Kalibrační symetrie

polní teorie popisované pomocí vektorových bundlů mají většinou symetrii vůči transformacím působícím na každém fibru

kalibrační grupa
tyto transformace v jednom fibru tvoří tzv. kalibrační grupu
jedná se o Lieovu grupu konečné dimenze
grupy kalibr. transf. ve všech fibrech jsou isomorfní

lokální kalibrační grupa
kalibr. tranformace v různých fibrech jsou nezávislé a nelze je ani nijak kanonicky porovnávat
plná kalibr. symetrie je tak symetrie vůči lokální kalibr. transformaci, které je zadána volbou kalibr. ve všech bodech

grupový bundl
matematicky lze kalibr. transformace popsat jako grupový bundl GM nad základovou varietou M se stand. fibrem G kt. tvoří Lieova grupa
lokální kalibr. transformace bude pak řez tohoto bundlu
grupa lokálních kalibr. transf. tedy je $\mathrm{Sect}\, GM$

Lieova algebra lokální kalibr. grupy
ke kalibrační grupě G máme její Lieovu algebru $\mathfrak{g} = T_e G$
ke grupovému bundlu GM můžeme vytvořit bundl Lieovy algebry $\mathfrak{g}M$
řezy tohoto bundlu $\mathrm{Sect}\, \mathfrak{g}M$ tvoří Lieovu alg. lok. kal. grupy

reprezentace na vektorovém bundlu AM
akci kalibr. grupy GM na vekt. bundlu je skrze reprezentaci
všechny kalibr. transf. v bodě x jsou reprezentovány prvky z $A_x{}^1M$ tj. lin. operátory na A_xM
podobně máme reprezentovanou kalibr. algebru $\mathfrak{g}M$

popis kalibr. transf. pomocí zvolené struktury na AM
reprezentaci kalibr. grupy, lze vymezit požadavkem, že transformace zachovává nějakou strukturu, např. reálný skal. součin (metriku), komplexní sk. součin (hermitovskou strukt.), orientaci, symplekt. str, atd.
toto vymezení pak indukuje i reprezentaci kalibr. algebry
nejdříve si ukážeme dva základní příklady tohoto postupu

Reálný vektorový bundl s O či SO symetrií

Kalibrační transformace bude vymezena jako transformace zachovávající fibrovou metriku, případně navíc orientaci

popis "standardní kopie" metrické struktury:

Metrická struktura

A reálný vekt. pr. (bude stand. fiber)

H_{AB} nedegenerovaná symetrická metrika

$H_{AB} = H_{BA}$ existuje $H^{-1\,AB}$ $H_{AN} H^{-1\,NB} = 1\!\!1^B_A$

zvyšování a snižování indexů

$H^{AB} = H^{-1\,AB}$ $H^A{}_B = 1\!\!1^A_B$

transpozice (speciální případ zvyš. a sniž. indexů)

$\phi^A \to \phi^T{}_A = H_{AB}\phi^B$

$\phi_A \to \phi^{TA} = H^{AB}\phi_B$

$X^A{}_B \to X^{TA}{}_B = H^{AM} H_{BN} X^N{}_M = X_B{}^A$

skalární součin

$(\phi, \psi) = \phi^A \psi^B H_{AB}$

$(\phi, \psi) = \phi^T \cdot \psi = \phi \cdot \psi^T$ $(X \cdot \phi, \psi) = (\phi, X^T \cdot \psi)$

signatura H_{AB}

$(\underbrace{- \dots -}_{m} \underbrace{+ \dots +}_{p})$ signatura (m, p)

(pseudo)ortonormální transformace

lin. transf. A zachovávající sk. součin

$R^A{}_B \in A^1_1$ $\tilde{\phi}^A = R^A{}_M \phi^M$ $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) = (\phi, \psi)$

$\Leftrightarrow$ $\tilde{H}_{AB} = H_{AB}$ $\Leftrightarrow$ $H_{AB} = H_{MN} R^M{}_A R^N{}_B$ $\Leftrightarrow$ $R^T \cdot R = 1\!\!1$

ortonorm. transf. tvoří grupu $G = O(A, H) \cong O(m, p)$

rozšíření ortonorm. transf. na tenzory

$\widetilde{(X \otimes \psi)} = \tilde{X} \otimes \tilde{\psi}$ $\widetilde{\alpha X} = \alpha \tilde{X}$ $\tilde{\alpha} = \alpha$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

$\tilde{X}^{AB\dots}{}_{CD\dots} = R^A{}_K R^B{}_L \dots R^{-1\,M}{}_C R^{-1\,N}{}_D \dots X^{KL\dots}{}_{MN\dots}$

malé ortonormální transformace

$R_\alpha = 1\!\!1 + \alpha r + O(\alpha^2)$ - jednopar. třída ortonorm. tr. blízkých $1\!\!1$

$1\!\!1 = R^T_\alpha \cdot R_\alpha = 1\!\!1 + \alpha(r + r^T) + O(\alpha^2)$

$\Downarrow$

$r = -r^T$ reprezentace Lieovy alg. $\mathfrak{g} = o(A, H) \cong o(m, p)$

Kalibrační grupa repr. podgrupou ortonormální grupy

podgrupa ortonormální grupy může být specifikována zadáním dodatečné struktury, která se má při transformaci zachovat

příkladem může být

Levi-Civitův tenzor určující orientaci

projektory na invariantní podprostory

poznámka

každá poloprostá grupa lze reprezentovat jako podgrupa ortonormální grupy

vskutku, adjoint reprezentace Ad zachovává Killingovu metriku, která je pro poloprostou grupu nedegenerovaná

Orientace

metrika H_{AB} fixuje "jednotkový" totálně antisym. tenzor až na znaménko

volba znaménka znamená volba orientace

Levi-Civitův tenzor na A

$\varepsilon_{A_1\dots A_N}$ normalizace $\varepsilon_{A_1\dots A_N}\varepsilon^{A_1\dots A_N} = (-1)^m N!$

transformace zachovávající orientaci

$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \Leftrightarrow R^{M_1}{}_{A_1}\dots R^{M_N}{}_{A_N}\varepsilon_{M_1\dots M_N} = \varepsilon_{A_1\dots A_N} \Leftrightarrow \det R = 1$

ortonormální transf. zachovávající orientaci

grupa $G = SO(A,H) \cong SO(m,p)$

Lieova alg. $\mathfrak{g} = so(A,H) \cong so(m,p)$

algebra je shodná s algebrou $o(m,p)$

grupa $O(m,p)$ je "dvakrát" větší než $SO(m,p)$

Lokalizace fibrované metrické struktury

AM reálný vekt. bundl se stand. fibrem A
a standardní metrickou strukturou H
tj. máme fibrovanou metriku

