VEKTOROVÉ FIBROVANÉ PROSTORY

Fibrované prostory
Vektorové bundly
Trivializace vektorového bundlu
Kovariantní derivace na vektorových bundlech
Pseudoderivace na vektorových bundlech
Antisymetrické formy s hodnotami ve vektorových bundlech
Vnější kovariantní derivace na tečném bundlu
Křivost kovariantní derivace na vektorovém bundlu
Vlastnosti tenzoru křivosti

Křivost kovariantní der. na vekt. bundlu

Def Operátor křivosti

nechť D je kov. der. na vekt. bundlu AM

$\mathbb{F}_{\xi,\eta}$ je operátor křivosti ve směrech $\xi, \eta \in TM$ $\equiv$

$$\mathbb{F}_{\xi,\eta} = D_\xi D_\eta - D_\eta D_\xi - D_{[\xi,\eta]}$$

pokud máme kov. der. D rozšířenou na tenz. bundle $A^\bullet_\bullet M$

operátor křivosti působí na řezech $\mathrm{Sect}\, A^\bullet_\bullet M$

Věta

operátor křivosti $\mathbb{F}_{\xi,\eta}$ na tenz. bundlech $A^\bullet_\bullet M$ je

- ultralokální v argumentech ξ a η
- pseudoderivace v argumentu z $A^\bullet_\bullet M$

důkaz:

$$\mathbb{F}_{f\xi,\eta}\phi = D_{f\xi} D_\eta \phi - D_\eta D_{f\xi}\phi - D_{[f\xi,\eta]}\phi = f D_\xi D_\eta \phi - D_\eta(f D_\xi \phi) - D_{f[\xi,\eta]-\eta[f]\xi}\phi$$

$$= f(D_\xi D_\eta \phi - D_\eta D_\xi \phi - D_{[\xi,\eta]}\phi) - \eta[f] D_\xi \phi + \eta[f] D_\xi \phi = f\,\mathbb{F}_{\xi,\eta}\phi$$

$$\mathbb{F}_{\xi,\eta}(f\phi) = D_\xi D_\eta(f\phi) - D_\eta D_\xi(f\phi) - D_{[\xi,\eta]}(f\phi) =$$

$$= D_\xi(f D_\eta \phi) - D_\eta(f D_\xi \phi) - f D_{[\xi,\eta]}\phi + D_\xi(\eta[f]\phi) - D_\eta(\xi[f]\phi) - [\xi,\eta][f]\phi$$

$$= f(D_\xi D_\eta \phi - D_\eta D_\xi \phi - D_{[\xi,\eta]}\phi) + (\xi[f] - \xi[f]) D_\eta \phi - (\eta[f] - \eta[f]) D_\xi \phi$$

$$+ (\xi[\eta[f]] - \eta[\xi[f]] - [\xi,\eta][f])\phi$$

$$= f\,\mathbb{F}_{\xi,\eta}\phi$$

$$\mathbb{F}_{\xi,\eta}(\phi\otimes\psi) = D_\xi D_\eta(\phi\otimes\psi) - D_\eta D_\xi(\phi\otimes\psi) - D_{[\xi,\eta]}(\phi\otimes\psi)$$

$$= D_\xi(D_\eta\phi\otimes\psi + \phi\otimes D_\eta\psi) - D_\eta(D_\xi\phi\otimes\psi + \phi\otimes D_\xi\psi) - D_{[\xi,\eta]}\phi\otimes\psi - \phi\otimes D_{[\xi,\eta]}\psi$$

$$= (D_\xi D_\eta\phi - D_\eta D_\xi\phi - D_{[\xi,\eta]}\phi)\otimes\psi + \phi\otimes(D_\xi D_\eta\psi - D_\eta D_\xi\psi - D_{[\xi,\eta]}\psi)$$

$$+ D_\eta\phi\otimes D_\xi\psi + D_\xi\phi\otimes D_\eta\psi - D_\xi\phi\otimes D_\eta\psi - D_\eta\phi\otimes D_\xi\psi$$

$$= (\mathbb{F}_{\xi,\eta}\phi)\otimes\psi + \phi\otimes(\mathbb{F}_{\xi,\eta}\psi)$$

ostatní vlastnosti pseudoderivace jsou přímočaré

Díky ultralokalitě $\mathbb{F}_{\xi,\varsigma}$ v argumentech ξ,ς umožňuje definovat operátor křivosti nezávislý na ξ a ς

Def Operátor křivosti

nechť D je kov. der. na vekt. bundlu $\mathcal{A}M$

$\mathbb{F}_{mn}$ je operátor křivosti $\equiv$

$$\xi^m \varsigma^n \mathbb{F}_{mn} = \mathbb{F}_{\xi,\varsigma}$$

$\mathbb{F}_{mn}$ lze chápat jako operátor na tenz. bundlech $\mathcal{A}^{\otimes}_{e}M$

