = D - \tilde{D}$$

má strukturu

$$A = {}^{E}A \oplus {}^{F}A$$

kde ${}^{E}A = {}^{E}D - {}^{E}\tilde{D}$ působí pouze na indexy z EM a
${}^{F}A = {}^{F}D - {}^{F}\tilde{D}$ působí pouze na indexy z FM

konkrétně

$$A_m X^{k\dots\mathfrak{m}\dots}_{l\dots\mathfrak{n}\dots} = {}^{E}A_m{}^{k}{}_{c} X^{c\dots\mathfrak{m}\dots}_{l\dots\mathfrak{n}\dots} + \dots - {}^{E}A_m{}^{c}{}_{l} X^{k\dots\mathfrak{m}\dots}_{c\dots\mathfrak{n}\dots} - \dots \qquad \text{akce } {}^{E}A$$

$$+ {}^{F}A_m{}^{\mathfrak{m}}{}_{\mathfrak{c}} X^{k\dots\mathfrak{c}\dots}_{l\dots\mathfrak{n}\dots} + \dots - {}^{F}A_m{}^{\mathfrak{c}}{}_{\mathfrak{n}} X^{k\dots\mathfrak{m}\dots}_{l\dots\mathfrak{c}\dots} - \dots \qquad \text{akce } {}^{F}A$$

důkaz:

stačí ověřit akci $D-\tilde{D}$ pro tenzory v součinovém tvaru

$$X^{k\dots\mathfrak{m}\dots}_{l\dots\mathfrak{n}\dots} = R^{k\dots}_{l\dots} \otimes S^{\mathfrak{m}\dots}_{\mathfrak{n}\dots}$$

$$[D-\tilde{D}]X = ([D-\tilde{D}]R)\otimes S + R\otimes([D-\tilde{D}]S) = ({}^{E}A R)\otimes S + R\otimes({}^{F}A S)$$

což je přesný význam výše naznačené akce

$$[{}^{E}A \oplus {}^{F}A](R\otimes S)$$

Věta Komponenty kov. derivace

nechť M je varieta se souř. x^a a ∇ kov. der. na TM daná christoffel. koeficienty Γ^a_{mn}

nechť AM je vekt. bundle s trivializací E_A, ∂

D je kov. der. s vekt. potenciálem $A_m{}^{K}{}_{L}$

komponenty kov. der. obecného tenzoru z $(T\otimes A)M$ jsou

$$D_a X^{m\dots M\dots}_{n\dots N\dots} = X^{m\dots M\dots}_{n\dots N\dots,a} + \Gamma^m_{ak} X^{k\dots M\dots}_{n\dots N\dots} + \dots - \Gamma^k_{an} X^{m\dots M\dots}_{k\dots N\dots} - \dots$$

$$+ A_m{}^{M}{}_{K} X^{m\dots K\dots}_{n\dots N\dots} + \dots - A_m{}^{K}{}_{N} X^{m\dots M\dots}_{n\dots K\dots} - \dots$$

neboli

$$D = \partial + \Gamma \oplus A$$

kde ∂ je daná souř. der. na TM a trivializací na AM

Antisymetrické formy s hodnotami ve vekt. bundlu

Def:

$\mathcal{A}M$ vekt. bundl nad varietou M

$\Lambda^p \mathcal{A}^k_l M$ je vekt. bundl $\mathcal{A}^k_l$-značných antisym. forem na M ≡

$$\Lambda^p \mathcal{A}^k_l M = (\Lambda^p \otimes \mathcal{A}^k_l)\, M$$

tj. jedná se antisym. formy na M stupně p s hodnotami v $\mathcal{A}^k_l M$

mají $\phi_{a_1 \dots a_p \underline{N}\dots}{}^{\underline{M}\dots}$

Def

na $\Lambda^p \mathcal{A}^k_l M$ máme přirozeně zobecněný vnější součin

$$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots = \binom{p}{p_1\, p_2 \dots}\, \mathcal{A}(\phi_1 \otimes \phi_2 \otimes \dots) \quad \in \Lambda^p \mathcal{A}^k_l M$$