$H_{\underline{AB}} \in \mathcal{S}ect\, A^0_2 M$

isomorfní v každém bodě metrice na stand. fibru

je-li AM orientovatelný, lze zvolit globální Levi-Civit. tenzor

$\varepsilon_{A_1 \dots A_N} \in \mathcal{S}ect\, A^0_N M$

neorientovatelnost znamená, že nelze zvolit globální hladký Levi-Civitův tenzor = nelze konzistentně a spojitě zvolit znaménko Levi-Civitova tenzoru na celém bundle

Lokální kalibrační O-transformace

lokální kalibr. O-transformace je hladká lineární transf. všech fibrů zachovávající fibrovou metriku

$\phi^A \in \mathcal{S}ect\, AM$ řez bundlu repr. fyzikální pole

$R^A{}_B \in \mathcal{S}ect\, A^1_1 M$ lokální kalibr. transf

$\phi^A \rightarrow \tilde{\phi}^A = R^A{}_B \phi^B$

$X^{\underline{A}\dots}_{\underline{B}\dots} \rightarrow \tilde{X}^{\underline{A}\dots}_{\underline{B}\dots} = R^A{}_{\underline{M}} \dots R^{-1\underline{N}}{}_{\underline{B}} \dots X^{M\dots}_{N\dots}$

kalibr. transf. vekt. a tenz. polí

$(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) = (\phi, \psi)$ $\tilde{H}_{\underline{AB}} = H_{\underline{AB}}$

$R^M{}_A R^N{}_B H_{\underline{MN}} = H_{\underline{AB}}$

$R^T \cdot R = R \cdot R^T = \mathbb{1}$

lok. kalibr. transf. musí splňovat podmínky ortonormality

lokální kalibr. SO-transformace

$R^A{}_B$ navíc zachovává globální orientaci, tj

$\det R = 1$ či $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$

Lokální kalibrační algebra

Lieova algebra Lieovy grupy popisuje transformace blízké jednotce.
v řeči reprezentací na AM můžeme psát

$R_\alpha = \mathbb{1} + \alpha\Omega + O(\alpha^2) \qquad \Omega \in \mathrm{Sect}\, A^1_1 M$

kde Ω je prvek lokální kal. algebry reprezentovaný na AM
z ortonormality R_α plyne antisymetrie Ω

$\Omega^T = -\Omega$

Lieova závorka je dána komutátorem

$[\Omega_1, \Omega_2] = \Omega_1 \cdot \Omega_2 - \Omega_2 \cdot \Omega_1$

exponenciální zobr. exp: algebra $\to$ grupa je dáno maticovou exponenciálou

$R = \exp(\Omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\Omega^k$

akce Lieovy algebry na obecném tenzoru
prvek lok. kalibrační algebry $\Omega^A{}_B$ působí na tenzory jako pseudoderivace $\boldsymbol{\Omega}$ generované $\Omega^A{}_B$

$\boldsymbol{\Omega} X^{A\ldots}_{B\ldots} = \Omega^A{}_K X^{K\ldots}_{B\ldots} + \ldots - \Omega^K{}_B X^{A\ldots}_{K\ldots} - \ldots$

jedná se o lineární řád v α působení $R_\alpha = (\mathbb{1} + \alpha\Omega)$ na X
viz diskuzi pseudoderivace

Trivializace kompatibilní s O-symetrií

trivializace kompatibilní s metrickou strukturou
je volba báze E_A pro kterou platí

$(E_A, E_B) = $ konst tj. $H_{AB} = $ konst.

konstantnost je myšlena na zákl. varietě M

ortonormální trivializace

$$H_{AB} = \begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & +1 & \\ & & & & +1 \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$ nejběžnější volba

pro speciální signaturu může být výhodné volit
i jiné trivializace

$$H_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$ pro signaturu $m = p$

kalibrační transformace

- kalibr. transf. trivializace konz. s metrikou
  dá trivializaci konz. s metrikou

  $\tilde{E}_{\tilde{A}} = R \cdot E_A$

  $\Rightarrow \quad H_{\tilde{A}\tilde{B}} = H_{AB}$ tj. $(\tilde{E}_{\tilde{A}}, \tilde{E}_{\tilde{B}}) = (E_A, E_B)$ $\leftarrow$ ortonorm. R

  (zde $H_{\tilde{A}\tilde{B}}$ jsou komponenty vůči bázi $\tilde{E}_{\tilde{A}}$)

- dvě trivial. konz. s metrikou s $H_{AB} = H_{\tilde{A}\tilde{B}}$ jsou spojeny kalibr. transf.

  $R = \tilde{E}_{\tilde{M}} E^M$ tj. $R^{\tilde{A}}{}_{B} = \tilde{E}^{\tilde{A}}_{\tilde{M}} E^M_B$ kde E^M je duální k E_M

  obrácen, toto R dává

  $\tilde{E}_{\tilde{A}} = R \cdot E_A$ $H_{\tilde{A}\tilde{B}} = H_{AB}$

pasivní kalibrační transformace

změna komponent ϕ^A vektoru ϕ^A při změně trivializace
konz. s metrikou se nazývá pasivní kalibr. transf.

mějme trivializace E_M, $\tilde{E}_{\tilde{M}}$ tak že $H_{AB} = H_{\tilde{A}\tilde{B}} = $ konst

nechť $E_A = \tilde{E}_{\tilde{M}} R^{\tilde{M}}{}_{A}$ $R^{\tilde{M}}{}_{N}$ matice přechodu

pak $\phi^{\tilde{A}} = R^{\tilde{A}}{}_{M} \phi^M$ ortonormalita: $H_{AB} = H_{\tilde{M}\tilde{N}} R^{\tilde{M}}{}_{A} R^{\tilde{N}}{}_{B}$

Kovariantní derivace na bundlu s O-symetrií

Def:
mějme vekt. bundl $\mathcal{A}M$ s metrikou H_{AB}
kov. derivace D na $\mathcal{A}M$ se nazývá konzistentní s metrickou strukturou, též O-kovariantní der., jestliže

$$D_m H_{AB} = 0 \qquad \text{tj.} \quad D(\phi,\psi) = (D\phi,\psi) + (\phi, D\psi)$$

Lema
nechť E_A je trivializace konz. s metrikou H_{AB}
nechť ∂ je příslušná souř. derivace, tj $\partial E_A = 0$
pak ∂ je konzistentní s metrikou H_{AB}

$$\partial_m H_{AB} = 0$$

důkaz

$$H_{AB} = H_{KL} E^K_A E^L_B \qquad \partial E^K_A = 0 \qquad \partial H_{KL} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial H_{AB} = 0$$