Podle věty výše je $\mathbb{F}_{mn}$ též pseudoderivace a její akce je dána působením na $\mathcal{A}M$

Def tenzor křivosti

akce operátoru křivosti na $\mathcal{A}M$ definuje tenzor křivosti $F_{mn}{}^{K}{}_{L}$

$$F_{\xi,\varsigma}{}^{K}{}_{L}\,\phi^{L} = \xi^m \varsigma^n F_{mn}{}^{K}{}_{L}\,\phi^{L} = \left[D_\xi D_\varsigma - D_\varsigma D_\xi - D_{[\xi,\varsigma]}\right]\phi^{K}$$

Věta

operátor křivosti $\mathbb{F}_{mn}$ lze zapsat

$$\mathbb{F}_{mn} = D_m D_n - D_n D_m + T^{k}_{mn} D_k$$

kde D je rozšířeno na $\mathbb{T}M$ pomocí libovolné der. ∇ s torzí T

důkaz:

$$\mathbb{F}_{\xi,\varsigma}\,\phi^{K\dots}_{L\dots} = D_\xi D_\varsigma \phi^{K\dots}_{L\dots} - D_\varsigma D_\xi \phi^{K\dots}_{L\dots} - D_{[\xi,\varsigma]}\phi^{K\dots}_{L\dots} = \xi^m D_m(\varsigma^n D_n \phi^{K\dots}_{L\dots}) - \varsigma^m D_m(\xi^n D_n \phi^{K\dots}_{L\dots}) - [\xi,\varsigma]^n D_n \phi^{K\dots}_{L\dots}$$

$$= \xi^m \varsigma^n (D_m D_n \phi^{K\dots}_{L\dots} - D_n D_m \phi^{K\dots}_{L\dots}) + (\xi^m \nabla_m \varsigma^n - \varsigma^m \nabla_m \xi^n - [\xi,\varsigma]^n) D_n \phi^{K\dots}_{L\dots}$$

$$= \xi^m \varsigma^n \left[D_m D_n - D_n D_m + T^{k}_{mn} D_k\right]\phi^{K\dots}_{L\dots}$$

Věta Zobecněné Ricciho identity

$$\mathbb{F}_{mn} X^{K\dots}_{L\dots} = \left[D_m D_n - D_n D_m + T^{k}_{mn} D_k\right] X^{K\dots}_{L\dots} =$$

$$= F_{mn}{}^{K}{}_{M}\, X^{M\dots}_{L\dots} + \dots - F_{mn}{}^{M}{}_{L}\, X^{K\dots}_{M\dots} - \dots$$

$$F_{mn}{}^{K}{}_{L}\,\phi^{L} = \left[D_m D_n - D_n D_m + T^{k}_{mn} D_k\right]\phi^{K}$$

chápeme-li $D_m X^{K\dots}_{L\dots} = {}^{D}\!d_m X^{K}_{L}$ jako objekt z $\mathcal{A}^1 \mathcal{A}^{\otimes}_{e} M$, můžeme psát

$$\mathbb{F}_{mn} X^{K\dots}_{L\dots} = {}^{D}\!d_m\, {}^{D}\!d_n X^{K\dots}_{L\dots}$$

důkaz: akce pseudoderivace a aplikace vztahu ${}^{D}\!d$ a D

Věta

D kov. derivace na $(A \otimes B)M$ daná kov. der

${}^A D$ na AM s tenzorem křivosti ${}^A F$

${}^B D$ na BM s tenzorem křivosti ${}^B F$

operátor křivosti D je dán

$$\mathbb{F} = {}^A\mathbb{F} \oplus {}^B F \qquad \text{tj.}$$

$$\mathbb{F}_{mn} X^{k..m..}_{l..n..} = {}^A F_{mn}{}^k{}_c X^{c..m..}_{l..n..} + \dots - {}^A F_{mn}{}^c{}_l X^{k..m..}_{c..n..} - \dots \qquad \text{akce } {}^A\mathbb{F}_{mn}$$

$$+ {}^B F_{mn}{}^m{}_c X^{k..c..}_{l..n..} + \dots - {}^B F_{mn}{}^c{}_n X^{k..m..}_{l..c..} - \dots \qquad \text{akce } {}^B\mathbb{F}_{mn}$$

Lemma

v případě, kdy jeden z vekt. bundlů je tečný bundl TM a na něm máme kov. der. ∇ s tenzorem křivosti $R_{mn}{}^k{}_l$ pak

$$[D_m D_n - D_n D_m + T_{mn}^k D_k] X^{a..k..}_{b..l..} = \mathbb{R}_{mn} X^{a..k..}_{b..l..} + \mathbb{F}_{mn} X^{a..k..}_{b..l..}$$

působí pouze na $\frac{a..}{b..}$ působí pouze na $\frac{k..}{l..}$

vše plyne z přímočaré aplikace vlastností pseudoderivace na součinu vektorových bundlů