↑ antisymetrizace v ΛM

v indexech

$$\phi_{1\, a_1 \dots a_{p_1} \underline{N}_1 \dots}{}^{\underline{M}_1 \dots} \wedge \phi_{2\, a_{p_1+1} \dots a_{p_1+p_2} \underline{N}_2 \dots}{}^{\underline{M}_2 \dots} \wedge \dots = \binom{p}{p_1\, p_2 \dots}\, \phi_{1\,[a_1 \dots a_{p_1} |\underline{N}_1| \dots}{}^{\underline{M}_1 \dots}\, \phi_{2\, a_{p_1+1} \dots a_{p_1+p_2} |\underline{N}_2| \dots}{}^{\underline{M}_2 \dots} \dots {}_{a_p]}$$

kde

$$\phi_i \in \Lambda^{p_i} \mathcal{A}^{k_i}_{l_i} M \qquad p = \sum_i p_i \qquad k = \sum_i k_i \qquad l = \sum_i l_i$$

Př:

$$\phi_{a\underline{K}\dots}{}^{\underline{M}\dots} \wedge \psi_{b\underline{L}\dots}{}^{\underline{N}\dots} = \phi_{a\underline{K}\dots}{}^{\underline{M}\dots} \psi_{b\underline{L}\dots}{}^{\underline{N}\dots} - \phi_{b\underline{K}\dots}{}^{\underline{M}\dots} \psi_{a\underline{L}\dots}{}^{\underline{N}\dots}$$

$$\phi_{a\underline{K}\dots}{}^{\underline{M}\dots} \wedge \psi_{bc\underline{L}\dots}{}^{\underline{N}\dots} = \phi_{a\underline{K}\dots}{}^{\underline{M}\dots} \psi_{bc\underline{L}\dots}{}^{\underline{N}\dots} + \phi_{b\underline{K}}{}^{\underline{M}} \psi_{ca\underline{L}\dots}{}^{\underline{N}\dots} + \phi_{c\underline{K}\dots}{}^{\underline{M}\dots} \psi_{ab\underline{L}\dots}{}^{\underline{N}\dots}$$

pozice fibrovaných indexů u členů v součinu zůstává stejné (prostý tenz. součin)

antisymetrizují se pouze tečné indexy

Def: Kovariantní vnější derivace

nechť D je kov. derivace na vekt. bundlu $\mathcal{A}M$

$\overset{D}{d}$ je kovariantní vnější derivace na $\Lambda^p \mathcal{A}^k_l M$ ≡

$\overset{D}{d} : \mathrm{Sect}\, \Lambda^p \mathcal{A}^k_l M \to \mathrm{Sect}\, \Lambda^{p+1} \mathcal{A}^k_l M$

$\overset{D}{d}(\phi+\psi) = \overset{D}{d}\phi + \overset{D}{d}\psi$

$\overset{D}{d}(\phi\wedge\psi) = (\overset{D}{d}\phi)\wedge\psi + (-1)^p\, \phi\wedge(\overset{D}{d}\psi)$ pro $\phi\in \mathrm{Sect}\,\Lambda^p \mathcal{A}^k_l M$

$\overset{D}{d}\phi = D\phi$ pro $p=0$ tj $\phi \in \mathrm{Sect}\, \mathcal{A}^k_l M$

$\overset{D}{d}\phi = d\phi$ pro $k,l=0$ tj $\phi\in \mathrm{Sect}\,\Lambda^p M$

pozn: pro definici není potřeba specifikovat $\overset{D}{d}\overset{D}{d}$
tento výraz budeme zkoumat v souvislosti s křivostí
pro $\phi \in \Lambda^p M$ poslední pravidlo dává $dd\phi=0$, toto nebude pravda obecně