Věta:
nechť D je O-kov. der. daná vektorovým polem. $A_m{}^K{}_L$ vůči trivializaci E_K, ∂ konzistentní s metrikou H_{AB}

$$D\phi = \partial\phi + A\cdot\phi$$

pak

$$A_m^T = -A_m \qquad \text{tj.} \quad A_{mL}{}^K = A^T_m{}^K{}_L = -A_m{}^K{}_L$$

důkaz:

$$DH = \partial H = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = [D_m - \partial_m] H_{AB} = A_m H_{AB} = -A_m{}^M{}_A H_{MB} - A_m{}^M{}_B H_{AM} \quad \Rightarrow \quad A_m^T = -A_m$$

Věta
nechť D je O-kov. derivace a $F_{mn}{}^A{}_B$ její tenzor křivosti, pak

$$F_{mn}^T = -F_{mn} \qquad \text{tj.} \quad F_{mnL}{}^K = F^T_{mn}{}^K{}_L = -F_{mn}{}^K{}_L$$

důkaz:

$$DH = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = [D_m D_n - D_n D_m + T^k_{mn} D_k] H_{AB} = F_{mn} H_{AB} = -F_{mn}{}^M{}_A H_{MB} - F_{mn}{}^M{}_B H_{AM}$$

$$\Rightarrow \quad F_{mn} = -F_{mn}^T$$

Pozn:
vekt. pot. A_m a křivost F_{mn} jsou tak reprezentací prvku Lieovy algebry lokální kalibrační grupy
(s dodatečnými tečnými indexy m resp. mn)

Kalibrační transformace kov. derivace

Def:

akci kalibr. transf. R na kov. derivaci D definujeme podmínkou

$$\tilde{D}\tilde{\phi} = \widetilde{D\phi}$$

Věta

transformovaná kov. der. $\tilde{D}$ je dána

$$\tilde{D} = D + \mathbb{\Lambda} \qquad \text{kde pseudoder. } \mathbb{\Lambda} \text{ je generována } \Lambda = -(DR)\cdot R^{-1}$$

důkaz:

definiční vztah pro $\tilde{D}$ je

$$R\cdot D\phi = \tilde{D}(R\cdot\phi) = D(R\cdot\phi) + \Lambda\cdot R\cdot\phi = (DR)\cdot\phi + R\cdot(D\phi) + \Lambda\cdot R\cdot\phi$$

$$\Rightarrow (DR + \Lambda\cdot R)\cdot\phi = 0 \quad \forall\phi \quad \Rightarrow \quad \Lambda = -(DR)\cdot R^{-1}$$

Věta:

nechť $A, \tilde{A}$ jsou vekt. potenciály kov. derivací $D, \tilde{D}$ vůči stejné trivializaci E_A, ∂ platí

$$\tilde{A} = R\cdot A\cdot R^{-1} - (\partial R)\cdot R^{-1}$$

$$= A - (DR)\cdot R^{-1} = A - R^{-1}\cdot(\tilde{D}R)$$

důkaz:

víme: $D\phi = \partial\phi + A\cdot\phi \qquad \tilde{D}\phi = \partial\phi + \tilde{A}\cdot\phi \qquad \tilde{D}\phi = D\phi - (DR)\cdot R^{-1}\cdot\phi$

$$\Rightarrow \tilde{D}\phi = D\phi - (DR)\cdot R^{-1}\cdot\phi = \partial\phi + (A - (DR)\cdot R^{-1})\cdot\phi = \partial\phi + \tilde{A}\cdot\phi$$

$$\Rightarrow \tilde{A} = A - (DR)\cdot R^{-1} \qquad \text{- jedno tvrzení věty}$$

$$= A - (\partial R + A\cdot R - R\cdot A)\cdot R^{-1} = R\cdot A\cdot R^{-1} - (\partial R)\cdot R^{-1}$$

alternativní důkaz

$$\widetilde{D\phi} = \tilde{D}\tilde{\phi} = \partial\tilde{\phi} + \tilde{A}\cdot\tilde{\phi} = \partial(R\cdot\phi) + \tilde{A}\cdot R\cdot\phi = R\cdot\partial\phi + (\partial R + \tilde{A}\cdot R)\cdot\phi$$

$$= R\cdot D\phi = R\cdot\partial\phi + R\cdot A\cdot\phi \qquad \forall\phi \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{A} = R\cdot A\cdot R^{-1} - (\partial R)\cdot R^{-1}$$

třetí tvrzení plyne ze záměny

$$D \leftrightarrow \tilde{D} \qquad A \leftrightarrow \tilde{A} \qquad R \leftrightarrow R^{-1} \quad \Rightarrow$$

$$A = \tilde{A} - (\tilde{D}R^{-1})\cdot R \quad \Rightarrow \quad \tilde{A} = A + (\tilde{D}R^{-1})\cdot R = A - R^{-1}\tilde{D}R$$

Věta:

tenzor křivosti $\tilde{F}$ transformované kov. der. $\tilde{D}$ je

$$\tilde{F} = R \cdot F \cdot R^{-1}$$

tj. je dán standardní kal. transf. tenzoru typu $A^1_1 M$

důkaz:

$$\tilde{D}\tilde{\phi} = \widetilde{D\phi} \quad \Rightarrow \quad \tilde{D}\tilde{D}\tilde{\phi} = \widetilde{DD\phi} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbb{F}}\tilde{\phi} = \widetilde{\mathbb{F}\phi}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{F} \cdot R \cdot \phi = R \cdot F \cdot \phi \quad \Rightarrow \quad \tilde{F} = R \cdot F \cdot R^{-1}$$

Komplexní vektorový bundl s U-symetrií

kalibrační transformace vymezena jako transf. zachovávající skalární součin na komplexním vekt. prostoru

popis "standardní kopie" komplexní a hermitovské struktury:

Komplexní struktura

$\mathbb{E}$ komplexní vekt. pr.

tenzory z $\mathbb{E}^k_l$ umožňují popsat všechny multilin. zobrazení mezi vektory a tenzory

potřebujeme popsat též antilineární operace

stačí zavést jednu antilin. operaci - ostatní se liší o lineární oper.

zavedeme $\bar{\mathbb{E}}$ - kopii prostoru $\mathbb{E}$, která bude spojena s $\mathbb{E}$ antilin. operací

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{E}_L \equiv \mathbb{E} \\ \mathbb{E}_R \equiv \bar{\mathbb{E}} \end{array}\right\} \text{ sdružené komplexní vekt. pr. dimenze } D$$

$\bar{} : \mathbb{E}_L \leftrightarrow \mathbb{E}_R$ antilineární jedno-jednoznačné operace tak, že