Věta

nechť D je kov. der. na AM a $\phi \in \mathrm{Sect}\, \Lambda^p A^q_l M$ pak

$${}^D d\, {}^D d\, \phi = \mathbb{F} \wedge \phi \qquad \text{tj.}$$

$${}^D d_m {}^D d_n \phi_{a_1 \dots a_p}{}^{k..}_{l..} = \mathbb{F}_{mn} \wedge \phi_{a_1\dots a_p}{}^{k..}_{l..}$$

působí mezi tečnými indexy mn a $a_1 \dots a_p$

působí jako pseudoderivace na $\frac{k}{l}$

$$= \binom{P}{2} F_{[mn}{}^k{}_A \phi_{a_1 \dots a_p]}{}^{A..}_{l..} + \dots - \binom{P}{2} F_{[mn}{}^A{}_l \phi_{a_1 \dots a_p]}{}^{k..}_{A..} - \dots$$

${}^D d\, {}^D d$ není tak nulové, ale je to ultralokální operace daná křivostí

důkaz:

stačí provést pro tenzory součinového tvaru $\phi_{a_1\dots a_p}{}^{k..}_{l..} = \varphi^{k..}_{l..}\, \omega_{a_1 \dots a_p}$

$${}^D d\, {}^D d (\varphi\omega) = {}^D d\big(({}^D d\varphi) \wedge \omega + \varphi\, d\omega\big) = ({}^D d\, {}^D d \varphi) \wedge \omega - \cancel{D\varphi \wedge d\omega} + \cancel{D\varphi \wedge d\omega} + \underbrace{\varphi\, dd\omega}_{0}$$

$$= (\mathbb{F}\varphi) \wedge \omega = \mathbb{F} \wedge (\varphi\omega)$$

Věta

$D, \tilde{D}$ kov. der. na AM s rozdíl. tenzorem $A_m{}^k{}_l$ tj.

$$D\phi^k - \tilde{D}\phi^k = A_m{}^k{}_l \phi^l$$

rozdíl tenzorů křivosti F a $\tilde{F}$ je

$$F - \tilde{F} = {}^{\tilde{D}}d A + [A, A] = {}^{D}d A - [A, A] \qquad \text{neboli}$$

$$F_{mn} - \tilde{F}_{mn} = {}^{\tilde{D}}d_m A_n + A_m \cdot A_n - A_n \cdot A_m = {}^{D}d_m A_n - A_m \cdot A_n + A_n \cdot A_m \qquad \text{neboli}$$

$$F_{mn}{}^k{}_l - \tilde{F}_{mn}{}^k{}_l = {}^{\tilde{D}}d_m A_n{}^k{}_l + A_m{}^k{}_c A_n{}^c{}_l - A_n{}^k{}_c A_m{}^c{}_l = {}^{D}d_m A_n{}^k{}_l - A_m{}^k{}_c A_n{}^c{}_l + A_n{}^k{}_c A_m{}^c{}_l$$

zvolíme-li rozšíření $D, \tilde{D}$ na TM pomocí ∇ bez torze, máme

$$F - \tilde{F} = \tilde{D} \wedge A + [A, A] = D \wedge A - [A, A] \qquad \text{tj.}$$

$$F_{mn} - \tilde{F}_{mn} = \tilde{D}_m A_n - \tilde{D}_n A_m + A_m \cdot A_n - A_n \cdot A_m = D_m A_n - D_n A_m - A_m \cdot A_n + A_n \cdot A_m$$

Pozn:

člen $[A_m, A_n] = A_m \cdot A_n - A_n \cdot A_m$ lze též zapsat $A_m \wedge A_n$

tento člen není nulový díky nekomutativitě "maticového" násobení.

důkaz:

1) $$F_{mn} \cdot \phi = [D_m D_n - D_n D_m + T_{mn}^k D_k]\phi = D_m(\tilde{D}_n\phi + A_n \cdot \phi) - D_n(\tilde{D}_m\phi + A_m \cdot \phi) + T_{mn}^k \tilde{D}_k \phi + T_{mn}^k A_k \cdot \phi$$

$$= \tilde{D}_m \tilde{D}_n \phi - \tilde{D}_n \tilde{D}_m \phi + T_{mn}^k \tilde{D}_k \phi + \tilde{D}_m(A_n \cdot \phi) - \tilde{D}_n(A_m \cdot \phi)$$

$$+ A_m \cdot \tilde{D}_n \phi - A_n \cdot \tilde{D}_m \phi + T_{mn}^k A_k \cdot \phi + A_m \cdot A_n \cdot \phi - A_n \cdot A_m \cdot \phi$$

