Vnější kovariantní derivace na tečném bundlu

Speciální případ A_e^g-značných forem je, pokud za vekt. bundl AM zvolíme přímo tečný bundl TM. Budeme tak pracovat s $T_e^g M$-značnými formami, tj. objekty

$$\omega_{a_1 \dots a_p}{}^{m\dots}{}_{n\dots} \in \Lambda^p T_e^g M$$

Na formových indexech $a_1 \dots a_p$ máme definované operace vnějšího násobení $\wedge$ a vnější derivace d

Na indexech z prost $T_e^g M$ jak tenzorové násobení a kov. der. ∇

Dohromady definují kov. vnější derivaci $\overset{\nabla}{d}$

$$\overset{\nabla}{d}_{a_0} \omega_{a_1 \dots a_p}{}^{m\dots}{}_{n\dots}$$

Věta o vztahu vnější kov. der. a kov. der. jak dává návod jak vnější derivaci na $\Lambda^p M$ převést na kov. der. na $T^0_{[p]} M$

$$\underbrace{\overset{\nabla}{d}_{a_0} \omega_{a_1 \dots a_p}{}^{m\dots}{}_{n\dots}}_{\Lambda^p T_e^g M} = \nabla_{a_0} \wedge \underbrace{\omega_{a_1 \dots a_p}{}^{m\dots}{}_{n\dots}}_{T_{p+e}^g M} + T^k_{a_0 a_1} \wedge \omega_{|k| a_2 \dots a_p}{}^{m\dots}{}_{n\dots}$$

Při používání tohoto formalismu je potřeba dávat pozor, které indexy se chápou jako formové, z $\Lambda^p M$, a které jako tenzorové, z $T_e^g M$

Vzhledem k tomu, že se však jedná o tenzorové indexy stejného typu, existuje volnost, jak se indexy rozdělí. Toho lze využít s výhodou při některých úpravách.

Věta Torze kov. der ∇ na TM

chápejme jednotkový tenzor δ_a^m jako objekt z $\Lambda^1 T_0^1 M$ jak

$$\overset{\nabla}{d}_a \delta_b^m = T^m_{ab}$$

důkaz

přímé použití vztahu $\overset{\nabla}{d}$ a ∇ a faktu $\nabla \delta = 0$

$$\overset{\nabla}{d}_a \delta_b^m = \nabla_a \wedge \delta_b^m + T^n_{ab} \delta_n^m = 2 \nabla_{[a} \delta_{b]}^m + T^m_{ab} = T^m_{ab}$$

Pro tečný bundl $\mathbb{T}M$ je tenzor křivosti Riemannův tenz. R
Ten lze chápat jako $\mathbb{T}^1_1 M$-značnou 2-formu

$$R_{\underline{mn}}{}^{a}{}_{b} \in \Lambda^2 \mathbb{T}^1_1 M$$

Stejně tak Christoffelovy symboly charakt. rozdíl ∇ a souřadnicové der. $\nabla = \partial + \Gamma^a$ jsou $\mathbb{T}^1_1 M$ značné 1-formy

$$\Gamma_{\underline{m}}{}^{a}{}_{b} \in \Lambda^1 \mathbb{T}^1_1 M$$

V tomto smyslu můžeme použít vzorec pro tenz. kř. na vektorovém bundlu

Věta

mějme kov. der. ∇ a souř. der ∂ na tečném bundlu $\mathbb{T}M$

$$\nabla = \partial + \Gamma$$

Riemannův tenzor je dán

$$R_{\underline{mn}}{}^{a}{}_{b} = \partial d_{\underline{m}} \Gamma_{\underline{n}}{}^{a}{}_{b} + [\Gamma_{\underline{m}}, \Gamma_{\underline{n}}]^a{}_b$$

Rozepíšeme-li kov. vnější derivaci a komutátor, dostaneme standardní vzorec

$$R_{\underline{mn}}{}^{a}{}_{b} = \partial_{\underline{m}} \Gamma_{\underline{n}}{}^{a}{}_{b} - \partial_{\underline{n}} \Gamma_{\underline{m}}{}^{a}{}_{b} + \Gamma_{\underline{m}}{}^{a}{}_{k} \Gamma_{\underline{n}}{}^{k}{}_{b} - \Gamma_{\underline{n}}{}^{a}{}_{k} \Gamma_{\underline{m}}{}^{k}{}_{b}$$

Věta Bianchiho identity pro ∇

na $\mathbb{T}M$ lze Bianchiho identity pro ∇ zapsat

$$\overset{\nabla}{d}_a R_{bc}{}^{k}{}_{l} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\nabla_{[a} R_{bc]}{}^{k}{}_{l} = T_{[ab}{}^{n} R_{c]n}{}^{k}{}_{l}$$

pro beztorzní derivaci ∇ tak máme

$$\nabla_{[a} R_{bc]}{}^{k}{}_{l} = 0$$