$\bar{\bar{\phi}} = \phi$ sdružení

vektory z $\mathbb{E}_L, \mathbb{E}_R$ značíme

$\mathbb{E}_L$ ϕ^A indexy $A, B, C, \ldots$

$\mathbb{E}_R$ $\psi^{\bar{A}}$ indexy $\bar{A}\ \bar{B}\ \bar{C}$

Pozn.: v kontextu spinorů se používají místo nadtržení tečky

komplexní tenzorový prostor nad $\mathbb{E}_L, \mathbb{E}_R$ pak je

$$\mathbb{E}^{k_L k_R}_{l_L l_R} = \underbrace{\mathbb{E}_L \otimes \ldots}_{k_L} \otimes \underbrace{\mathbb{E}^*_L \otimes \ldots}_{l_L} \otimes \underbrace{\mathbb{E}_R \otimes \ldots}_{k_R} \otimes \underbrace{\mathbb{E}^*_R \otimes \ldots}_{l_R} \qquad X^{A \ldots \bar{B} \ldots}_{M \ldots \bar{N} \ldots}$$

libovolná antilin. operace lze nyní reprezentovat pomocí sdružení $\bar{}$ a tenzorové operace

např.: $\alpha : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ $\qquad$ např. $\circledast : \mathbb{E}^{11}_{00} \to \mathbb{E}^{11}_{00}$

$$(\alpha\phi)^A = \alpha^A{}_{\bar{M}}\, \bar{\phi}^{\bar{M}} \qquad X^{\circledast A\bar{B}} = S^{A\bar{B}}{}_{N\bar{M}}\, \bar{X}^{\bar{M}N}$$

Skalární součin, hermitovská struktura

na $\mathbb{E}_L$ a $\mathbb{E}_R$ definujeme skal. součiny pomocí nedegenerované hermitovské positivně definitní formy $h_{\underline{\bar{A}B}}$

$h_{\underline{\bar{A}B}} \in \mathbb{E}^{00}_{11}$

$h_{\underline{\bar{A}B}}$ nedegenerované $\equiv$ existuje inverzní $h^{-1\,\underline{\bar{A}B}}$ $\quad h_{\underline{\bar{M}A}}\, h^{-1\,\underline{\bar{M}B}} = 1\!\!1^{\underline{B}}_{\underline{A}} \quad h_{\underline{\bar{A}M}}\, h^{-1\,\underline{\bar{B}M}} = 1\!\!1^{\underline{\bar{B}}}_{\underline{\bar{A}}}$

$h_{\underline{\bar{A}B}}$ hermitovské $\equiv$ $\bar{h}_{\underline{B\bar{A}}} = h_{\underline{\bar{A}B}}$

$h_{\underline{\bar{A}B}}$ posit. definitní $\equiv$ $\bar{\phi}^{\underline{\bar{A}}}\, \phi^{\underline{B}}\, h_{\underline{\bar{A}B}} > 0$ pro $\phi \neq 0$

skalární součiny:

$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_L = \bar{\phi}_1^{\underline{\bar{A}}}\, \phi_2^{\underline{B}}\, h_{\underline{\bar{A}B}} \qquad \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{E}_L$

$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_R = \bar{\psi}_1^{\underline{A}}\, \psi_2^{\underline{\bar{B}}}\, \bar{h}_{\underline{A\bar{B}}} \qquad \psi_1, \psi_2 \in \mathbb{E}_R \qquad$ ale $\bar{h} = h$!

hermitovské sdružení

$+ : \mathbb{E}^{10}_{00} \leftrightarrow \mathbb{E}^{00}_{10}$

$\mathbb{E} \leftrightarrow \mathbb{E}^*$ (duál k $\mathbb{E}$)

$\phi^{+}{}_{\underline{A}} = \bar{\phi}^{\underline{\bar{M}}}\, h_{\underline{\bar{M}A}}$

$\Sigma^{+\,\underline{A}} = \bar{\Sigma}_{\underline{\bar{M}}}\, h^{-1\,\underline{\bar{M}A}}$

$+$ antilineární

$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_L = \phi_1^{+}{}_{\underline{A}}\, \phi_2^{\underline{A}}$

$\phi^{++} = \phi \qquad \Sigma^{++} = \Sigma$

$+ : \mathbb{E}^{01}_{00} \leftrightarrow \mathbb{E}^{00}_{01}$

$\bar{\mathbb{E}} \leftrightarrow \bar{\mathbb{E}}^*$ (duál k $\bar{\mathbb{E}}$)

$\psi^{+}{}_{\underline{\bar{A}}} = \bar{\psi}^{\underline{M}}\, h_{\underline{\bar{A}M}}$

$\Omega^{+\,\underline{\bar{A}}} = \bar{\Omega}_{\underline{M}}\, h^{-1\,\underline{\bar{A}M}}$

$+$ antilineární

$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_R = \psi_1^{+}{}_{\underline{\bar{A}}}\, \psi_2^{\underline{\bar{A}}}$

$\psi^{++} = \psi \qquad \Omega^{++} = \Omega$

$+ : \mathbb{E}^{10}_{10} \to \mathbb{E}^{10}_{10}$

$M^{+\,\underline{A}}{}_{\underline{B}} = h^{-1\,\underline{\bar{K}A}}\, h_{\underline{\bar{L}B}}\, \bar{M}^{\underline{\bar{L}}}{}_{\underline{\bar{K}}}$

$\langle \phi_1, M \cdot \phi_2 \rangle_L = \langle M^{+} \cdot \phi_1, \phi_2 \rangle_L$

$M^{++} = M$

$+$ antilineární

$+ : \mathbb{E}^{01}_{01} \to \mathbb{E}^{01}_{01}$

$N^{+\,\underline{\bar{A}}}{}_{\underline{\bar{B}}} = h^{-1\,\underline{\bar{A}K}}\, h_{\underline{\bar{B}L}}\, \bar{N}^{\underline{L}}{}_{\underline{K}}$

$\langle \psi_1, N \cdot \psi_2 \rangle_R = \langle N^{+} \cdot \psi_1, \psi_2 \rangle_R$

$N^{++} = N$

$+$ antilineární

Lokalizace komplexní a hermitovské struktury

$\mathbb{E}_L M$, $\mathbb{E}_R M$ komplexní vekt. bundly nad M spojené vzájemným sdružením $\bar{\ }$

hermitovská struktura

$h_{\bar{A}B} \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{E}^{00}_{11} M$

generující skalární součiny $\langle , \rangle_L$, $\langle , \rangle_R$ a herm. odz. $^+$

Pozn: Tyto struktury jsou lokálně (nekanonicky) isomorfní strukturám na standardním fibru. Tzn., že lokální isomorfismus $\mathbb{E}U \cong \mathbb{E} \times U$, kde $U \subset M$, zachovává isomorf. struktur $\bar{\ }$, h, $\langle\ \rangle_{L,R}$, $^+$