$$= \tilde{F}_{mn} \cdot \phi + (\tilde{D}_m A_n - \tilde{D}_n A_m + T_{mn}^k A_k) \cdot \phi + (A_m \cdot A_n - A_n \cdot A_m) \cdot \phi$$

$$+ \cancel{A_m \cdot \tilde{D}_n \phi} - \cancel{A_n \cdot \tilde{D}_m \phi} + \cancel{A_n \cdot \tilde{D}_m \phi} - \cancel{A_m \cdot \tilde{D}_n \phi}$$

$$= (\tilde{F}_{mn} + {}^{\tilde{D}}d_m A_n + [A_m, A_n]) \cdot \phi$$

druhá varianta lze získat záměnou $D \leftrightarrow \tilde{D}$ $A \leftrightarrow -A$

nebo pomocí vztahu

$$D_m A_n = \tilde{D}_m A_n + [A_m, A_n] \quad \Rightarrow \quad D_m \wedge A_n = D_m A_n - D_n A_m = \tilde{D}_m \wedge A_n + 2[A_m, A_n]$$

2) pro $T = 0$ máme ${}^{D}d A = D \wedge A$

Věta

nechť ∂ je souř. derivace trivializace E_A pak tenzor křivosti derivace ∂ je nulový

důkaz

$$F_{\xi\varsigma} \cdot E_A = \partial_\xi \partial_\varsigma E_A - \partial_\varsigma \partial_\xi E_A - \partial_{[\xi,\varsigma]} E_A = 0 \qquad \text{díky } \partial E_A = 0$$

Věta

nechť D je dána vektorovým potenciálem $A_m{}^k{}_l$ vůči trivializaci E_A, ∂

$$F_{mn} = {}^{\partial}d_m A_n + [A_m, A_n] = \partial_m \wedge A_n + [A_m, A_n]$$

kde ∂ je rozšířena na TM jako souř. derivace bez torze

Vlastnosti tenzoru křivosti

Věta: Bianchiho identity

D kov. der. na $\mathcal{A}M$ s tenzorem křivosti $F_{mn}{}^{k}{}_{l}$ pak

$$\overset{D}{d} F = 0 \qquad \text{tj.} \qquad \overset{D}{d}_a F_{bc} = 0$$

pokud rozšíříme D na $\mathcal{T}M$ bez torze, platí

$$D_{[a} F_{bc]} = 0$$

důkaz:

$$\overset{D}{d}\,\overset{D}{d}\,\overset{D}{d}\phi = \overset{D}{d}(\overset{D}{d}\,\overset{D}{d}\phi) = \overset{D}{d}(F\cdot\phi) = (\overset{D}{d}F)\cdot\phi + \underline{F\wedge\overset{D}{d}\phi}$$

$$= \overset{D}{d}\,\overset{D}{d}(\overset{D}{d}\phi) = F\wedge\overset{D}{d}\phi = \underline{F\wedge\overset{D}{d}\phi}$$

$$\Rightarrow \overset{D}{d}F = 0$$

pro rozšíření s nulovou torzí máme

$$\overset{D}{d}_a F_{bc} = D_a \wedge F_{bc} = 3\, D_{[a} F_{bc]}$$

Pozn.:

pro kov. der. ∇ na $\mathcal{T}M$ tak dostáváme elegantní důkaz Bianchiho identit (∇ bez torze)

$$\nabla_{[a} R_{bc]}{}^{k}{}_{l} = 0 \iff \overset{\nabla}{d} R = 0 \quad \text{kde chápeme } R \in \Lambda^2 \mathcal{T}^1_1 M$$

argument funguje i pro ∇ s torzí

Věta Zákon zachování

M varieta s metrikou g a Levi-Civitovou der. ∇

$$\nabla g = 0 \qquad T = 0$$

D kov. der. na AM rozšířené na TM pomocí ∇

platí

$$D_m D_n F^{mn\,k}{}_l = 0$$

kde F je tenzor křivosti D

Pozn.:

identitu lze chápat jako "lokální zákon zachování"

$$D_m J^{m\,k}{}_l = 0$$

kde

$$J^{m\,k}{}_l = D_n F^{mn\,k}{}_l$$

důkaz:

$$2 D_m D_n F^{mn} = [D_m D_n - D_n D_m] F^{mn} = \mathbb{R}_{mn} F^{mn} + \mathbb{F}_{mn} F^{mn} =$$

$$= R_{mn}{}^m{}_k F^{kn} + R_{mn}{}^n{}_k F^{mk} + [F_{mn}, F^{mn}] =$$

$$= \underbrace{Ric_{nk} F^{kn}}_{0} - \underbrace{Ric_{mk} F^{mk}}_{0} + \underbrace{F_{mn} \cdot F^{mn} - F^{mn} \cdot F_{mn}}_{0}$$

$$= 0$$

kde jsme užili symetrii Ric_{ab}