Lemma Vyjádření v souřadnicích na M

nechť x^a jsou souřadnice na M

$$\phi = \sum_{a_1<\dots<a_p} \phi_{a_1\dots a_p}\, dx^{a_1}\wedge\dots\wedge dx^{a_p} \qquad \phi\in \mathrm{Sect}\,\Lambda^p \mathcal{A}^k_l M$$

kde $\phi_{a_1\dots a_p} \in \mathrm{Sect}\, \mathcal{A}^k_l M$ jsou komponenty z hlediska tečných ind. ale abstraktní fibrované tensory

pak lze kov. vnější der. psát

$$\overset{D}{d}\phi = \sum_{a_1<\dots<a_p} (D\phi_{a_1\dots a_p})\wedge dx^{a_1}\wedge\dots\wedge dx^{a_p}$$

$$= (p+1)\sum_{a_0<a_1<\dots<a_p} (D_{[a_0}\phi_{a_1\dots a_p]})\, dx^{a_0}\wedge dx^{a_1}\wedge\dots\wedge dx^{a_p}$$

důkaz:
první řádek je použití linearity, Leibniz. pr. a $ddx^a=0$
druhý řádek je rozpis $D\phi_{a_1\dots a_p} = D_{a_0}\phi_{a_1\dots a_p}\, dx^{a_0}$ a přeuspořádání indexů do uspořádané sumy – viz obdobné diskuze pro obyčejnou vnější derivaci

Pozn:
Tento vzorec platí vůči libovolným souřadnicím x^a a je konzistentní vůči změně souřadnic
zaručuje tak úplnost definice kovar. vnější derivace

Vnější derivace na $\Lambda^p M$ lze vyjádřit pomocí kov. der. ∇ na tečném bundlu TM. Připomeňme

$$d\omega = \nabla\wedge\omega + T\wedge\omega$$

kde T je torze derivace ∇

Tento vztah lze zobecnit pro vnější kov. der. na $\Lambda\mathcal{A}M$

Věta

nechť D je kov. der. na $\mathcal{A}M$ rozšířené na TM pomocí kov. der. ∇ s torzí T, pak

$$^D d_\circ\phi = D\wedge\phi + T\wedge\phi \qquad \text{tj.}$$

$$^D d_{a_0}\phi_{a_1\dots a_p}{}^{M\dots}_{N\dots} = D_{a_0}\wedge\phi_{a_1\dots a_p}{}^{M\dots}_{N\dots} + T^{k}_{a_0 a_1}\wedge\phi_{|k|a_2\dots a_p}{}^{M\dots}_{N\dots}$$

$$= (p+1)\, D_{[a_0}\phi_{a_1\dots a_p]}{}^{M\dots}_{N\dots} + \binom{p+1}{2} T^{k}_{[a_0 a_1}\phi_{|k|a_2\dots a_p]}{}^{M\dots}_{N\dots}$$

důkaz

plyne z rozjisu vnější der. na ΛM

stačí uvažovat tenzory v součinovém tvaru

$$\phi_{a_1\dots a_p}{}^{M\dots}_{N\dots} = \omega_{a_1\dots a_p}\,\varphi^{M\dots}_{N\dots}$$

$$^D d\phi = (d\omega)\,\varphi + (^D d\varphi)\wedge\omega =$$

$$= (\nabla\wedge\omega + T\wedge\omega)\,\varphi + (D\varphi)\wedge\omega = (\varphi\,\nabla\wedge\omega + D\varphi\wedge\omega) + T\wedge\omega\varphi$$

$$= D\wedge(\omega\varphi) + T\wedge(\omega\varphi) = D\wedge\phi + T\wedge\phi$$

Pozn:

Zdůrazněme, že vnější kov. der. $^D d\phi$ nezávisí na volbě ∇
∇ může být libovolná a torze T se do vyjádření $^D d\phi$ dostává pouze volbou ∇ a týká se pouze ∇ na TM.