Lokální kalibrační U-transformace

lokální kalibrační U-transformace je hladká lineární transf. všech fibrů bundlů $E_L M$ a $E_R M$ zachovávající skalární součiny $\langle\, ,\, \rangle_L$ a $\langle\, ,\, \rangle_R$ a komutující se sdružením –

$$U : \mathrm{Sect}\, E_L M \to \mathrm{Sect}\, E_L M \qquad \text{tj.} \quad U \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{E}^{10}_{10} M$$

$$\phi \to \tilde{\phi} = U \cdot \phi \qquad \text{tj.} \quad \tilde{\phi}^A = U^A{}_B\, \phi^B$$

$$\bar{U} : \mathrm{Sect}\, E_R M \to \mathrm{Sect}\, E_R M \qquad \text{tj.} \quad \bar{U} \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{E}^{01}_{01} M$$

$$\psi \to \tilde{\psi} = \bar{U} \cdot \psi \qquad \text{tj.} \quad \tilde{\psi}^{\bar{A}} = \bar{U}^{\bar{A}}{}_{\bar{B}}\, \psi^{\bar{B}}$$

zachování skal. součinu:

$$\langle \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2 \rangle_L = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle_L \qquad \langle \tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2 \rangle_R = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle_R$$

$$\Updownarrow$$

$$h_{\bar{M}N}\, \bar{U}^{\bar{M}}{}_{\bar{A}}\, U^N{}_B = h_{\bar{A}B}$$

$$\Updownarrow$$

$$U^{+A}{}_M\, U^M{}_B = U^A{}_M\, U^{+M}{}_B = \mathbb{1}^A{}_B \qquad \bar{U}^{+\bar{A}}{}_{\bar{M}}\, \bar{U}^{\bar{M}}{}_{\bar{B}} = \bar{U}^{\bar{A}}{}_{\bar{M}}\, \bar{U}^{+\bar{M}}{}_{\bar{B}} = \mathbb{1}^{\bar{A}}{}_{\bar{B}}$$

$$\Updownarrow$$

U L-unitární $\qquad \bar{U}$ R-unitární

rozšíření na obecné tenzory

$$X^{A \ldots \bar{B} \ldots}{}_{C \ldots \bar{D} \ldots} \to \tilde{X}^{A \ldots \bar{B} \ldots}{}_{C \ldots \bar{D} \ldots} = U^A{}_K \cdots \bar{U}^{\bar{B}}{}_{\bar{L}} \cdots U^{-1M}{}_C \cdots \bar{U}^{-1\bar{N}}{}_{\bar{D}} \cdots X^{K \ldots \bar{L} \ldots}{}_{M \ldots \bar{N} \ldots}$$

transformace lze chápat jako reprezentaci lokální kalibr. grupy na prostorech $\mathbb{E}^{k_L k_R}_{l_L l_R} M$

Lokální kalibrační algebra

$U \in \mathrm{Sect}\, E^{10}_{10}M$ a $\bar U \in \mathrm{Sect}\, E^{01}_{01}M$ chápeme jako reprezentaci lokální kalibrační grupy na $E_L M$ a $E_R M$

Lieova algebra kalibrační grupy popisuje transf. blízké jednotce

$$U_\alpha = \mathbb{1} + \alpha\, i u + O(\alpha^2) \qquad \bar U_\alpha = \bar{\mathbb{1}} - \alpha\, i \bar u + O(\alpha^2)$$

$u \in \mathrm{Sect}\, E^{10}_{10}M$ a $\bar u \in \mathrm{Sect}\, E^{01}_{01}M$ tak reprezentují prvek Lieovy algebry kalibr. grupy na $E_L M$ a $E_R M$

podmínka unitarity

$$U \cdot U^\dagger = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad iu - iu^\dagger = 0 \qquad \text{tj.} \quad u^\dagger = u$$

$u, \bar u$ jsou hermitovské oper. na $E_L M$ resp. $E_R M$

Lieova závorka je dána komutátorem

$$u = i[u_1, u_2] \qquad \bar u = -i[\bar u_1, \bar u_2]$$

odbočka, Lieově závorce v algebře odpovídá komutátor na reprezentačním prostoru, ale přesná reprezentace obsahuje i faktor i, tj

$$iu = [iu_1, iu_2] \quad \Rightarrow \quad u = i[u_1, u_2]$$

exponenciální zobrazení exp: algebra → grupa je dáno maticovou exponenciálou

$$U = \exp(iu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (iu)^k$$

akce Lieovy algebry na obecném tenzoru

působení Lieovy algebry se dostane jako lineární řád působení prvku kalibr. grupy $U = (\mathbb{1} + \alpha i u)$

lehce se ověří, že se jedná o akci pseudoderivace $\mathfrak{u}$ rozšířenou na tenzorové prostory $E^{k_L k_R}_{l_L l_R}M$ nad $E_L M$ a $E_R M$ následovně

$$\mathfrak{u}\, X^{A\ldots\bar B\ldots}_{C\ldots\bar D\ldots} = iu^A{}_K X^{K\ldots\bar B\ldots}_{C\ldots\bar D\ldots} + \ldots - i\bar u^{\bar B}{}_{\bar K} X^{A\ldots\bar K\ldots}_{C\ldots\bar D\ldots} - \ldots - iu^L{}_C X^{A\ldots\bar B\ldots}_{L\ldots\bar D\ldots} - \ldots + i\bar u^{\bar L}{}_{\bar D} X^{A\ldots\bar B\ldots}_{C\ldots\bar L\ldots} + \ldots$$

akce pseudoderivace $\mathfrak{u}$ je generována akcí iu na $E_L M$ resp. $-i\bar u$ na $E_R M$

$$\mathfrak{u}\, \phi^A = iu^A{}_B \phi^B \qquad \mathfrak{u}\, \psi^{\bar A} = -i\bar u^{\bar A}{}_{\bar B} \psi^{\bar B}$$

Pozn: akce $\mathfrak{u}$ na $E^{k_L k_R}_{l_L l_R}M$ lze chápat jako kompozice $\mathfrak{u}_L$ na $E_L{}^{k_L}_{l_L}M$ a $\mathfrak{u}_R$ na $E_R{}^{k_R}_{l_R}M$

$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_L \oplus \mathfrak{u}_R$ kde $\mathfrak{u}_L$ je generováno iu a $\mathfrak{u}_R$ je generováno $-i\bar u$

máme tedy $\mathfrak{u}_R = \bar{\mathfrak{u}}_L$ a můžeme psát $\bar{\mathfrak{u}} = \mathfrak{u}$

pozor ale na faktory "i" a "$-i$" v konkrétní reprezentaci "iu" a "$-i\bar u$"

Trivializace kompatibilní s U-symetrií

trivializace kompatibilní s hermitovskou strukturou
je volba báze E_A v $E_L M$, resp. $\bar{E}_{\bar{A}}$ v $E_R M$ pro které platí
$$\langle E_A, E_B \rangle_L = \text{konst.} \qquad \langle \bar{E}_{\bar{A}}, \bar{E}_{\bar{B}} \rangle_R = \text{konst.}$$
konstantnost je myšlena na podkladové varietě M

ortonormální trivializace
typicky volíme ortonormální bázi
$$h_{\bar{A}B} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix} = \langle E_A, E_B \rangle_L = \langle \bar{E}_{\bar{B}}, \bar{E}_{\bar{A}} \rangle_R$$

kalibrační transformace
- kalibr. transformace ortonormální báze dá ortonormální bázi
- dvě ortonormální báze jsou spojeny kalibrační transformací

pasivní kalibrační transformace
změna komponent vektorů ϕ^A, $\psi^{\bar{A}}$ při změně ortonormální trivializace se nazývá pasivní kalibrační transformací

Reprezentace kalibr. grupy a algebry na $\mathbb{E}_L, \mathbb{E}_R$ a $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$

akce kalibrační grupy na $\mathbb{E}_L, \mathbb{E}_R$

$\phi \to \tilde{\phi} = U \cdot \phi$ na $\mathbb{E}_L$

$\psi \to \tilde{\psi} = \bar{U} \cdot \psi$ na $\mathbb{E}_R$

U unitární $U \cdot U^{\dagger} = \mathbb{1}$

indukuje akci kalibr. gr. na $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$

$\Phi \to \tilde{\Phi} = R \cdot \Phi = U \cdot \phi \oplus \bar{U} \cdot \bar{\phi}$ kde $\Phi = \phi \oplus \bar{\phi} \in \mathbb{E}^{\mathbb{R}}$

R zachovává $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$ $R \cdot \Phi \in \mathbb{E}^{\mathbb{R}}$ tj $R^* = R$

R ortogonální vůči H tj $R^T \cdot R = R \cdot R^T = \mathbb{1}$

ověření: $H = h \oplus \bar{h}$ $H^{-1} = h^{-1} \oplus \bar{h}^{-1}$ $R = U \oplus \bar{U}$

$R^T = H^{-1} \cdot R \cdot H = (h^{-1} \oplus \bar{h}^{-1}) \cdot (U \oplus \bar{U}) \cdot (h \oplus \bar{h}) = \bar{h}^{-1} \cdot \bar{U} \cdot \bar{h} \oplus h^{-1} \cdot \bar{\bar{U}} \cdot h = U^{\dagger} \oplus \bar{U}^{\dagger} = U^{-1} \oplus \bar{U}^{-1} = R^{-1}$

akce kalibrační algebry na $\mathbb{E}_L, \mathbb{E}_R$

$U = \mathbb{1} + \alpha i u$ $\delta \phi = i u \cdot \phi$ na $\mathbb{E}_L$

$\bar{U} = \mathbb{1} - \alpha i \bar{u}$ $\delta \psi = -i \bar{u} \cdot \psi$ na $\mathbb{E}_R$

indukuje akci kalibr. algebry na $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$

$R = \mathbb{1} + \alpha r$ $r = (iu) \oplus (-i\bar{u})$ $\delta \Phi = (i u \cdot \phi) \oplus (-i \bar{u} \cdot \bar{\phi}) = r \cdot \Phi$

r zachovává $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$ $r \cdot \Phi \in \mathbb{E}^{\mathbb{R}}$ tj $r^* = r$

r antisymetrické vůči H tj $r^T = -r$

ověření: $H = h \oplus \bar{h}$ $H^{-1} = h^{-1} \oplus \bar{h}^{-1}$ $r = (iu) \oplus (-i\bar{u})$

$r^T = H^{-1} \cdot r \cdot H = (h^{-1} \oplus \bar{h}^{-1}) \cdot (iu \oplus -i\bar{u}) \cdot (h \oplus \bar{h}) = -i \bar{h}^{-1} \cdot \bar{u} \cdot \bar{h} \oplus i h^{-1} \cdot \bar{\bar{u}} \cdot h = -(iu^{\dagger} \oplus i\bar{u}^{\dagger})$

$= -(iu \oplus -i\bar{u}) = -r$

Kovariantní derivace na bundlu s U-symetrií

Def: rozšíření kov. der. na komplexně sdružené bundly

kov. der. D na $\mathbb{E}_L M \equiv \mathbb{E} M$ se rozšiřuje na $\mathbb{E}_R M \equiv \bar{\mathbb{E}} M$ podmínkou

$$\bar{D}\bar{\phi} = \overline{D\phi} \qquad \phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{E} M$$

společnou akci na $\mathbb{E}^{k_L k_R}_{l_L l_R} M$ budeme označovat D

můžeme psát

$$D = D_L \oplus D_R$$ kde $D_L \equiv D$ působí na $\mathbb{E}^{k_L}_{L\, l_L} M$ a $D_R = \bar{D}$ působí na $\mathbb{E}^{k_R}_{R\, l_R} M$

v tomto smyslu $D = \bar{D}$

Pozn:

explicitně akci D na $\psi \in \mathbb{E}_R M$ můžeme napsat

$$D\psi = \bar{D}\psi = \overline{D\bar{\psi}}$$

↑ pouze změna značení $D \to D \oplus \bar{D}$

Def: U-kov. derivace

mějme komplexní vekt. bundly $\mathbb{E}_L M$ a $\mathbb{E}_R M$ s hermit. str. $h_{\bar{A}B}$

kov. der. D na $\mathbb{E}^{k_L k_R}_{l_L l_R} M$ se nazývá konzistentní s hermitovskou strukturou, též U-kovariantní derivace, jestliže

$$D_{\underline{m}} h_{\bar{A}B} = 0$$

což je ekvivalentní podmínce

$$\xi \cdot d\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_L = \langle D_\xi \phi_1, \phi_2 \rangle_L + \langle \phi_1, D_\xi \phi_2 \rangle_L \qquad \xi \cdot d\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_R = \langle D_\xi \psi_1, \psi_2 \rangle_R + \langle \psi_1, D_\xi \psi_2 \rangle_R$$

pro libovolné $\xi \in TM$ $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{E}_L M$ $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{E}_R M$

Lema:

nechť E_A resp $\bar{E}_{\bar{A}}$ je trivializace konzist. s hermit. str. $h_{\bar{A}B}$

nechť ∂ je příslušná souřadnicová der., tj. $\partial E_A = 0$ $\partial \bar{E}_{\bar{A}} = 0$

pak ∂ je konzist. s hermit. str. h, tj U-derivace

$$\partial_{\underline{m}} h_{\bar{A}B} = 0$$

důkaz

$$h_{\bar{A}B} = h_{\bar{K}L}\, \bar{E}^{\bar{K}}_{\bar{A}}\, E^{L}_{B} \qquad \partial \bar{E}^{\bar{K}}_{\bar{A}} = 0 \quad \partial E^{L}_{B} = 0 \quad h_{\bar{K}L} = \mathrm{konst} \Rightarrow \partial h_{\bar{A}B} = 0$$

Def Rozdílový tenzor a vektorový potenciál

nechť $D, \tilde{D}$ jsou kov. der. na $\mathbb{E}^{k_1 k_2}_{l_1 l_2} M$

jejich rozdíl

$$\mathbb{A} = D - \tilde{D}$$

je pseudoderivace působící na bundlech $\mathbb{E}^{k_1 k_2}_{l_1 l_2} M$ generovaná akcí

na $\mathbb{E}_L M$ $\quad \mathbb{A}_a \phi^M = D_a \phi^M - \tilde{D}_a \phi^M = i A_a{}^M{}_N \phi^N$ $\quad$ resp.

na $\mathbb{E}_R M$ $\quad \mathbb{A}_a \psi^{\bar{M}} = D_a \psi^{\bar{M}} - \tilde{D}_a \psi^{\bar{M}} = -i \bar{A}_a{}^{\bar{M}}{}_{\bar{N}} \psi^{\bar{N}}$

tenzor $A_a{}^M{}_N$ nazýváme rozdílový tenzor

je-li $\tilde{D} = \partial$ souřadnicová der. trivializace $\mathbb{E}_L M$, $\mathbb{E}_R M$
nazýváme $A_a{}^M{}_N$ vektorový potenciál vůči této trivializaci

Pozn: pozor na faktory "i" a "-i" v akci pseudoderivace
na komplexně sdružených prostorech $\mathbb{E}_L M$ a $\mathbb{E}_R M$
viz též akci kalibrační algebry na $\mathbb{E}_L M$ a $\mathbb{E}_R M$
význam těchto faktorů plyne z následující věty

Věta:

jsou-li $D, \tilde{D}$ U-kovariantní der., rozdílový tenzor je hermit.

$$A_a^{+}{}^M{}_{\underline{N}} = A_a{}^M{}_{\underline{N}}$$

konkrétně, vekt. potenciál U-kov. derivace vůči trivializaci
konzistentní s hermit. strukturou je hermitovský

důkaz:

$$\underbrace{D_a h_{\bar{M}\underline{N}}}_{0} = \underbrace{\tilde{D}_a h_{\bar{M}\underline{N}}}_{0} + i \bar{A}_a{}^{\bar{K}}{}_{\bar{M}} h_{\bar{K}\underline{N}} - i A_a{}^{\underline{K}}{}_{\underline{N}} h_{\bar{M}\underline{K}}$$

$$\Rightarrow \quad A_a{}^M{}_{\underline{N}} = h^{-1 \bar{K}M} \bar{A}_a{}^{\bar{L}}{}_{\bar{K}} h_{\bar{L}\underline{N}} = A_a^{+}{}^M{}_{\underline{N}}$$

Def: Tenzor křivosti

tenzor křivosti kov. der. D na komplex. vekt. bundlu definujeme s faktorem "i" resp. "-i" při akci na $\mathbb{E}_L M$ resp. $\mathbb{E}_R M$

$$i F_{ab} \cdot \phi = {}^D d_a {}^D d_b \phi = [D_a D_b - D_b D_a + T^k_{ab} D_k]\phi \qquad \text{pro } \phi \in \mathcal{S}ect\, \mathbb{E}_L M$$

$$-i \bar{F}_{ab} \cdot \psi = {}^D d_a {}^D d_b \psi = [D_a D_b - D_b D_a + T^k_{ab} D_k]\psi \qquad \text{pro } \psi \in \mathcal{S}ect\, \mathbb{E}_R M$$

na obecném tenzorovém bundlu je operátor křiv. pseudoderivace

$$\mathbb{F}_{ab} = {}^D d_a {}^D d_b = [D_a D_b - D_b D_a + T^k_{ab} D_k] \qquad \text{na } \mathbb{E}^{k\dots k}_{l\dots l} M$$

generovaná akcí na $\mathbb{E}_L M$, $\mathbb{E}_R M$ výše

zde T^k_{ab} je torze rozšíření ∇ na tečný prostor $\mathbb{T}^* M$

tenzor křivosti na tomto rozšíření nezávisí

Věta

tenzor křivosti U-kov. derivace D je hermitovský

$$F_{ab}{}^{\dagger} = F_{ab}$$

důkaz:

$Dh = 0$ pro U-kov. derivaci $\Rightarrow$ $DDh = 0$ $\Rightarrow$ $[D_a D_b - D_b D_a + T^k_{ab} D_k] h = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = \mathbb{F}_{ab}\, h_{\bar{A}B} = i \bar{F}_{ab}{}^{\bar{K}}{}_{\bar{A}}\, h_{\bar{K}B} - i F_{ab}{}^{K}{}_{B}\, h_{\bar{A}K}$$

$$\Rightarrow \quad F_{ab}{}^{A}{}_{B} = h^{-1\bar{K}A}\, \bar{F}_{ab}{}^{\bar{L}}{}_{\bar{K}}\, h_{\bar{L}B} = F^{\dagger}_{ab}{}^{A}{}_{B}$$

Def: kalibrační transf. kov. der.

kalibr. transf. kov. der. na komplex. bundu je dána podmínkou

$$\tilde{D}\tilde{\Phi} = \widetilde{D\Phi}$$

Věta:

při akci unitární kalibrační transformace na U-kov. derivaci na komplexním vekt. bundlu se různé objekty transformují následovně

$$\tilde{D} = D + \Lambda \qquad \Lambda \text{ generováno } i\lambda = -(DU)\cdot U^{+} \text{ na } E_L M$$

$$\tilde{A} = U\cdot A\cdot U^{+} + i(\partial U)\cdot U^{+} \qquad \text{kde } D = \partial + iA \text{ na } E_L M$$

$$= A + i(DU)\cdot U^{+} = A + i\,U^{+}\cdot(\tilde{D}U) \qquad \tilde{D} = \partial + i\tilde{A} \text{ na } E_L M$$

$$\tilde{F} = U\cdot F\cdot U^{+}$$

srovnej s reálným případem s uvážením konvence

$$A \to iA \qquad F \to iF \qquad U^{-1} = U^{+}$$

Realizace (zreálnění) prostorů $\mathbb{E}_L, \mathbb{E}_R$

prostor $\mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R$ má strukturu komplexifikace reálného vekt. prostoru

$$\mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R = \mathrm{Re}(\mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R) + i\,\mathrm{Im}(\mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R) = (\mathbb{E}^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$$

komplexní sdružení na $\mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R$

$$\Psi = \psi_L \oplus \psi_R \in \mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R \qquad \psi_L \in \mathbb{E}_L \quad \psi_R \in \mathbb{E}_R$$

definujeme

$$\Psi^* = \bar{\psi}_R \oplus \bar{\psi}_L \in \mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R$$

Re a Im definujeme pomocí $*$

$$\Psi \in \mathrm{Re}\,\mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R \iff \Psi = \Psi^* \qquad \text{tj. } \Psi = \psi \oplus \bar{\psi}$$

$$\Psi \in \mathrm{Im}\,\mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R \iff \Psi = -\Psi^* \qquad \text{tj. } \Psi = \psi \oplus (-\bar{\psi})$$

$$\mathrm{Re}\,\Psi = \tfrac{1}{2}(\Psi + \Psi^*) = \tfrac{1}{2}\ (\psi_L + \bar{\psi}_R) \oplus (\bar{\psi}_L + \psi_R)$$

$$\mathrm{Im}\,\Psi = -\tfrac{i}{2}(\Psi - \Psi^*) = -\tfrac{i}{2}\ (\psi_L - \bar{\psi}_R) \oplus (\psi_R - \bar{\psi}_L)$$

realizace $\mathbb{E}_L, \mathbb{E}_R$

$\mathbb{E}^{\mathbb{R}} = \mathrm{Re}(\mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R)$ reálný vekt. prostor $\mathbb{R}$-dimenze $2D$

$\mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R = (\mathbb{E}^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$ komplexní vekt. prostor $\mathbb{C}$-dimenze $2D$

komplexní struktura na $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$

na $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$ máme přirozeně dvě komplexní struktury J a $\bar{J} = -J$

$J : \mathbb{E}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{E}^{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R}$-lineární $\quad J^2 = -\mathbb{1} \quad J^* = J$

$\bar{J} : \mathbb{E}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{E}^{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R}$-lineární $\quad \bar{J}^2 = -\mathbb{1} \quad \bar{J}^* = \bar{J}$

definované

$$J \cdot \Psi = J \cdot (\psi \oplus \bar{\psi}) = (i\psi) \oplus (-i\bar{\psi}) \qquad \Psi \in \mathbb{E}^{\mathbb{R}} \quad \psi \in \mathbb{E}_L \quad \bar{\psi} \in \mathbb{E}_R$$

$$\bar{J} \cdot \Psi = \bar{J} \cdot (\psi \oplus \bar{\psi}) = (-i\psi) \oplus (i\bar{\psi})$$

$J, \bar{J}$ lze rozšířit $\mathbb{R}$-lineárně na $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} = \mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R$

$\mathbb{E}_L \oplus 0$ a $0 \oplus \mathbb{E}_R$ jsou pak vlastní podprostory J a $\bar{J}$

$$J \cdot (\phi \oplus 0) = i(\phi \oplus 0) \qquad J \cdot (0 \oplus \psi) = -i(0 \oplus \psi) \qquad \phi \in \mathbb{E}_L \quad \psi \in \mathbb{E}_R$$

$$\bar{J} \cdot (\phi \oplus 0) = -i(\phi \oplus 0) \qquad \bar{J} \cdot (0 \oplus \psi) = i(0 \oplus \psi)$$

vztah $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$ a $\mathbb{E}_L$ resp. $\mathbb{E}_R$

$\mathbb{E}_L$ a $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}, J)$ isomorfní jako komplexní vekt. pr. $\mathbb{C}$-dim D $\quad \phi \leftrightarrow \Phi = \phi \oplus \bar{\phi}$

$\mathbb{E}_R$ a $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}, \bar{J})$ isomorfní jako komplexní vekt. pr. $\mathbb{C}$-dim D $\quad \psi \leftrightarrow \Psi = \bar{\psi} \oplus \psi$

Hermitovská str. na E_L a E_R a metrická str. na $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$

hermitovské str. $h_{\bar{A}B}$ na E_L, E_R umožňují definovat:

metrika H na $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$

$$(\phi\oplus\bar\phi)\cdot H\cdot(\psi\oplus\bar\psi) = \bar\phi\cdot h\cdot\psi + \phi\cdot\bar h\cdot\bar\psi$$

$\Downarrow$ H $\mathbb{R}$-bilineární

H symetrické $H=H^T$

H kompatibilní s $J, \bar J$ $\quad J\cdot H\cdot J = H \quad \bar J\cdot H\cdot \bar J = H$

lze $\mathbb{C}$-lineárně rozšířit na $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} = E_L\oplus E_R$

$$(\phi_L\oplus\phi_R)\cdot H\cdot(\psi_L+\psi_R) = \phi_R\cdot h\cdot\psi_L + \phi_L\cdot\bar h\cdot\psi_R$$

transpozice

na $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$ $\quad (\phi\oplus\bar\phi)^T = \bar\phi\cdot h\oplus\phi\cdot\bar h$

na $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$ $\quad (\phi_L\oplus\phi_R)^T = \phi_R\cdot h\oplus\phi_L\cdot\bar h$

skalární součin na $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} = E_L\oplus E_R$

$$\langle\Phi,\Psi\rangle = \Phi^*\cdot H\cdot\Psi =$$
$$= \bar\phi_L\cdot h\cdot\psi_L + \bar\phi_R\cdot\bar h\cdot\psi_R = \langle\phi_L,\psi_L\rangle_L + \langle\phi_R,\psi_R\rangle_R$$

$$\Psi^\dagger = \Psi^{T*} = \Psi^{*T} \qquad (\psi_L\oplus\psi_R)^\dagger = \psi_L^\dagger\oplus\psi_R^\dagger$$

skalární součin na $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}, J)$ resp. $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}, \bar J)$

H a J definují symplektickou 2-formu Ω

$$\Omega = J\cdot H \qquad \Omega^T = -\Omega \qquad J\cdot\Omega\cdot J = \Omega$$

$(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}, J)$ tvoří komplexní vekt. součin, kde násobení komplex. číslem je:

$$(a+ib)*\Phi = a\Phi + b\,J\cdot\Phi \qquad a,b\in\mathbb{R} \quad \Phi\in\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$$

skalární součin na $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}, J)$

$$\langle\Phi,\Psi\rangle_J = \frac{1}{2}\left(\Phi\cdot H\cdot\Psi + i\,\Phi\cdot\Omega\cdot\Psi\right)$$

J-(anti)linearita: $\langle J\cdot\Phi,\Psi\rangle_J = -i\langle\Phi,\Psi\rangle_J \quad \langle\Phi,J\cdot\Psi\rangle_J = i\langle\Phi,\Psi\rangle_J$

hermiticita: $\langle\Phi,\Psi\rangle_J^* = \langle\Psi,\Phi\rangle_J$

$(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}, J)$ je isomorfní s E_L jako Hilbertův prostor

$$\langle\Phi,\Psi\rangle_J = \langle\phi,\psi\rangle_L \qquad \text{kde } \Phi=\phi+\bar\phi \quad \Psi=\psi\oplus\bar\psi \quad \phi,\psi\in E_L$$

obdobně definujeme $\bar\Omega = \bar J\cdot H$, $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}, \bar J)$, $\langle\,,\rangle_{\bar J}$ pak platí

$(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}, \bar J)$ je isomorfní s E_R jako Hilbertův prostor

$$\langle\Phi,\Psi\rangle_J = \langle\phi,\psi\rangle_R \qquad \text{kde } \Phi=\bar\phi\oplus\phi \quad \Psi=\bar\psi\oplus\psi \quad \phi,\psi\in E_R$$